KOMPUTASI SVD suatu Matriks A

Subiono

Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
subiono2008@matematika.its.ac.id

11 April 2023

End Discussion

In [ ]:

Pembahasan

1. Apa itu SVD
2. Sejarah.
3. Implementasi Program dan Diskusi

In [ ]:

Apa itu SVD

Pada Bagian ini dibahas apa **SVD** dan dari mana asalnya istilah ini.

SVD
Dalam aljabar linier, **dekomposisi nilai singular** (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition) adalah faktorisasi matriks **riil** atau **kompleks. Ini menggeneralisasi dekomposisi eigen** matriks normal persegi dengan basis eigen ortonormal dari sebarang matriks berukuran $m \times n$. Dekomposisi eigen adalah faktorisasi matriks menjadi bentuk kanonik, di mana matriks direpresentasikan dalam bentuk nilai eigen dan vektor eigennya. Hanya matriks yang dapat didiagonalkan yang dapat difaktorkan dengan cara ini. Ketika matriks yang difaktorkan adalah matriks simetris normal atau riil, dekomposisinya disebut "**dekomposisi spektral**", berasal dari teorema spektral. Hal ini terkait dengan **dekomposisi kutub**. Dalam matematika, dekomposisi polar dari matriks persegi riil atau kompleks A adalah faktorisasi bentuk $A = UP$, dengan U adalah matriks ortogonal dan P adalah matriks simetris semi-definit positif. Matriks U adalah matriks unitari dan P adalah matriks Hermitian semi-definit positif dalam kasus kompleks. Keduanya matriks persegi dengan ukuran yang sama.

Secara intuitif, jika matriks A berukuran $n \times n$ ditafsirkan sebagai transformasi linear dari $\mathbb{R}^n$ ruang dimensi-n, dekomposisi kutub memisahkannya menjadi **rotasi** atau **refleksi** U dari $\mathbb{R}^n$, dan **penskalaan** ruang di sepanjang himpunan n sumbu ortogonal. Tentang dekomposisi kutub, kita bahas pada bagian berikutnya.

In [ ]:

Sejarah

Dekomposisi nilai singular pada awalnya dikembangkan oleh ahli geometri diferensial, yang ingin menentukan apakah bentuk bilinear riil dapat dibuat sama dengan yang lain melalui transformasi ortogonal independen dari dua ruang yang dikerjakannya. **Eugenio Beltrami** dan **Camille Jordan** menemukan secara terpisah, masing-masing pada tahun 1873 dan 1874, bahwa nilai singular dari bentuk bilinear, yang direpresentasikan sebagai matriks, membentuk satu himpunan lengkap invarian untuk bentuk bilinear di bawah substitusi ortogonal. **James Joseph Sylvester** juga sampai pada dekomposisi nilai singular untuk matriks persegi riil pada tahun 1889, tampaknya terlepas dari Beltrami dan Jordan. Sylvester menyebut nilai singular sebagai pengali kanonik dari matriks A. Ahli matematika keempat yang menemukan dekomposisi nilai singular secara mandiri adalah **Autonne** pada tahun 1915, yang menemukannya melalui dekomposisi kutub. Bukti pertama dekomposisi nilai singular untuk matriks persegi panjang dan kompleks tampaknya dilakukan oleh **Carl Eckart** dan **Gale J. Young** pada tahun 1936; mereka melihatnya sebagai generalisasi dari transformasi sumbu utama untuk matriks Hermitian.

Pada tahun 1907, **Erhard Schmidt** mendefinisikan analog dari nilai singular untuk operator integral (yang kompak, di bawah beberapa asumsi teknis yang lemah); sepertinya dia tidak menyadari pekerjaan paralel pada nilai singular dari matriks berhingga. Teori ini dikembangkan lebih lanjut oleh **Émile Picard** pada tahun 1910, yang merupakan orang pertama yang menyebut nilai σ_i sebagai **nilai singular** (atau dalam bahasa Prancis, ***valeurs singulières***).

Metode praktis untuk menghitung **SVD** kembali ke **Kogbetliantz** pada tahun 1954-1955 dan **Hestenes** pada tahun 1958, sangat mirip dengan algoritma **nilai-eigen Jacobi**, yang menggunakan rotasi bidang atau rotasi **Givens**. Namun, ini digantikan oleh metode **Gene Golub** dan **William Kahan** yang diterbitkan pada tahun 1965, menggunakan transformasi **Householde**. Pada tahun 1970, **Golub** dan **Christian Reinsch** menerbitkan sebuah varian dari algoritma **Golub/Kahan** yang masih menjadi salah satu yang paling banyak digunakan saat ini.

In [ ]:

Secara khusus, dekomposisi nilai singular dari matriks kompleks $m \times n$ adalah faktorisasi dari bentuk

$$\underbrace{\boldsymbol{M}}_{m\times n} = \underbrace{\boldsymbol{U}}_{m\times m} \overbrace{\Sigma}^{m\times n} \underbrace{\boldsymbol{V}^*}_{n\times n},$$

dengan $\boldsymbol{U}$ matriks unitari kompleks $m \times m$, Σ matriks diagonal persegi panjang dengan bilangan riil tak negatif pada diagonalnya berukuran $m \times n$ sedangkan V matriks unitari kompleks berukuran $n \times n$ dan V^* adalah transpos konjugat dari $\boldsymbol{V}$. Dekomposisi seperti itu selalu ada untuk matriks kompleks apa pun. Jika M riil, maka U dan V dapat dijamin sebagai matriks orthogonal riil; dalam konteks seperti itu, **SVD** sering dilambangkan $U\Sigma V^\top$.

Elemen diagonal $\sigma_i = \sum_{ii}$ dari matriks Σ ditentukan secara tunggal oleh M dan dikenal sebagai nilai singular dari M. Banyaknya nilai singular tak-nol sama dengan **rank** dari M. Kolom dari U dan kolom V masing-masing disebut **vektor singular kiri** dan **vektor singular kanan** dari M. Mereka membentuk dua himpunan basis ortonormal $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, dan jika diurutkan dari besar ke yang terkecil sehingga nilai σ_i berada sebelum nilai nol semuanya memenuhi $\sigma_i > 0 : \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$, kolom (atau baris), dekomposisi nilai singular dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^*$, di mana $r \leq \max\{m, n\}$ adalah rank dari matriks $\boldsymbol{M}$.

Ilustrasi dekomposisi nilai singular $U\Sigma V^*$ dari matriks M riil 2×2. **Atas**: Tindakan M, ditunjukkan oleh efeknya pada cakram satuan D dan dua vektor satuan kanonis $\boldsymbol{e}_1$ dan $\boldsymbol{e}_2$. **Kiri**: Tindakan V^*, rotasi, pada $D, \boldsymbol{e}_1$ dan $\boldsymbol{e}_2$. **Bawah**: Tindakan Σ, penskalaan dengan nilai singular σ_1 secara horizontal dan σ_2 secara vertikal. **Kanan**: Tindakan U, rotasi lain.

Dari Ilustrasi gambar, langkah-langkah menghitung **SVD** dari suatu matriks M berukuran $m \times n$ sebagai berikut:

1. Sebagai input matriks M berukuran $m \times n$.
2. Hitung Vektor-eigen dari matriks $M^\top M$ terkait dengan nilai-eigen yang tidak sama dengan nol.
3. Normalkan ssemua vektor-eigen dalam (1). Konstruksi matriks V yang berisi kolom-kolom dari vektor-eigen yang telah dinormalkan.
4. Konstruksi matriks U berukuran $m \times m$ kolom-kolomnya adalah vekor $\frac{1}{\sigma} A\boldsymbol{v}$, dimana $\sigma = \sqrt{\delta}$ dengan δ merupakan nilai-eigen yang yang tak-nol dari $M^\top M$ yang bersesuai dengan vektor-eigen $\boldsymbol{v}$, tentunya hal ini untuk $\mathrm{rank}(M) = r = \min\{m, n\}$. Untuk $r < \min\{m, n\}$ matriks U yang didapat berukuran $m \times r$. Sehingga kita membutuhkan lagi sebanyak $m - r$ vektor kolom didapat dari ruang $\mathrm{null}(M^\top)$ atau $\ker(M^\top)$ dan normalkan vektor-vektor ini.
5. Konstruksi matriks singular $\Sigma = U^\top AV$.

Bila mengikikuti alur gambar langka (5) menjadi langka (4) dengan mengkonstruksi Σ sebagai matriks blok diagonal berukuran $r \times r$ berisi nilai sigular σ sedangkan elemenlainnya nol.

In [ ]:

```

```

SVD tidak tunggal. Dekomposisi selalu dapat dipilih sehingga nilai singular Σ_{ii} dalam urutan menurun. Dalam hal ini, Σ (tetapi bukan U dan V) ditentukan secara tunggal oleh M.

Istilah ini terkadang mengacu pada SVD ringkas, dekomposisi serupa $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V^*}$ dengan $\boldsymbol{\Sigma}$ adalah diagonal persegi dengan ukuran $r \times r$, di mana $r \leq \min\{m, n\}$ adalah rank dari $\boldsymbol{M}$, dan hanya memiliki nilai singular bukan nol. Dalam varian ini, $\boldsymbol{U}$ adalah matriks semi-unitari berukuran $m \times r$ sedangkan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks semi-unitari berukuran $n \times r$, sehingga $\boldsymbol{U^*U} = \boldsymbol{V^*V} = \boldsymbol{I}_r$

Aplikasi matematis dari **SVD** termasuk menghitung **pseudoinverse**, **aproksimasi matriks**, dan menentukan **rank**, **range**, dan **ruang null** dari suatu matriks. **SVD** juga sangat berguna di semua bidang **sains**, **teknik**, dan **statistika**, seperti **pemrosesan sinyal**, **pencocokan data kuadrat terkecil**, dan **kontrol proses**.

In [ ]:

```

```

Implementasi Program dan Diskusi

Berikut ini kita membuat program untuk menghitung SVD dari matriks A bila jawaban eksaknya tidak begitu rumit dengan menggunakan **Sympy** (**Symbolical Python**) dalam SageMath. Bila berkaitan dengan matriks dengan ukuran yang sangat besar dan elemen-elemennya bilangan irrasional yang cukup besar sebaiknya menggunakan **Numpy** (**Numerical Python**) dan **SciPy** (**ScientificPython**):

In [72]:

```python
from sympy import *

def DafM(ListVector):
    M=Matrix()
    for j in range(0,len(ListVector)):
        M=M.row_join(ListVector[j])
```

```
        return M

def matriksV(L):
    C=Matrix()
    for j in range(0,len(L)):
        if L[j][1]>1:
            X=DafM(GramSchmidt(L[j][2]))
            C=C.row_join(X)
        else:
            C=C.row_join(L[j][2][0])
        B = simplify(C*(sqrt(C.T*C)).inv())
    return B

def sigmak(L):
    sigma=[]
    for i in range(0,len(L)):
        sigma=sigma+[sqrt(L[i][0])]*L[i][1]
    return sigma

def svdR(A):
    r=A.rank()
    (m,n)=A.shape
    L=(A.T*A).eigenvects()
    L.reverse()
    V=matriksV(L).simplify()
    sigma=sigmak(L)
    U=Matrix()
    if r==min(m,n):
        for k in range(0,r):
            U=U.col_insert(k,(1/sigma[k].\
                              simplify()*A*V[:,k]/V[:,k].norm())\
                           .simplify())
    else :
        for k in range(0,r+1):
            if sigma[k] != 0 :
                U=U.col_insert(k,(1/sigma[k].simplify()*A*V[:,k])\
                              .simplify())
            else :
                if r<m:
                    N = (A.T).nullspace()
                    W=GramSchmidt(N)
                    for t in range(r,m):
                        U=U.col_insert(t,W[t-r-1]/W[t-r-1].norm())
    return U,(U.T*A*V),V.T
```

Kita berikan beberapa contoh matriks A dan kita hitung SVD dan kita amati hasil-hasil nilai-nilainya. Untuk contoh yang pertama kita berikan matriks A berukuran 3×3 hasil SVDnya memberikan nilai-nilai eksak:

In [73]:

```
from sympy import *

A = Matrix(3,3,[1,0,2,0,1,0,0,0,0])
A
```

Out[73]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [74]:

```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[74]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [75]:

```
S
```

Out[75]:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [5]:

```
Vt
```

Out[5]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Kita selidiki apakah $A = U\Sigma V^\top$?

In [76]:

```
A==U*S*Vt
```

Out[76]:

```
True
```

In [7]:

```
Vt.T*Vt
```

Out[7]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat hasil komputasi memberikan bahwa benar $A = U\Sigma V^\top$. Berikutnya kita berikan contoh matriks berukuran 5×5 dan perhitungan SVDnya memberikan nilai-nilai Eksak:

In [77]:

```
from sympy import *

A = Matrix([[1,0,0,0,2],[0,0,3,0,0],[0,0,0,0,0],[0,2,0,0,0]])
A
```

Out[77]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [79]:

```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[79]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [80]:
```
S
```

Out[80]:

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In [11]:
```
Vt
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\-\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$$

In [81]:
```
A == U*S*Vt
```

Out[81]:
```
True
```

Dari dua contoh yang telah kita bahas terlihat bahwa nilai-nilai singular dari matriks A adalah bilangan irrasional begitu juga matrik $V^\top$ elemen-elemennya sebagian berisi bilangan irrasional tetapi semuanya masih sederhana. Apapun hal ini bila dilakukan komputasi secara numerik pasti menghasilkan nilai-nilai yang tidak akan sampai pada nilai-nilai eksaknya, pasti ada kesalahan numerik walaupun itu sangat kecil. Sebelum kita memberikan suatu contoh matriks yang sangat sederhana dari segi ukuran yaitu berukuran 2×2 dan elemen-elemennya juga sederhana hanya berisi bilangan 0 dan 1, tetapi nilai-nilai SVDnya sangat sekali tidak sederhana dalam hasil komputasi, menghasilkan nilai bilangan irrasional yang sangat rumit sekali sehingga dalam hal ini menghitung SVDnya sebagaiman yang telah kita lakukan dengan contoh-contoh sebelum tidak bisa dilakukan. Pertanyaan apakah memang ada kesalahan dalam list program yang telah dibuat? Jawabannya kita bahas dalam contoh berikut:

In [82]:
```
from sympy import *

A = Matrix(2,2,[1,1,0,1])
A
```

Out[82]:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

In [83]:
```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[83]:

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)}{20} & \frac{\left(-5\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20}\\\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} & \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{10}\end{bmatrix}$$

In [84]:
```
S
```

Out[84]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{\left(\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)}{40}+\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}+\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)}{20}\right)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(-\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}+5\sqrt{2}\right)}{40\sqrt{\sqrt{5}+5}}+\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}+\frac{\sqrt{5-\cdots}}{\cdots}\right.}{\sqrt{\sqrt{5}+\cdots}}\\\frac{\left(-5\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{40\sqrt{5-\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\left(-5\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20}+\frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{10}\right)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\left(-5\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20}+\frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{10}\right)}{\sqrt{\sqrt{5}+5}}+\frac{\left(-\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(-\cdots\right.}{40}\end{matrix}\right.$$

In [85]:

```
Vt
```

Out[85]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\\\frac{-\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{5}+5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+5}}\end{matrix}\right]$$

In [86]:

```
A == U*S*Vt
```

Out[86]:

```
False
```

Walaupun program `svdR(A)` yang telah kami buat tidak terjadi pesan dalam ***programming error*** tetapi hasil eksekusi program tidak memberikan jawaban sebagaimana yang kita harapkan yaitu $A = U\Sigma V^\top$. Untuk menguji bahwa program `svdR(A)` adalah benar dan kita harus menunjukkan bahwa $A = U\Sigma V^\top$. Lakukan hal berikut:

In [87]:

```
A==simplify(U*S*Vt)
```

Out[87]:

```
True
```

Terlihat bahwa memang benar hasil running program `svdR(A)` memberikan jawaban $A = U\Sigma V^\top$ sebagaimana yang kita harapkan. Sekali lagi, kita melakukan uji pada program `svdR(A)` untuk matriks yang masih sederhana sebagaimana contoh sebelumnya tetapi hasil-hasil komputasi **SVD**nya sangat tidak sederhana. Bahkan pada hasil komputasi kita melakukan simplifikasi belum juga memberikan hasil sebagaimana yang kita harapkan. Apakah program `svdR(A)` kurang memadai? Kita menjawab hal ini dalam diskusi contoh berikut:

In [88]:

```
from sympy import *

A = Matrix(2,2,[1,1,2,1])
A
```

Out[88]:

$$\left[\begin{matrix}1 & 1\\2 & 1\end{matrix}\right]$$

In [89]:

```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[89]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{20}+\frac{3\sqrt{2}}{20}\right)\sqrt{5\sqrt{5}+25}}{\sqrt{4\sqrt{5}+9}} & \frac{\sqrt{25-5\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{10}}{20}+\frac{3\sqrt{2}}{20}\right)}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\\\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\sqrt{5\sqrt{5}+25}}{\sqrt{4\sqrt{5}+9}} & \frac{\sqrt{25-5\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{2}}{5}\right)}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\end{matrix}\right]$$

In [90]:

```
U=simplify(U)
U
```

Out[90]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(5\sqrt{2}+3\sqrt{10}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{20\sqrt{4\sqrt{5}+9}} & \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(-5\sqrt{2}+3\sqrt{10}\right)}{20\sqrt{9-4\sqrt{5}}} \\ \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{\sqrt{4\sqrt{5}+9}} & \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

In [91]:

```
S=simplify(S)
S
```

Out[91]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\left(11+5\sqrt{5}\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{29\sqrt{5}+65}} & 0 \\ 0 & \frac{\left(-11+5\sqrt{5}\right)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{65-29\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

In [23]:

```
Vt=simplify(Vt)
Vt
```

Out[23]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2\sqrt{\sqrt{5}+5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+5}} \\ \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \end{bmatrix}$$

In [24]:

```
simplify(U*S*Vt)
```

Out[24]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{47\sqrt{360\sqrt{5}+805}}{10}+\frac{21\sqrt{161-72\sqrt{5}}}{2}+\frac{47\sqrt{805-360\sqrt{5}}}{10}+\frac{21\sqrt{72\sqrt{5}+161}}{2} & -\frac{29\sqrt{360\sqrt{5}+805}}{10}+\frac{29\sqrt{805-360\sqrt{5}}}{10}- \\ -\frac{38\sqrt{360\sqrt{5}+805}}{5}+\frac{38\sqrt{805-360\sqrt{5}}}{5}+17\sqrt{161-72\sqrt{5}}+17\sqrt{72\sqrt{5}+161} & -\frac{47\sqrt{360\sqrt{5}+805}}{10}+\frac{21\sqrt{161-72\sqrt{5}}}{2}+ \end{bmatrix}$$

Terlihat hasil simplifikasi dari $U\Sigma V^\top$ masih sangat rumit ditafsirkan sebagai matriks A. Coba lakukan hal berikut apakah memberikan hasil yang kita harapkan.

In [92]:

```
N(U*S*Vt) == A
```

Out[92]:

```
True
```

Terlihat bahwa dengan perintah `N(U*S*Vt)`, secara logika memberikan hasil benar bahwa sama dengan A. Disini perlu diperhatikan bahwa komputasi `N(U*S*Vt)` adalah secara numerik, jadi secara umum `N(U*S*Vt)` $\neq A$. Tetapi apapun itu `N(U*S*Vt)` $-A$ menghasilkan matriks yang hampir seluruhnya nol, yang lainnya mendekati nol. Untuk matriks A berikut walaupun ukuran matriks hanya 3×3 menghitung **SVD**nya jangan menggunakan `svdR(A)`. Sebab waktu komputasinya **sangat lama sekali**. Mengapa hal ini terjadi, sebab nilai-eigen dan vektor-eigen yang bersesuaian dari matriks $A^\top A$ bilangan irrasioanl dan kompleks sangat rumit sekali angka-angkanya. Berdasarkan teori, matriks simetri apapun itu termasuk $A^\top A$ nilai-eigen dan vektor-eigennya semuanya bernilai riil. Bila menghasilkan tampilan bilangan kompleks apakah salah? Jawabannya tidak. Suatu contoh: $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})=1$.

In [95]:

```
from sympy import *

A = Matrix(3,3,[4,2,5,0,16,0,0,14,9])
A
```

Out[95]: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 14 & 9 \end{bmatrix}$

Kita hitung nilai-eigen dan vektor-eigen yang bersesuaian dari matriks $A^\top A$ sebagai berikut:

In [96]:

```
L=(A.T*A).eigenvects()
L.reverse()
L
```

Out[96]:

```
[(578/3 + 109490/(9*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) + 2*(12223045/27 + 20*s
qrt(452739459)*I/3)**(1/3),
  1,
  [Matrix([
   [1006493/98628 + 262064315/(295884*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) - 17*
(578/3 + 109490/(9*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) + 2*(12223045/27 + 20*sq
rt(452739459)*I/3)**(1/3))**2/131504 + 4787*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)/
32876],
   [      -56775/65752 - 441*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)/65752 + 5*(578/
3 + 109490/(9*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) + 2*(12223045/27 + 20*sqrt(45
2739459)*I/3)**(1/3))**2/263008 - 2682505/(65752*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**
(1/3))],
   [



    1]])]),
 (578/3 + 109490/(9*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) +
2*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3),
  1,
  [Matrix([
   [1006493/98628 + 262064315/(295884*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(45273945
9)*I/3)**(1/3)) - 17*(578/3 + 109490/(9*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739
459)*I/3)**(1/3)) + 2*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3))*
*2/131504 + 4787*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)/3287
6],
   [      -56775/65752 - 441*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**
(1/3)/65752 + 5*(578/3 + 109490/(9*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*
I/3)**(1/3)) + 2*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3))**2/26
3008 - 2682505/(65752*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/
3))],
   [




1]])]),
 (578/3 + 2*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3) + 109490/(9
*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)),
  1,
  [Matrix([
   [1006493/98628 + 4787*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/
3)/32876 - 17*(578/3 + 2*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/
3) + 109490/(9*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)))**2/131
504 + 262064315/(295884*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/
3))],
   [      -56775/65752 - 2682505/(65752*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739
459)*I/3)**(1/3)) + 5*(578/3 + 2*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/
3)**(1/3) + 109490/(9*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)))
**2/263008 - 441*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)/6575
2],
   [



1]])])]
```

Terlihat hasil komputasi menghitung nilai-eigen dan vektor-eigen yang bersesuaian dari matriks $A^\top A$ sangat-sangat rumit. Tetapi apapun itu kita coba menampilkan supaya mudah terbaca dan sebelumya kita coba menampilkan polinomial karakteristik dari matriks $A^\top A$.

In [97]:
```
delta = symbols('delta')
p = (A.T*A).charpoly(delta)
A.T*A
```

Out[97]:
$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 20 \\ 8 & 456 & 136 \\ 20 & 136 & 106 \end{bmatrix}$$

Terlihat matriks $A^\top A$ sebagaian elemen-elemennya berisi angka 3-digit. Kita tampilkan polinomial karakteristiknya.

In [98]:
```
p=factor(p.as_expr())
p
```

Out[98]:
$$\delta^3 - 578\delta^2 + 383688\delta - 331776$$

Polinomial karakteristik dari matriks $A^\top A$ adalah: $p(\delta) = \delta^3 - 578\delta^2 + 383688\delta - 331776$ dan kita tentukan akar-akarnya sebagai berikut:

In [30]:
```
s=solve(p)
s
```

Out[30]:
```
[578/3 + 2*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3) + 109490/(9*
(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)),
 578/3 + 109490/(9*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) + 2
*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3),
 578/3 + 109490/(9*(12223045/27 + 20*sqrt(452739459)*I/3)**(1/3)) + 2*(12223045/27 + 20*sq
rt(452739459)*I/3)**(1/3)]
```

In [31]:
```
simplify(s[0],rational=True)
```

Out[31]:
$$\frac{5^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{43796}{3} + \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(578+\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{15}\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}}$$

In [32]:
```
simplify(s[1],rational=True)
```

Out[32]:
$$\frac{5^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{43796}{3} + \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(578+\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{15}\right)}{\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}}$$

In [33]:
```
simplify(s[2],rational=True)
```

Out[33]:
$$\frac{578}{3} + \frac{21898\cdot 5^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}} + \frac{2\cdot\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}}{3}$$

In [ ]:

```

```

In [34]:

```
simplify(L[0][0], rational=True)
```

Out[34]:

$$\frac{578}{3} + \frac{21898 \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{2444609 + 36\sqrt{452739459}i}} + \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2444609 + 36\sqrt{452739459}i}}{3}$$

In [35]:

```
simplify(L[0][2][0], rational=True)
```

Out[35]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{- \frac{261708\sqrt{452739459}}{8219} - \frac{1349227i\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{49314} - \frac{149408455i\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{49314} - \frac{17\sqrt{452739459}\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{8219} + \frac{4535\sqrt{452739459}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{8219} + \frac{53314477681i}{24657}}{36\sqrt{452739459}-2444609i}\\\frac{\frac{227040\sqrt{452739459}}{8219} - \frac{284488222i\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{24657} - \frac{1224172i\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{24657} - \frac{46252002280i}{24657} + \frac{1567\sqrt{452739459}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{16438} + \frac{5\sqrt{452739459}\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{16438}}{36\sqrt{452739459}-2444609i}\\1\end{matrix}\right]$$

In [36]:

```
simplify(L[1][0], rational=True)
```

Out[36]:

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}\left(- \frac{43796}{3} + \frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(578+\left(-1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{15}\right)}{\left(1 - \sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609 + 36\sqrt{452739459}i}}$$

In [37]:

```
simplify(L[1][2][0], rational=True)
```

Out[37]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{3}\cdot\left(2012986+\left(-4787+4787\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}{197256} + \frac{\left(-17+17\sqrt{3}i\right)\left(218980+\sqrt[3]{5}\left(-578+\sqrt[3]{5}\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)^{2}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{5917680} - \frac{52412863\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2}\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{49314}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{3}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}\\\frac{\frac{\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(115884216-115884216\sqrt{3}i\right)}{2367072} + \frac{\left(218980+\sqrt[3]{5}\left(-578+\sqrt[3]{5}\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)^{2}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{2367072} + \frac{3\left(-37850+\left(49-49\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}{131504}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{2}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}\\1\end{matrix}\right]$$

In [38]:

```
simplify(L[2][0], rational=True)
```

Out[38]:

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{43796}{3}+\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(578+\left(-1-\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{15}\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}}$$

In [39]:

```
simplify(L[2][2][0], rational=True)
```

Out[39]:

$$\left[\begin{matrix}\frac{-\frac{52412863\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2}\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}}{49314}+\frac{\left(-17-17\sqrt{3}i\right)\left(218980+\sqrt[3]{5}\left(-578+\sqrt[3]{5}\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)^{2}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{5917680}+\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3}\cdot\left(2012986+\left(-4787-4787\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}{197256}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{3}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}\\\frac{\frac{3\left(-37850+\left(49+49\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}{131504}+\frac{\left(218980+\sqrt[3]{5}\left(-578+\sqrt[3]{5}\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)\sqrt[3]{2444609+36\sqrt{452739459}i}\right)^{2}\sqrt[3]{12223045+180\sqrt{452739459}i}}{2367072}+\frac{\left(12223045+180\sqrt{452739459}i\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(115884216+115884216\sqrt{3}i\right)}{2367072}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2}\cdot\left(2444609+36\sqrt{452739459}i\right)}\\1\end{matrix}\right]$$

In [99]:

```
from sympy import I

h=(sqrt(3)/2-I/2)*(sqrt(3)/2+I/2)
h
```

Out[99]:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

In [100…

```
simplify(h)
```

Out[100…

$$1$$

Lalu bagaimana sebaiknya kita menghitnung **SVD** dari matriks A yang kita bahas ini. Gunakan komputasi secara numerik dengan **NumPy** (**NumericalPython**) dan **SciPy** (**ScientificPython**). Selanjutnya kita menganalisis berapa banyak elemen kesalahan komputasi yang dihasilkan walaupun kesalahannya relatif cukup sangat kecil. Kita tampilkan matriks A sebagai berikut:

In [42]:

```
import numpy as np
from numpy import array
from numpy import diag
from numpy import dot
from scipy.linalg import svd

a = array([[4,2,5], [0,16,0], [0,14,9]])
print(a)
```

```
[[ 4  2  5]
 [ 0 16  0]
 [ 0 14  9]]
```

Selanjutnya kita melakukan komputasi **SVD** dari matriks A dan berturut-turut kita menampilkan hasil dari matriks U, Σ dan $V^\top$ sebagai berikut:

In [43]:
```
U, s, VT = svd(a)
S=diag(s)

print(U)
print()
print(S)
print()
print(VT)
```

```
[[-0.1619372   0.63324681  0.75681888]
 [-0.67428256 -0.63097925  0.38367723]
 [-0.72049939  0.44817816 -0.5291663 ]]

[[22.42852314  0.          0.        ]
 [ 0.          8.04860702  0.        ]
 [ 0.          0.          3.19081102]]

[[-0.02888058 -0.94519763 -0.32521894]
 [ 0.31471126 -0.3174065   0.89454454]
 [ 0.94874798  0.07651509 -0.30663122]]
```

Selanjutnya kita hitung perkalian $U\Sigma V^\top$ sebagai berikut:

In [44]:
```
H=U.dot(S).dot(VT)
print(H)
```

```
[[ 4.00000000e+00  2.00000000e+00  5.00000000e+00]
 [ 7.64380075e-16  1.60000000e+01 -1.89128934e-15]
 [-1.70017094e-15  1.40000000e+01  9.00000000e+00]]
```

Kita bandingkan nilai dari A dan $U\Sigma V^\top$ dengan melakukan $A - U\Sigma V^\top$.

In [45]:
```
print(a-H)
```

```
[[ 0.00000000e+00  4.44089210e-16  2.66453526e-15]
 [-7.64380075e-16  1.42108547e-14  1.89128934e-15]
 [ 1.70017094e-15  1.42108547e-14  5.32907052e-15]]
```

Kita analisis, seberapa banyak elemen terjadi kesalah dalam $A = U\Sigma V^\top$.

In [46]:
```
print(a==H)
```

```
[[ True False False]
 [False False False]
 [False False False]]
```

Terlihat hanya satu elemen $U\Sigma V^\top$ merupakan elemen eksak. Sedangkan yang lainnya elemen-elemen pedekatan dari A. Sebelum mengakhiri pembahasan **SVD**, kita bahas tiga contoh dari matriks A yang komputasi **SVD**nya menghasilkan jawab eksak dan penggunaan SVD untuk menentukan **psedo invers** dari suatu sebarang matriks.

In [47]:
```
from sympy import *

A = Matrix(2,3,[1,2,6,2,-3,-2])
A
```

Out[47]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

In [48]:
```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[48]:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

In [49]:
```
S
```

Out[49]:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

In [50]:
```
Vt
```

Out[50]:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

In [51]:
```
A == U*S*Vt
```

Out[51]:
```
True
```

In [52]:
```
from sympy import *

A = Matrix(3,2,[1,2,0,2,2,0])
A
```

Out[52]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

In [53]:
```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[53]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

In [54]:
```
S
```

Out[54]:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In [55]:
```
Vt
```

Out[55]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

In [56]:

```
A == U*S*Vt
```

Out[56]:

```
True
```

In [57]:

```
from sympy import *

A = Matrix(3,2,[4,-4,-1,1,1,-1])
A
```

Out[57]:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In [58]:

```
U,S,Vt = svdR(A)
U
```

Out[58]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{34}}{51} & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{34}}{102} & \frac{4\sqrt{17}}{17} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{34}}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

In [59]:

```
S
```

Out[59]:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [60]:

```
Vt
```

Out[60]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

In [61]:

```
A == U*S*Vt
```

Out[61]:

```
True
```

Diberikan sebarang matriks A berukuran $m \times n$

In [101…

```
from sympy import *

A = Matrix(3,2,[2,3,0,4,0,1])
A
```

Out[101…

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [102…

```
U,S,Vt=svdR(A)
```

In [103…

```
A == N(U*S*Vt)
```

Out[103…

```
False
```

In [104…

```
N(U*S*Vt,chop=True)==A
```

Out[104…

```
True
```

In [105…

```
N(U*S*Vt,chop=True)-A
```

Out[105…

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 3.0 \\ 0 & 4.0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

In [106…

```
A - N(U*S*Vt)
```

Out[106…

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.0 \cdot 10^{-125} & 0 \\ -3.0 \cdot 10^{-126} & 0 \end{bmatrix}$$

In [67]:

```
from sympy import *

A = Matrix(3,2,[4,-4,-1,1,1,-1])
A
```

Out[67]:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

In [68]:

```
U,S,Vt=svdR(A)
```

In [69]:

```
A.pinv()
```

Out[69]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

In [70]:

```
from sympy import *

A = Matrix(3,2,[2,3,0,4,0,1])
A.pinv()
```

Out[70]:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$$

Thank you for participating in the SVD topic discussion. Hopefully this is useful and continues on other more interesting discussion topics. Best of luck to our math department.

Return to Title

In [ ]: