

8/17/2021

GeoGebra

Klasik ver.6.0.652.0-offline (06 Juli 2021)

subiono2008@matematika.its.ac.id
DEPARTEMEN MATEMATIKA-FSAD-ITS

Table of Contents

Pengantar	6
BAB I: Pengantar Geogebra	8
1.1 Sejarah Ringkas GeoGebra	8
1.1.1 PENDIRIAN INSTITUT GEOGEBRA INTERNASIONAL (IGI)	10
1.1.2 AKTIFITAS GEOGEBRA SAAT KINI	11
1.2 Apa itu GeoGebra	12
1.3 Platform Bahan GeoGebra	13
1.4 Lisensi dan Komunitas	13
1.5 Penghargaan	14
BAB II: Memulai GeoGebra dan Beberapa keutamaannya	16
2.1 Memulai GeoGebra Klasik	16
2.2 Mengubah Perintah ke Bahasa Indonesia	22
BAB III Baris/Bilah Peralatan	25
3.1 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 2	26
3.2 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 3	29
3.3 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 4	33
3.3.1 Luas Segi Tiga	38
3.3.2 Membuktikan Dalil Phytagoras	39
3.4 Bilah Ragam	41
3.4.1 Cara membuka Bilah Ragam untuk Tampilan	43
3.4.2 Opsi Bilah Ragam untuk berbagai tampilan GeoGebra	43
3.4.3 Opsi Bilah Ragam untuk Alat dan Objek	45
3.5 Pengaturan	46
3.5.1 Cara menemukan Pengaturan	46
3.5.2 Tugas	46
3.6 Kiat dan trik untuk Input Aljabar	47
3.7 Mengganti nama objek	48
3.8 Memasukkan teks statis	50
3.9 Memasukkan Gambar	52
3.10 Menyimpan file GeoGebra	55
3.10.1 Menyimpan file GeoGebra kita ke platform sumber daya GeoGebra	55
3.10.2 Menyimpan file GeoGebra ke komputer kita	56
BAB IV: Perfektif Dalam GeoGebra	59
4.1 Perfektif Graphing	60

4.1.1 Tampilan Aljabar	61
4.1.2 Menyembunyikan Objek Matematika di Tampilan Aljabar	62
4.2 Perfektif CAS	63
4.3 Perfektif Geometri	70
4.4 Perfektif 3D	79
4.5 Kurva Parametrik 2D dan 3	99
4.6 Perfektif Spreadsheet	115
BAB V: GeoGebra Lanjut	135
5.1 Mengeksport File GeoGebra ke Lembar kerja HTML Dinamis	135
5.2 Membuat Alat Perintah yang Disesuaikan	137
5.3 Menyesuaikan Baris Peralatan GeoGebra	141
5.4 Memasukkan Formula LaTeX dan Sisipkan Bilah Masukan	144
BAB VI: Geometri	149
6.1 Tinjauan Cepat Geometri Euclidean Dasar	151
6.1.1 Pengukuran dan Kongruensi	151
6.1.2 Penambahan sudut	152
6.1.3 Kondisi kongruensi segitiga	153
BAB VII: Kalkulus	155
7.1 Limit	160
7.2 Fungsi Kontinu	171
7.3 Limit mendekati tak hingga	174
7.4 Differensial Fungsi Satu Peubah	177
7.5 Aturan Rantai untuk Turunan	180
7.6 Fungsi Naik atau Turun	182
7.7 Teorema Nilai Rata-rata untuk Differensial	185
7.8 Differensial Kurva Implisit [9]	190
7.9 Kurva Parametrik dan Koordinat Kutub	194
7.10 Penggunaan Turunan pada metode Newton-Rapshon	202
7.11 Integral dan beberapa Penggunaannya	202
7.12. Jumlahan Riemann Atas/Bawah	205
7.13. Luas Kurva dalam Koordinat kutub	209
7.14. Volume Benda Puta menggunakan cara cakram, cincin dan irisan [9]	209
7.15. Pusat suatu Massa [9]	217
7.16 Panjang suatu Kurva	222
7.17. Luas Permukaan Benda Putar	227

BAB VIII: Pemodelan Matematika	230
8.1 Pengantar Model Kontinu	230
8.2 Pembentukan Berbagai Model Kontinu	230
8.2.1 Penanggalan Carbon [7]	230
8.2.2 Distribusi Obat dalam Tubuh [7]	232
8.2.3 Model Matematika Infeksi Influenza (Dalam Inang) [7]	234
8.2.4 Model Epidemi [7]	235
8.2.4.1 Epidemi di Athena: 430-427 SM [11]	235
8.2.4.2.PANDEMI INFLUENZA, 1781-1782	239
8.2.4.3 Model Matematika Rentan-Infektif:	243
8.2.4.4 Model Matematika <i>Susceptible-Infective-Susceptible</i> :	243
8.2.4.5 Model Matematika <i>Susceptible-Infective-Removed</i> :	244
8.2.4.6 Model Matematika Epidemi Influenza SEAIR:	245
8.2.5 Model Matematika Pencampuran Larutan [8]:	246
8.2.6 Model Matematika KABEL TEGANTUNG [8]:	248
8.2.7. Model Matematika dari suatu Pendulum [12]	249
8.2.8 Model Persamaan Gerakan	252
Daftar Pustaka	257

Pengantar

Alhamdulillah Rabbil Aalamiin, segala puji hanyalah milikMu ya Allah yang telah memberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia semasa hidupnya untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatMu di hamparan bumi yang dihuni beragam manusia. Sholawat dan Salam kepadaMu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.

Buku ini disusun dengan maksud sebagai bahan bacaan pengetahuan matematika dan khususnya mempermudah pembaca lebih mengenal tentang perangkat lunak GeoGebra yang terkait proses pembelajaran matematika dan penerapannya.

Isi bahasan dimulai dengan pendahuluan tentang pengenalan Geogebra dalam hal ini GeoGebra Klasik ver.6.0.652.0-offline (06 Juli 2021) dan tentunya penulis akan selalu mengikuti pengembangan dan mengupdate pada versi yang terbarunya. Selanjutnya dibahas sejarah ringkas dan apa itu GeoGebra. Juga apa keutamaan dari GeoGebra diberikan secara rinci dalam pembahasannya.

Dalam buku ini diberikan beberapa masalah matematika yang muncul dalam proses pembelajaran dan diselesaikan secara visual, animasi dan grafis menggunakan Geogebra Klasik. Pembahasan materi tidak hanya untuk matematika tingkat Pendidikan Dasar dan Menengah tetapi juga untuk Pendidikan Tinggi. Dengan demikian buku ini diharapkan bisa digunakan oleh para pendidik matematika dan akan mempermudah dalam proses pembelajaran.

Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan para pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang dari sempurna bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus.

Buku ini dapat diperoleh secara gratis oleh siapapun tanpa harus membayar kepada penulis. Hal ini berdasarkan pemikiran penulis untuk kebebasan seseorang mendapatkan suatu bacaan yang tersedia secara bebas dengan maksud "kemanfaatan" dan "kejujuran". Yang dimaksud dengan kemanfaatan adalah bergunanya bacaan ini untuk kemudahan pembaca memperoleh informasi penting yang diperlukannya dan untuk pembelajaran. Sedangkan kejujuran adalah ikatan moral dari pembaca untuk tidak mendistribusi buku ini dengan tujuan tidak bermanfaat yang hanya menguntungkan dirinya sendiri.

Penulis menulis buku ini berdasarkan pemikiran "kebebasan menulis" (tidak harus menggunakan media cetak penerbit) dengan asas "kemanfaatan" sebab penulis menggunakan beberapa bahan referensi didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk

implementasi beberapa teori yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak GeoGebra Klasik ver.6.0.652.0 offline (60 Juli 2021) yang juga didapat dari internet secara gratis.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon hanya kepadaMu ya Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 17 Agustus 2021

Penulis



Subiono

Email: subiono2008@matematika.its.ac.id

Geogebra Web : <https://www.geogebra.org/u/subiono>

BAB I: Pengantar Geogebra

Buku ini membahas gabungan geometri dan kurva, aljabar dan persamaan. Sesuai dengan namanya GeoGebra adalah suatu perangkat lunak tentang Geometri dan Aljabar. Oleh karena itu dalam buku dibahas masalah-masalah Geometri, Aljabar dan beberapa hal terkait. Selain itu GeoGebra tidak hanya sebagai aplikasi geometri, aljabar tetapi juga untuk statistika, dan kalkulus interaktif, yang dimaksudkan untuk belajar dan mengajar matematika dan sains dari tingkat sekolah dasar hingga universitas. GeoGebra tersedia di berbagai platform dengan aplikasi desktop untuk Windows, macOS dan Linux, dengan aplikasi tablet untuk Android, iPad dan Windows, dan dengan aplikasi web berbasis teknologi HTML5 [1].

Matematikawan periode Barok adalah orang pertama yang membuat koneksi dari geometri konstruktif Yunani ke representasi dalam sistem koordinat Cartesian. Kemudian, metode analisis yang dikembangkan lebih lanjut dan lebih lanjut diterapkan ke kurva sampai terutama di abad ke-19, masalah teknis diselesaikan dengan bantuan kurva geometris awalnya [2]. Dalam hal ini GeoGebra sangat membantu untuk menyelesaikan masalah geometri dan aljabar. Sebab perangkat lunak ini mempunyai penampilan visual bentuk-bentuk geometri dan grafik kurva sangat handal sekali dan kedinamikannya sangat memudahkan untuk membuat animasi dari obyek yang dibahas.

1.1 Sejarah Ringkas GeoGebra

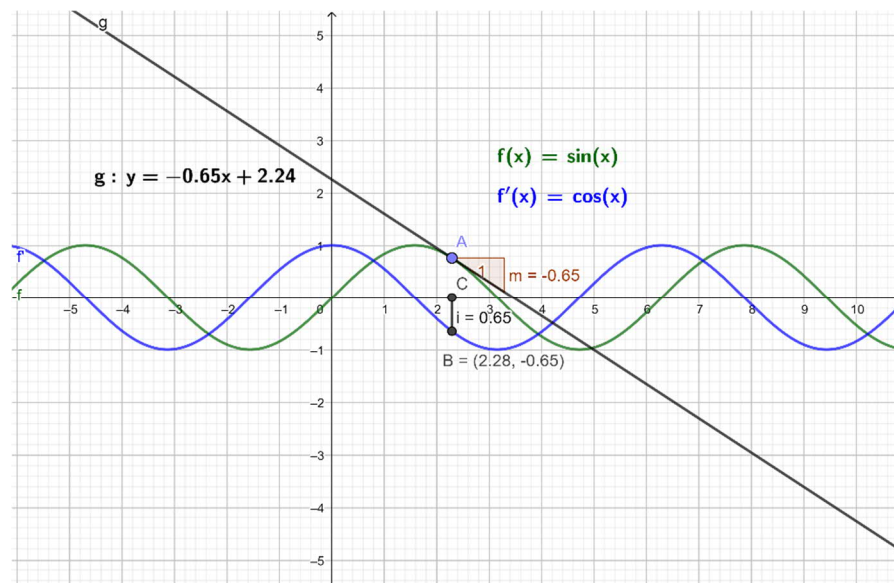
GeoGebra diciptakan oleh Markus Hohenwarter (24 Juni 1976) pada tahun 2001/2002 sebagai bagian dari tesis masternya dalam pendidikan matematika dan ilmu komputer di University of Salzburg di Austria. Didukung oleh beasiswa DOC dari Akademi Ilmu Pengetahuan Austria, dia dapat melanjutkan pengembangan perangkat lunak sebagai bagian dari proyek PhD-nya dalam pendidikan matematika. Selama waktu itu, GeoGebra memenangkan beberapa penghargaan internasional, termasuk penghargaan perangkat lunak pendidikan Eropa dan Jerman, dan diterjemahkan oleh instruktur matematika dan guru di seluruh dunia ke lebih dari 25 bahasa. Dia adalah seorang direktur proyek dalam pengembangan GeoGebra dan seorang matematikawan Austria serta profesor di Universitas Johannes Kepler (JKU) Linz [3].

Sejak 2006 GeoGebra didukung oleh Kementerian Pendidikan Austria untuk menjaga ketersediaan perangkat lunak bagi pendidikan matematika di sekolah dan universitas secara gratis. Pada bulan Juli 2006, GeoGebra menemukan jalannya ke AS, di mana perkembangannya berlanjut di Florida Atlantic University dalam proyek NSF : *Standard Mapped Graduate Education and Mentoring*.

GeoGebra adalah program perangkat lunak matematika dinamis open-source (tersedia gratis) yang dibuat oleh Markus Hohenwarter untuk proyek tesis Masternya di Universitas Salzburg, Austria. Situs web resmi GeoGebra, yang terletak di <http://www.geogebra.org>, menampilkan versi terbaru dari unduhan perangkat lunak, akses

ke GeoGebraWiki dan Forum Pengguna, publikasi terkait, dan informasi mengenai Institut GeoGebra regional.

Ide dasar pengembangan perangkat lunak adalah membuat program yang menggabungkan geometri, aljabar, dan kalkulus, bidang eksplorasi matematika yang cenderung diperlakukan secara terpisah oleh judul perangkat lunak lain menjadi satu paket, sumber terbuka, ramah pengguna (lihat Gambar 1) [3].

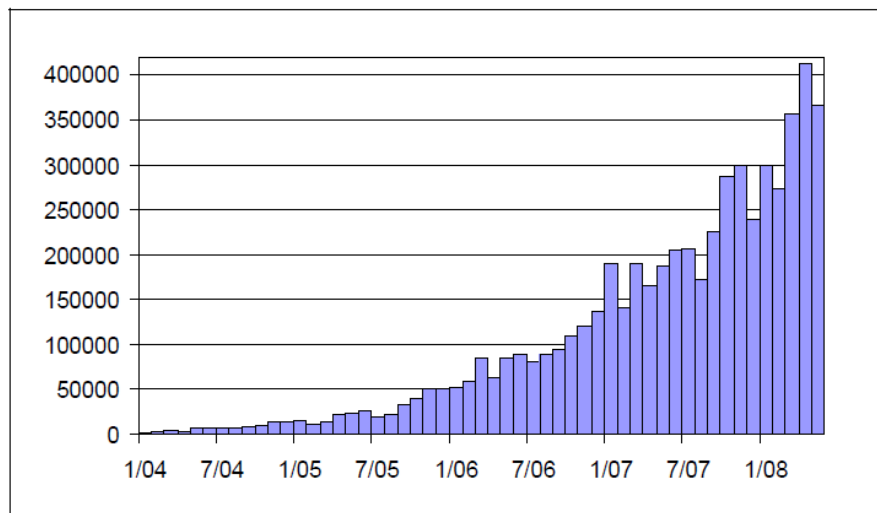


Gambar 1: Representasi Aljabar dan Grafis yang Terhubung dalam GeoGebra

Setelah perangkat lunak dipublikasikan ke Internet pada tahun 2002, sejumlah guru menghubungi Hohenwarter untuk berbagi antusiasme mereka, setelah menggunakan GeoGebra di ruang kelas masing-masing. Umpan balik positif dari para guru ini selanjutnya dikonfirmasi oleh beberapa penghargaan perangkat lunak pendidikan, termasuk Penghargaan Perangkat Lunak Akademik Eropa (2002). Terinspirasi, Hohenwarter terus mengembangkan GeoGebra melalui studi PhD-nya yang meneliti aplikasi pedagogis GeoGebra di sekolah-sekolah Austria. Pada Agustus 2006, Hohenwarter menjadi profesor tamu di Florida Atlantic University (FAU) dan mulai bekerja dalam inisiatif pelatihan guru berjudul, Kemitraan Matematika dan Sains (MSP), yang didanai oleh National Science Foundation (NSF). Dalam proyek ini, penelitiannya berfokus pada peningkatan pengetahuan konten matematika dan praktik mengajar guru melalui lingkungan yang kaya teknologi. Kemitraan MSP dengan sekolah-sekolah lokal telah memungkinkannya untuk terus mengembangkan GeoGebra sesuai dengan umpan balik dan pengalaman yang diperoleh saat berkolaborasi dengan guru sekolah menengah dan menengah.

Sejak tahun 2002, Hohenwarter telah diundang oleh asosiasi guru (misalnya, konferensi afiliasi NCTM di Montana, Nebraska, Virginia, 2007; California, 2008), universitas (misalnya, Universitas Barcelona, 2006; Universitas Nebraska-Lincoln, Universitas Berkely MSRI, 2007; King's College London, Inggris, 2008), dan konferensi akademik (misalnya, CCADGME, Kanada, 2007; MSOR-CETL, Inggris, 2008; Trondheim, Norwegia, 2008) untuk

menyampaikan pembicaraan dan menawarkan lokakarya tentang GeoGebra di Eropa dan Utara Amerika. Selain itu, para peneliti telah mulai menggunakan GeoGebra dalam proyek-proyek mereka, buku-buku teks sedang diterbitkan dengan suplemen GeoGebra, dan GeoGebra adalah salah satu dari sembilan program geometri yang dipilih untuk dimasukkan dalam proyek *Interoperable Interactive Geometry for Europe* (Intergeo) yang ekstensif yang berlangsung 2007-2010. Selain itu, banyak sukarelawan internasional kini telah menerjemahkan GeoGebra ke dalam 40 bahasa, menggunakan templat menu online. Saat ini situs web GeoGebra menerima sekitar 350.000 kunjungan per bulan dari 188 negara, dan, berdasarkan aktivitas online dan berbagi sumber daya, dapat diperkirakan bahwa ribuan guru matematika menggunakan GeoGebra di seluruh dunia (lihat Gambar 2) [3].



Gambar 2: Pengunjung di Situs Web GeoGebra per Bulan untuk Periode 2004-08

Untuk menangani meningkatnya jumlah permintaan dari para guru, Hohenwarter mendirikan Forum Pengguna GeoGebra dan GeoGebraWiki, yang keduanya memberikan dukungan berkelanjutan kepada pengguna dan kumpulan sumber daya gratis yang terus berkembang. Saat ini, forum dan wiki menampilkan sejumlah besar postingan dan lembar kerja matematika dinamis. Selain kelompok kegiatan lokakarya di lokasi yang berbeda, pada pertengahan dekade masih belum ada program pengembangan profesional terkait GeoGebra terorganisir untuk guru jabatan. Meskipun beberapa universitas mulai mengintegrasikan GeoGebra ke dalam program pelatihan guru mereka, ada sedikit koordinasi dan komunikasi di antara lembaga-lembaga ini. Untuk dapat menjangkau dan mendukung guru dengan pengembangan profesional gratis, untuk memastikan kelanjutan pengembangan teknis perangkat lunak, dan untuk mengoordinasikan penelitian terkait GeoGebra yang sedang berlangsung, Hohenwarter dan timnya memutuskan untuk membuat organisasi payung, yaitu, *International GeoGebra Institute* (IGI).

1.1.1 PENDIRIAN INSTITUT GEOGEBRA INTERNASIONAL (IGI)

Pada tanggal 7 dan 8 Mei 2008, sekelompok sekitar dua puluh tamu undangan internasional berkumpul di Fakultas Pendidikan, Universitas Cambridge untuk pertemuan

pertama Institut GeoGebra Internasional. Selama dua hari interaksi terfokus ini, isu-isu kunci tertentu dibahas secara panjang lebar, yaitu, visi, struktur, dan tujuan dari International GeoGebra Institute yang tersentralisasi dan GeoGebra Institutes (GIs) yang berbasis regional. Selama sesi tersebut, para peneliti, pengembang, dan pendidik guru dari AS, Kanada, Inggris, Spanyol, Hongaria, Norwegia, Polandia, Luksemburg, Islandia, dan Prancis (melalui tautan video) berbagi pembaruan mengenai proyek masing-masing yang berkaitan dengan perangkat lunak GeoGebra, penelitian, dan pengembangan guru.

Penelitian menunjukkan bahwa, bagi sebagian besar guru, hanya akses ke teknologi tidak cukup untuk keberhasilan integrasi teknologi ke dalam praktik pengajaran mereka (Kuba, Kilpatrick dan Peck, 2001). Disarankan bahwa pelatihan yang memadai dan berkelanjutan dan dukungan kolegal dapat meningkatkan kesediaan guru untuk mengintegrasikan teknologi ke dalam pengajaran mereka dan untuk mengembangkan praktik pengajaran berbantuan teknologi yang berhasil (Preiner, 2008; Hohenwarter dan Lavicza, 2007; Lavicza, 2008; Becker, Ravitz dan Wong, 1999). Sepenuhnya sadar akan kenyataan di atas, para peserta pada pertemuan Cambridge pada 2008 bersama-sama mengembangkan dan mengadopsi pernyataan visi berikut untuk IGI yang baru lahir: "The International GeoGebra Institute (IGI) menyediakan perangkat lunak matematika dinamis gratis dan berbagi keahlian dalam pelatihan, dukungan, dan pengembangan bahan untuk semua siswa dan guru untuk meningkatkan pendidikan matematika, sains dan teknologi di seluruh dunia. Ini memelihara dan mempromosikan kolaborasi antara praktisi dan peneliti, berusaha untuk membangun komunitas pengguna mandiri." Struktur IGI selanjutnya didefinisikan sebagai berikut: "International GeoGebra Institute mewakili organisasi virtual pusat yang bekerja bersama-sama dengan GeoGebra Institutes (GI) yang independen dan berbasis regional, dan yang mengeluarkan sertifikat resmi untuk pengguna, ahli, pelatih, dan Lembaga GeoGebra. pelatih." Untuk laporan lengkap dari pertemuan pertama dari International GeoGebra Institute (IGI) yang menggambarkan keseluruhan struktur dan tujuan IGI, proses akreditasi untuk GeoGebra Institutes (GIs) regional, sertifikasi pengguna dan pelatih GeoGebra, dan pembaruan terperinci mengenai proyek, penelitian, dan konferensi GeoGebra internasional, silakan kunjungi situs web berikut: <http://www.geogebra.org/IGI/>.

1.1.2 AKTIFITAS GEOGEBRA SAAT KINI

Pada saat tahun 2009, Institut GeoGebra regional pertama yang secara resmi diakui oleh IGI adalah yang berlokasi di Austria, Norwegia, Polandia dan Spanyol, di mana penelitian dan pelatihan yang signifikan telah dilakukan. Yang sedang berkata, sejumlah besar proyek dan inisiatif yang melibatkan GeoGebra saat ini sedang berlangsung di banyak negara yang berbeda, daftar yang meliputi: Kanada, Finlandia, Prancis, Jerman, Islandia, Hongaria, Luksemburg, Filipina, Afrika Selatan, Inggris dan AMERIKA SERIKAT. Pengembangan perangkat lunak itu sendiri juga berlanjut di bawah bimbingan Hohenwarter dan tim pemrogramannya, dengan versi 3 sekarang tersedia secara online dan pra-rilis terus diperbarui dan dipublikasikan untuk umpan balik pengguna. Terjemahan bahasa menu GeoGebra dan file bantuan terus meningkat jumlahnya karena sukarelawan internasional menawarkan waktu dan keahlian mereka. Buku pertama tentang Model-Centered Learning with GeoGebra saat

ini sedang diedit oleh Bu dan Schoen, dan konferensi GeoGebra pertama direncanakan untuk Linz, Austria pada Juli 2009.

GeoGebra telah dideskripsikan oleh banyak pendukungnya sebagai memiliki beberapa keunggulan utama dibandingkan program matematika lain yang ada: status bebas, sumber terbuka; keserbagunaan (input aljabar dan geometris dan jendela terpisah); aksesibilitas dalam bahasa sendiri; dan, kemampuan untuk berbagi komentar dan sumber daya secara interaktif di web melalui forum pengguna dan wiki.

Seperti perangkat lunak apa pun, GeoGebra bukannya tanpa serangkaian tantangannya sendiri, baik yang bersifat internal maupun eksternal. Sebagai contoh, organisasi-organisasi nirlaba yang mapan dan telah mengembangkan perangkat lunak geometri berkualitas selama beberapa dekade terakhir mungkin mempertanyakan kesesuaian atau legitimasi pendekatan kolaboratif open-source untuk pemrograman digital. Lebih lanjut, karena format *open-source*, dan keinginan penyelenggara untuk mendorong partisipasi internasional dalam pengembangan dan implementasi yang berkelanjutan, jelas ada kebutuhan untuk mengembangkan rasa kohesi dalam perangkat lunak, pelatihan, dan sumber daya yang diproduksi. Untuk tujuan ini, Hohenwarter merasakan kebutuhan untuk mengembangkan Institut Internasional yang akan mensintesis visi dan modus operandi, seolah-olah, dari pengembang dan pengguna perangkat lunak GeoGebra.

Semakin banyak kelompok internasional yang tertarik untuk mendirikan GeoGebra Institutes (GIs) setempat, menjadi saksi kualitas perangkat lunak dan kegembiraan di sekitar potensinya (Hohenwarter dan Preiner, 2007). Pembentukan International GeoGebra Institute (IGI) pada tahun 2008 menandai titik pertumbuhan yang signifikan untuk perangkat lunak dan komunitas internasional terkait. IGI sekarang menyediakan kerangka kerja dan dorongan untuk proyek penelitian yang sedang berlangsung, pengembangan perangkat lunak, dan pembelajaran dan dukungan profesional guru. Hohenwarter dan timnya terus menyambut aplikasi GI regional dan berharap untuk kolaborasi internasional masa depan, proyek penelitian, dan inisiatif pengembangan guru.

Dalam perubahan yang cepat dan keterkaitan yang kompleks antara kehidupan dan pembelajaran abad ke-21, GeoGebra dan semakin banyak Lembaga GeoGebra internasional diharapkan akan terus memainkan peran penting dalam menempa hubungan yang kuat antara **geometri, aljabar**, dan **guru matematika** di **seluruh dunia**.

Beberapa pembahasan dari apa yang penulis sajikan merupakan pengalaman praktis dapat dilihat di:

<https://www.geogebra.org/u/subiono>

1.2 Apa itu GeoGebra

GeoGebra adalah Perangkat Lunak Matematika Dinamis (*Dynamic Mathematics Software* (DMS)) untuk pengajaran dan pembelajaran matematika dari sekolah menengah sampai tingkat perguruan tinggi. Ini semudah digunakan sebagai Dynamic Geometry Software

(DGS) namun juga menyediakan fitur dasar dari Computer Algebra Systems (CAS) untuk menjembatani beberapa celah antara geometri, aljabar dan kalkulus. GeoGebra adalah perangkat lunak bebas di bawah lisensi GNU (*General Public License*) dan tersedia secara gratis di website <https://www.geogebra.org/>. Di sana, anda bisa mendownload installer untuk beberapa platform. Lalu apa GeoGebra klsaik itu? GeoGebra Classic adalah Perangkat Lunak Matematika Dinamis untuk semua tingkat pendidikan yang menyatukan geometri, aljabar, fungsi, spreadsheet, grafik, statistik, dan kalkulus dalam satu paket yang mudah digunakan. Anda dapat mengakses GeoGebra Classic online. Kita juga dapat mengunduh GeoGebra Klasik di komputer atau tablet kita untuk menggunakannya secara offline juga. Secara ringkasnya GeoGebra adalah [1] :

- Perangkat lunak Dinamis Matematika dalam satu paket yang mudah digunakan.
- Untuk belajar dan mengajar di semua tingkat pendidikan.
- Gabungan secara interaktif 2D dan 3D geometri, aljabar, tabel, grafik,
- kalkulus dan statistika.
- Perangkat lunak open source, tersedia secara bebas di website : <https://www.geogebra.org/>

1.3 Platform Bahan GeoGebra

Applet GeoGebra dinamis dapat langsung diunggah ke platform Bahan GeoGebra, layanan *cloud* resmi dan penyimpanan sumber belajar dan pengajaran yang terkait dan interaktif dengan GeoGebra. GeoGebra Material awalnya diluncurkan dengan nama *GeoGebraTube* pada Juni 2011 dan diganti namanya pada 2016. Dengan peningkatan baru-baru ini dan fungsionalitas yang diperluas, layanan ini sekarang menampung lebih dari 1 juta sumber daya (April 2016), 400.000 di antaranya dibagikan secara publik sebagai materi yang dapat dicari - seperti lembar kerja interaktif, simulasi, game, dan e-book yang dibuat menggunakan fitur Buku GeoGebra.

Bahan GeoGebra juga dapat diekspor dalam beberapa format, termasuk sebagai gambar statis atau sebagai GIF Animasi. Gambar vektor SVG dapat diedit lebih lanjut menggunakan perangkat lunak pihak ketiga, misalnya Inkscape. Format vektor EMF dapat langsung diimpor di beberapa aplikasi Office. Ada juga opsi untuk mengekspor ke clipboard sistem, PNG, PDF, EPS. GeoGebra juga dapat membuat kode yang dapat digunakan di dalam file LaTeX melalui PSTricks, PGF/TikZ, dan opsi ekspor Asymptote.

1.4 Lisensi dan Komunitas

Kode sumber GeoGebra dilisensikan di bawah GNU General Public License (GPL) dan semua komponen nonsoftware lainnya berada di bawah Creative Commons BY-NC-SA. Dengan demikian, penggunaan komersial tunduk pada lisensi khusus dan perjanjian kolaborasi.

International GeoGebra Institute (IGI) adalah entitas nirlaba dari The GeoGebra Group, mengoordinasikan upaya penyebaran dan penelitian di seluruh jaringan global kelompok pengguna di universitas dan organisasi nirlaba. IGI bergabung dengan guru, siswa, pengembang perangkat lunak, dan peneliti untuk mendukung, mengembangkan,

menerjemahkan, dan mengatur tugas dan proyek terkait GeoGebra. Kelompok pengguna lokal mendukung siswa dan guru di wilayah mereka. Sebagai bagian dari jaringan International GeoGebra Institute mereka berbagi materi pendidikan gratis melalui platform GeoGebra Materials, mengatur lokakarya, dan bekerja pada proyek yang berkaitan dengan GeoGebra. International GeoGebra Institute dapat mengesahkan pengguna, ahli, dan pelatih GeoGebra lokal sesuai dengan pedoman tertentu.

1.5 Penghargaan

GeoGebra reputasinya diakui dunia, hal ini bisa dilihat dari beberapa penghargaan yang telah diperoleh sampai saat ini, penghargaan ini diantaranya adalah:

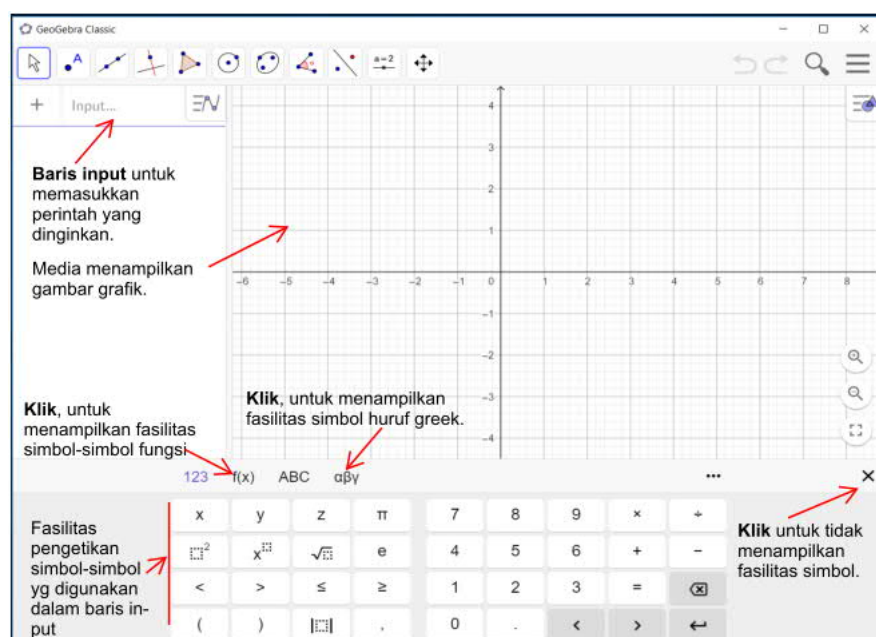
- ✓ Archimedes (<https://www.mnu.de/auszeichnungen#mathematik>) 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany)
- ✓ Microsoft Partner of the Year Award (<https://news.microsoft.com/2015/06/02/microsoft-announces-2015-partner-of-the-year-winners-and-finalists/#sm.000b2rry12kdejf11jb1eoomgf2zc>) 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA)
- ✓ MERLOT Award (<http://sloanconsortium.org/conference/2013/et4online/merlot-award-winnermath-geogebra>) for Exemplary Online Learning Resources – MERLOT Classics 2013 (Las Vegas, Nevada, USA)
- ✓ NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award 2010 (Washington D.C., USA)
- ✓ Tech Award (<https://web.archive.org/web/20120703023049/http://thetechawards.thetech.org/thetechawards/stories/1483>) 2009: Laureate in the Education Category (San Jose, California, USA)
- ✓ BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award
- ✓ SourceForge.net Community Choice Awards 2008 (<http://sourceforge.net/blog/cca08-finalists/>): Finalist, Best Project for Educators
- ✓ AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA)
- ✓ Learnie Award 2006: Austrian Educational Software Award for "Wurfbewegungen mit GeoGebra" (Vienna, Austria)
- ✓ eTwinning Award 2006: 1st prize for "Crop Circles Challenge" with GeoGebra (Linz, Austria)
- ✓ Les Trophées du Libre 2005: International Free Software Award, category Education (Soisson, France)
- ✓ Comenius 2004: German Educational Media Award (Berlin, Germany)
- ✓ Learnie Award 2005: Austrian Educational Software Award for "Spezielle Relativitätstheorie mit GeoGebra" (Vienna, Austria)
- ✓ digita 2004: German Educational Software Award (Cologne, Germany)
- ✓ Learnie Award 2003: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria)
- ✓ EASA 2002: European Academic Software Award (Ronneby, Sweden)

BAB II: Memulai GeoGebra dan Beberapa keutamaannya

Dalam bab ini dibahas bagaimana cara memulai GeoGebra Klasik. Selanjutnya dibahas beberapa keutamaan GeoGebra Klasik. GeoGebra Klasik ini mudah digunakan sebab, hamper semua perintah-perintahnya tidak perlu dihafalkan, tinggal diklik ikon-ikon yang mewakili perintah yang diinginkan oleh pengguna. Bahkan beberapa simbol matematika telah tersedia dalam GeoGebra Klasik, tinggal dipilih yang diperlukan dan diklik untuk mengaksesnya. Hal ini bisa kita lihat pada pembahasan berikut. Tentang beberapa hasil-hasil ekteraksi penulis dalam Geogebra, pembaca bisa mengakses di : <https://www.geogebra.org/u/subiono>

2.1 Memulai GeoGebra Klasik

Tampilan awal dari GeoGebra Klasik ver.6.0.652.0 offline diberikan oleh gambar berikut :



Gambar 1: Tampilan Awal GeoGebra Klasik

Fitur GeoGebra Klasik

- Geometri, Aljabar, dan Spreadsheet terhubung dan sepenuhnya dinamis
- Sistem Aljabar Komputer untuk perhitungan simbolik
- Alat authoring untuk membuat materi pembelajaran interaktif sebagai halaman web
- Tersedia dalam banyak bahasa untuk jutaan pengguna di seluruh dunia
- Perangkat lunak open source tersedia secara bebas untuk pengguna non-komersial

Di bawah ini kita dapat melihat Tampilan Grafik  dan Tampilan Aljabar  dari GeoGebra Klassic, yang merupakan salah satu dari Perspektif GeoGebra yang telah ditentukan sebelumnya,  Perspektif Graphing. Lihatlah antarmuka pengguna dan kenali fitur-fitur terpentingnya.

Baris Peralatan

Baris Ragam

Menu

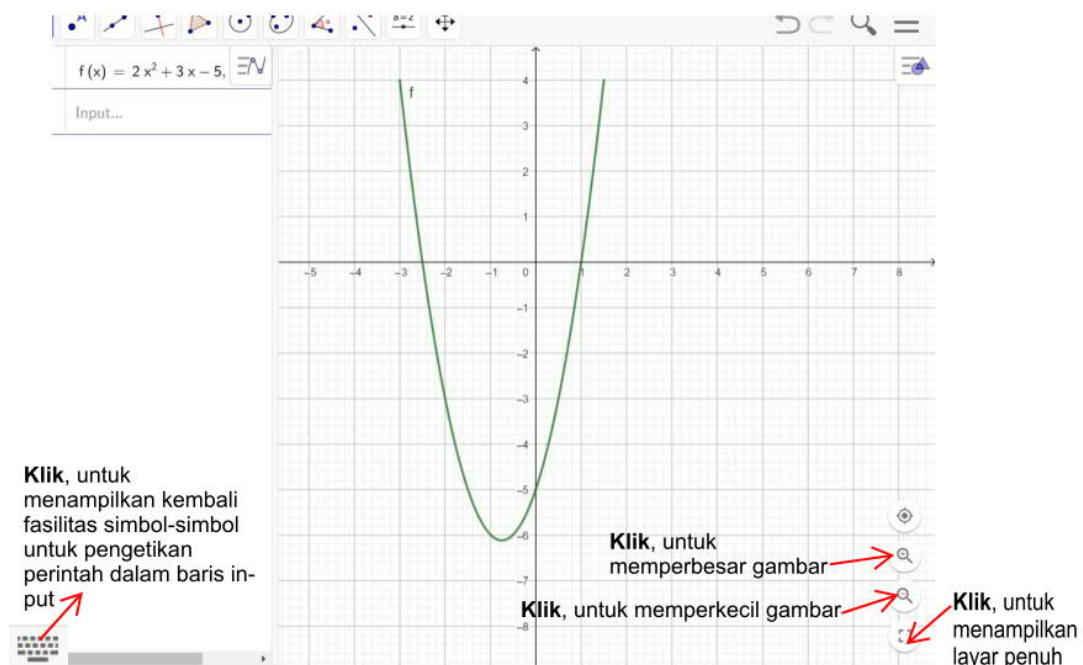
Undo/Redo

Perhatikan: Buka menu perspektif  menggunakan tombol menu  untuk memilih suatu perspektif yang berbeda (yaitu: Geometri , Spreadsheet , CAS , Grafik 3D , dan Probabilitas ).

Selanjutnya dibahas cara-cara membuat grafik dari suatu kurva.

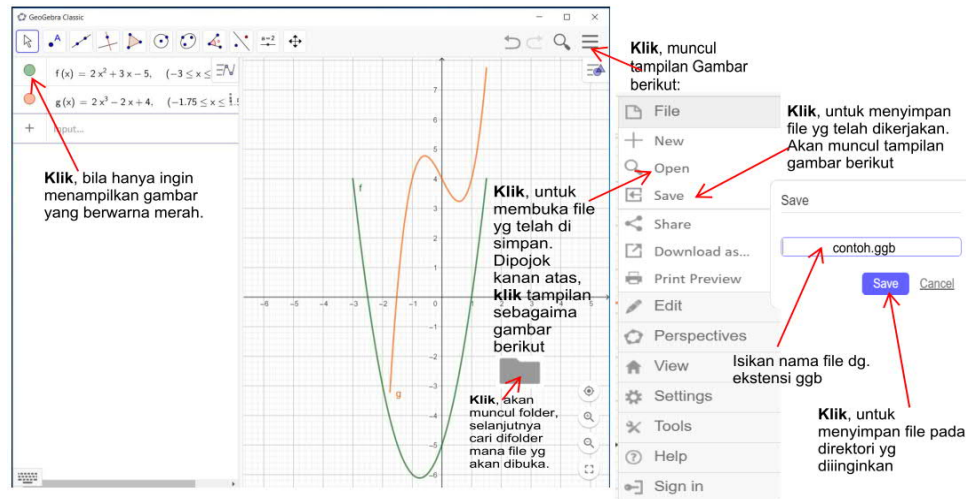
Berikut ini akan digambar grafik $2x^2 + 3x - 5$:

Pada fasilitas simbol berturut-turut klik : $2, x, \square^2, +, 3, x$ dan -5 . Perhatikan perubahan dalam media menampilkan akan menampilkan gambar saat memasukkan simbol-simbol, maka akan terjadi kedinamikan perubahan gambar sesuai dengan simbol-simbol yang telah diinputkan. Sehingga hasil akhir apa yang telah dilakukan diberikan oleh Gambar 2 dibawah ini.



Gambar 2 : $f(x) = 2x^2 + 3x - 5, -3 \leq x \leq 1.5$

Klik pada Baris Input yang menampilkan gambar, maka akan muncul tulisan : $f(x) = \text{if}(-3 \leq x \leq 1.5, 2x^2 + 3x - 5)$. Hal ini menjelaskan bahwa perintah pada baris input $\text{if}(-3 \leq x \leq 1.5, 2x^2 + 3x - 5)$ artinya membuat grafik $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ untuk nilai $-3 \leq x \leq 1.5$. Jadi bila akan menampilkan grafik $g(x) = 2x^3 - 2x + 4$ untuk nilai $-1.75 \leq x \leq 1.5$ perintahnya pada baris input baru ketik $g(x) = \text{if}(-1.75 \leq x \leq 1.5, 2x^3 - 2x + 4)$. Maka akan didapat gambar berikut.

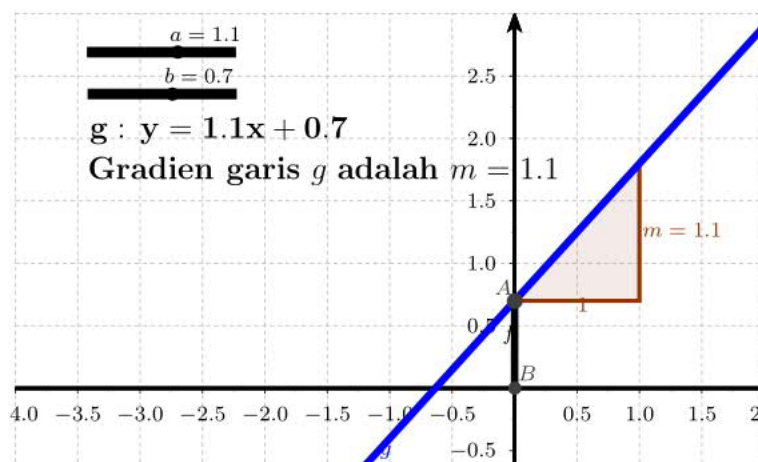


Gambar 3 : $g(x) = 2x^3 - 2x + 4$, $-1.75 \leq x \leq 1.5$

Persamaan garis parameter

Dalam bagian ini dibahas cara menampilkan garfik garis lurus $g: y = ax + b$ yang secara dinamis akan berubah sesuai dengan perubahan nilai-nilai parameter a dan b sebagaimana diberikan dalam tugas berikut. Selanjutnya dalam praktek ditunjukkan bagaimana membuat animasi dari garis tsb. untuk nilai a dan b yang berubah-ubah secara dinamis.

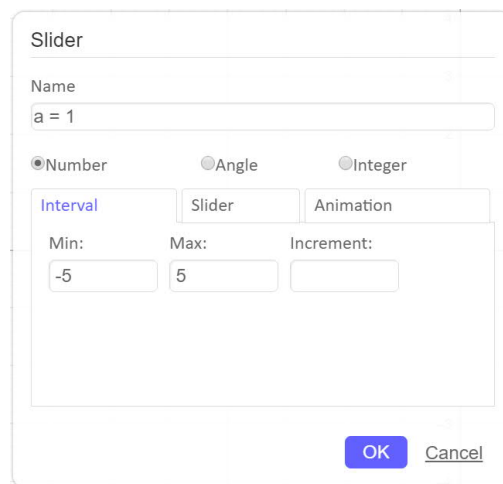
Tugas: Gunakan slider untuk secara dinamis mengubah parameter dari suatu persamaan linear,sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut.



Dalam bagian berikutnya diberikan beberapa contoh-contoh untuk memudahkan pembahasan selanjutnya. Contoh-contoh dimulai langkah-langkah pembuatan dan persiapan pembuatan serta penjelasannya.

Persiapan Pembuatan

1. Klik tanda gambar/ikon  akan kursor dalam media gambar yang tersedia dan klik sehingga didapat Gambar berikut.



Selanjutnya klik OK, dalam windows muncul gambar slider a . Ulangi lagi hal yang sama sehingga didapat gambar slider b . Tanda a dan b merupakan nilai-nilai parameter a dan b dalam garis yang akan dibuat yaitu $y = ax + b$.

2. Dalam baris Input ketik : $y = ax + b$ tekan Enter. Akan didapat suatu gambar garis.
3. Klik tampilan gambar/ikon berikut  lalu pilih/klik tampilan gambar berikut



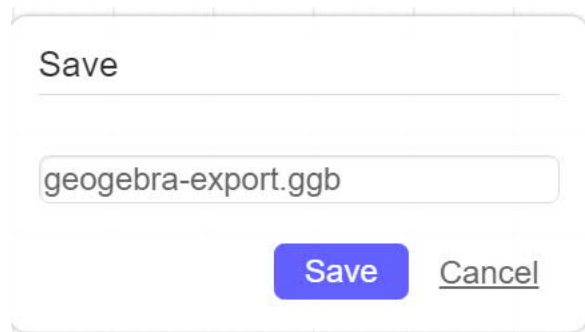
4. Klik obyek garis dan sumbu- y , sehingga didapat titik A.
5. Klik sumbu- x dan sumbu- y didapat titik B.
6. Klik tampilan gambar berikut ,  lalu pilih/klik tampilan gambar berikut dan klik gambar obyek garis. Maka akan didapat gambar gradient garis $y = ax + b$.



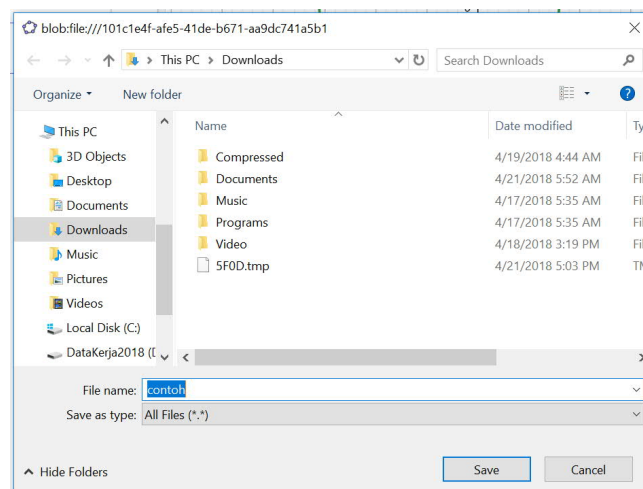
7. Untuk menampilkan teks Gradient garis g adalah $m = 1$ diterangkan dalam pelatihan.

Catatan bila slider a atau b digerakkan kekiri atau kekanan maka garis $y = ax + b$ akan berubah sesuai perubahan nilai a atau b . Selain itu animasi dari slider a atau b dapat dilakukan dengan mengklik tanda gambar berikut  dan untuk menghentikan animasi klik tanda berikut .

Diskusikan dan beri kesimpulan dari hasil aktifitas!. Untuk menyimpan aktifitas yang telah dibuat, klik tampilan gambar berikut , lalu pilih  Save . Akan muncul gambar berikut



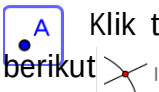
Selanjutnya ganti nama file geogebra-export.ggb dengan misalnya : contoh.ggb dan klik Save sehingga muncul gambar berikut.

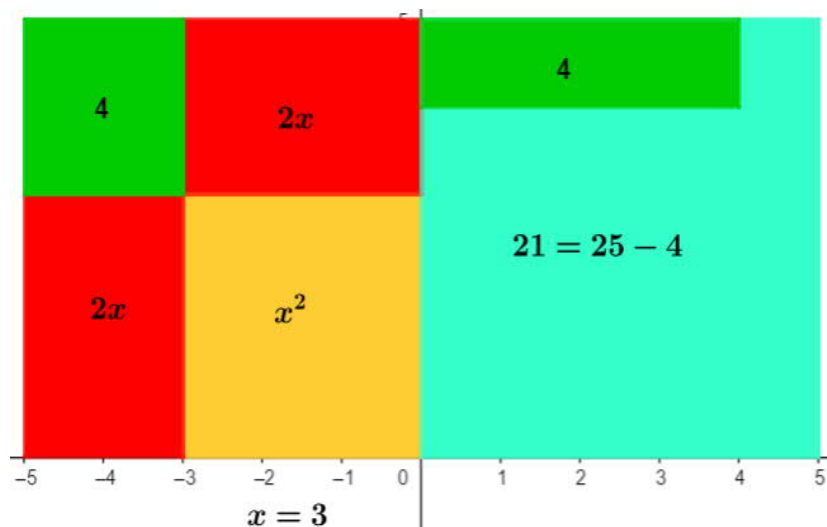


Pilih difolder mana file contoh.ggb akan disimpan, selanjutnya klik Save. Untuk membuka file yang telah disimpan klik tampilan gambar berikut , lalu klik/pilih tampilan gambar berikut  Open selanjutnya klik tampilan gambar folder  dan cari file ggb yang akan dibuka.

Latihan dan Diskusi

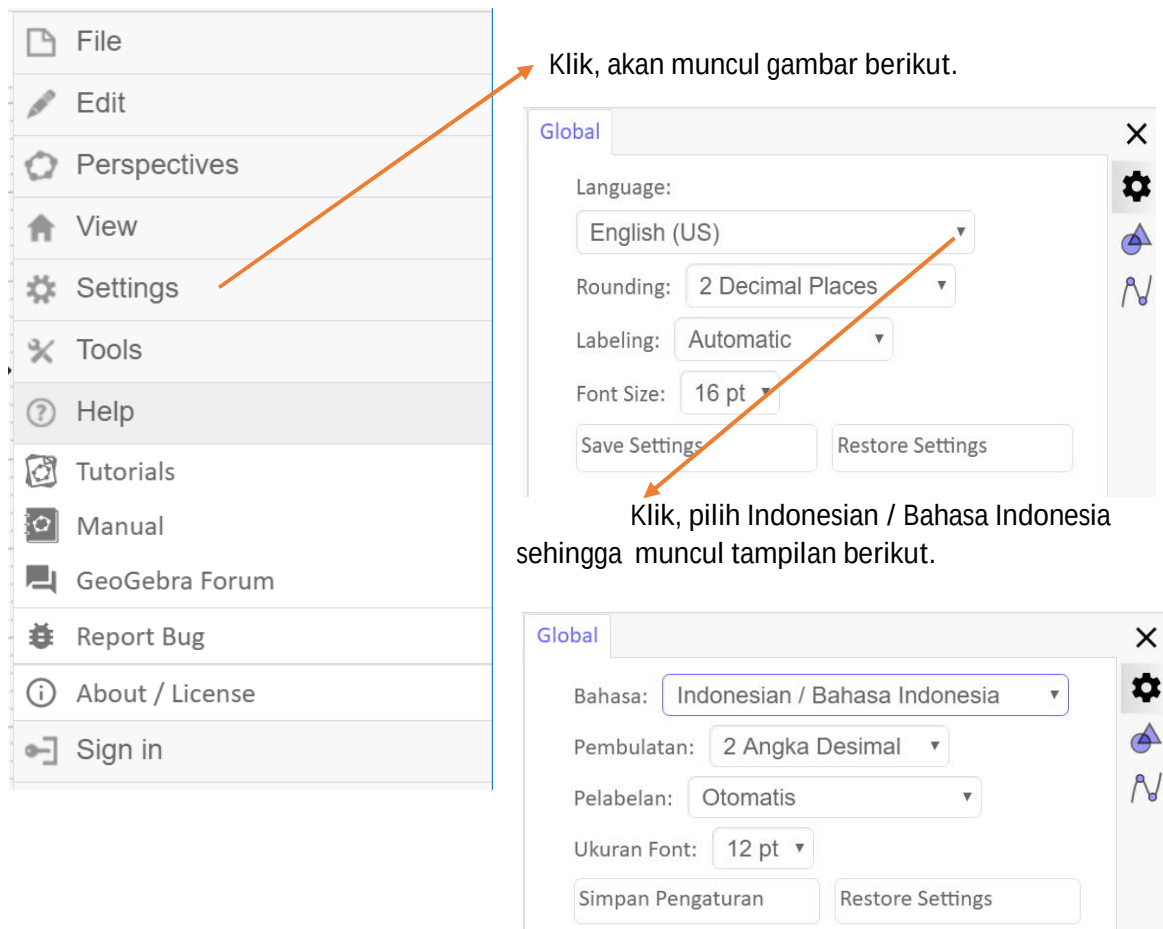
1. Lakukan aktifitas untuk menggambar parabola $y = ax^2 + bx + c$ dengan parameter a , b dan c sebagaimana yang telah dilakukan untuk menggambar garis $y = ax + b$.
2. Dalam baris input ketik perintah Circle((0,0),4) lalu tekan enter. Simpulkan apa hasil dari perintah tersebut.
3. Menggunakan hasil soal no 1. buat gambar lingkaran pusat di titik (2,3) dengan jari-jari 3.
4. Dalam baris input ketik perintah $x^2 + y^2 = 25$ lalu tekan enter. Simpulkan apa hasil dari perintah tersebut. Apa perbedaan dan kesamaannya dengan perintah pada soal no 1.

5. Menggunakan hasil soal no 3. buat gambar lingkaran pusat di titik (3,-2) dengan jari-jari 6.
6. Gambar grafik parabola $x^2 - 6x + 8$ pada nilai $-0.5 \leq x \leq 6.5$. Dari gambar yang diperoleh tentukan tiga titik potong parabola dengan sumbu-sumbu koordinat- xy dan juga nilai minimum dari parabola. Apakah hasilnya sama dengan pemahaman saudara tentang persamaan $y = x^2 - 6x + 8$ mengenai titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat- xy dan juga nilai minimum atau maksimum.
7. Gambar grafik parabola $(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 8$ pada nilai $0.5 \leq x \leq 7.5$. Dari gambar yang diperoleh bandingkan dengan gambar soal no 5. dan simpulkan mengapa nilai minimumnya tetap sama dengan nilai minimum soal no 5. Berikan penjelasan hubungan soal no 5. dengan soal no 6. ini mengenai titik potong parabola dengan sumbu- x .
8.  Klik tampilan gambar yang tersedia, lalu klik/pilih seperti tampilan gambar berikut. Selanjutnya dalam media gambar grafik berturut-turut klik sumbu- y dan grafik soal no 5. Juga hal yang sama klik sumbu- x dan grafik soal no 5. Akan menghasilkan titik potong grafik soal no 5. dengan sumbu koordinat- xy . Bandingkan hasil ini dengan apa yang dikerjakan dalam soal no 5.
9. Jangan tampilkan semua grafik yang telah ada pada media gambar grafik. Pada baris input yang baru/kosong berturut-turut buat gambar grafik x^3 di $-2 \leq x \leq 2$, $x^{\frac{1}{3}}$ di $-8 \leq x \leq 8$ dan grafik x di $-6 \leq x \leq 6$. Berikan penjelasan dari hasil gambar grafik mengapa grafik $y = x^3$ dan $y = x^{\frac{1}{3}}$ gambarnya simetri pada garis $y = x$.
10. Dari parabola $x^2 + 4x - 21$ gambar dan tentukan titik potong dengan sumbu- x . Selanjutnya untuk titik potong dengan nilai positif tafsirkan/diskusikan dengan gambar dibawah ini.



2.2 Mengubah Perintah ke Bahasa Indonesia

Pada bagian ini dibahas bagaimana cara mengubah perintah-perintah yang ada dalam Geogebra Klasik ke dalam Bahasa Indonesia. Klik tampilan tanda gambar , sehingga muncul tampilan gambar berikut.

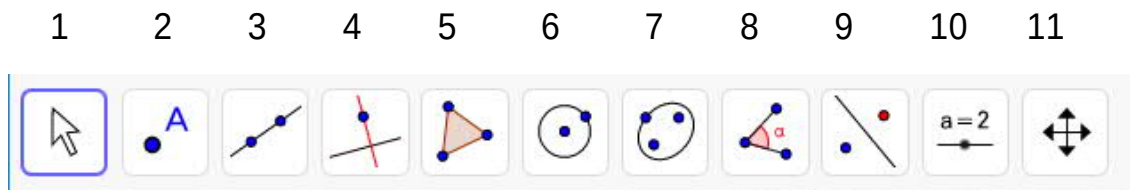


Selanjutnya berturut-turut klik “Simpan Pengaturan “ dan tanda silang × , maka perintah perintah dalam GeoGebra sudah dalam Bahasa Indonesia.

Akibat perubahan perintah dalam Bahasa Indonesia, maka perintah dalam baris input : Circle((0,0),4) menjadi Lingkaran((0,0),4). Coba lakukan hal ini dalam baris input.

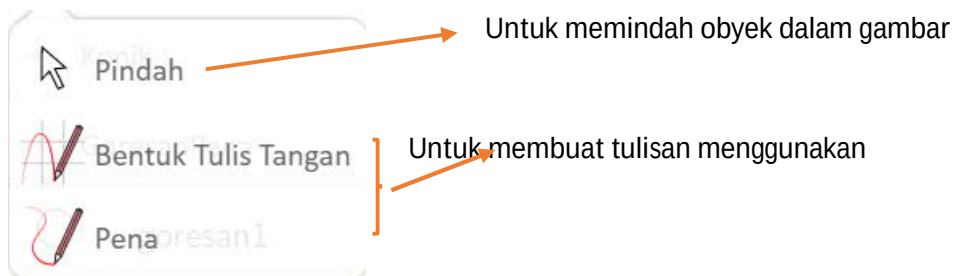
BAB III Baris/Bilah Peralatan

Baris Peralatan pada Geogebra Klasik sangat penting sebagai perintah-perintah yang berbentuk Icon, sehingga perintah-perintah yang disediakan tidak perlu dihafal tinggal diklik gambar icon yang tersedia. Yang dimaksud baris peralatan dalam GeoGebra klasik adalah tampilan sebagaimana gambar berikut:



Gambar : Baris/bilah Peralatan

Diatas baris peralatan sengaja ditambahkan nomer supaya memudahkan penyebutan dalam pembahasan berikutnya. Selanjutnya dibahas satu persatu mengenai baris peralatan. Bila baris Peralatan 1 diklik, muncul sebagaimana tampilan gambar berikut.

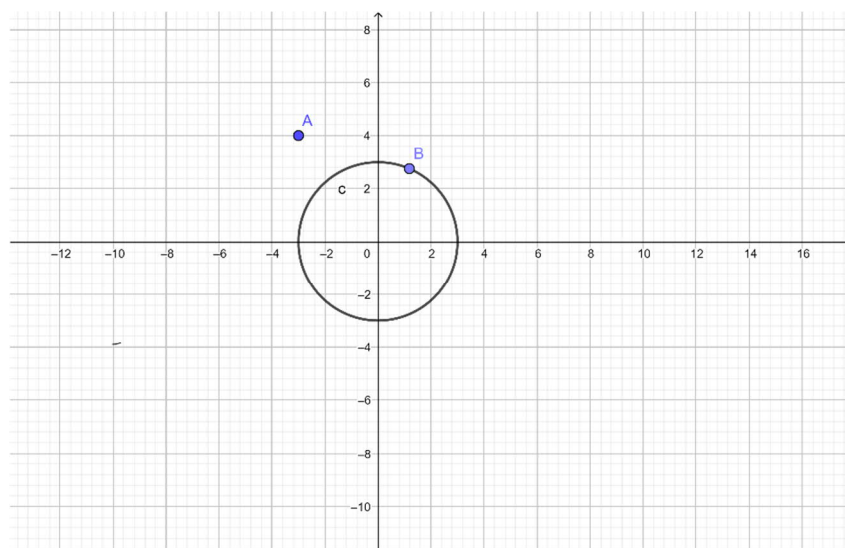


Tanda/ikon panah Pindah sangat sering digunakan terutama saat akan membuat perintah yang baru harus selalu didahului dengan mengklik ikon Pindah sebab bila tidak yang muncul perintah yang sebelumnya.

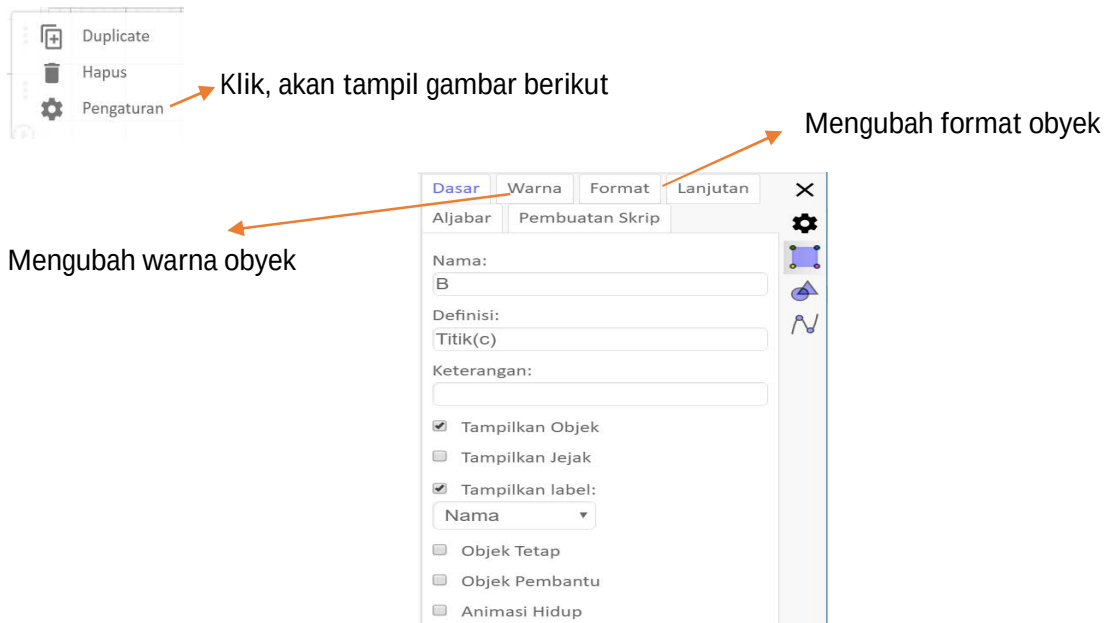
3.1 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 2

	Titik Baru	→	Membuat suatu titik
	Titik pada Objek	→	Membuat titik pada suatu obyek gambar
	Gunakan / Lepaskan Titik		
	Perpotongan Dua Objek	→	Menentukan titik potong dua obyek
	Titik Tengah atau Pusat	→	Menentukan titik tengah atau titik pusat
	Bilangan Kompleks	→	Membuat bilangan kompleks
	Extremum	→	Menentukan titik ekstrim suatu obyek bila ada
	Roots	→	Menentukan titik potong obyek grafik dengan sumbu-x bila ada.

Pada pembahasan ini dijelaskan perbedaan perintah Titik Baru dan Titik pada Objek dalam Baris Peralatan 2. Klik Titik Baru, letakkan kursor pada media gambar koordinat $(-3,4)$ dan klik, maka akan tergambar suatu titik A. Selanjutnya, dalam baris input baru ketik $\text{Lingkaran}((0,0),3)$. Dalam baris Peralatan 2, klik Titik pada Objek, letakkan kursor pada obyek gambar lingkaran dan klik, maka akan tergambar titik B pada lingkaran sebagai berikut:



Perhatikan titik A dan B dalam baris input yg diberikan oleh gambar berikut.



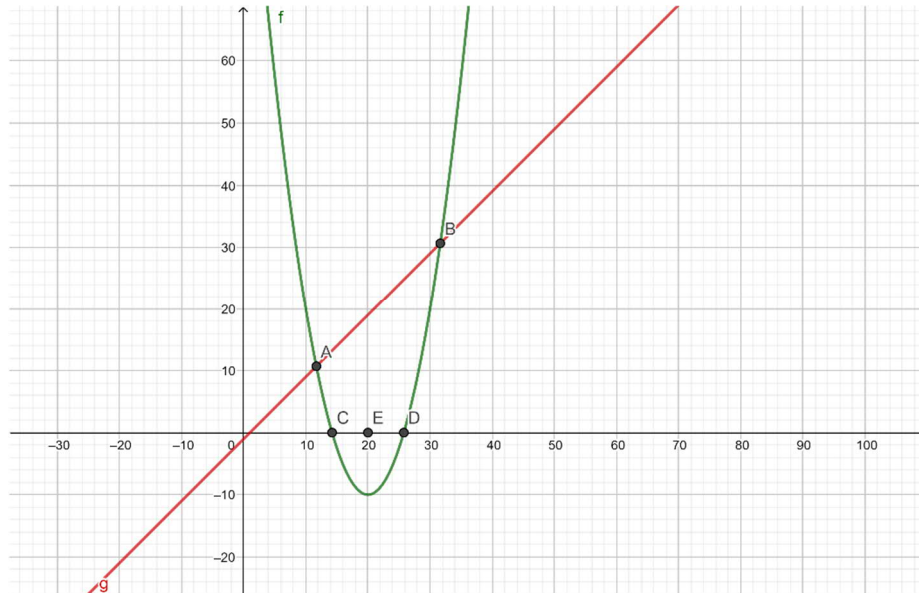
Centang box Animasi hidup untuk membuat animasi dari titik B bergerak sepanjang lintasan lingkaran. Jadi dari yang telah dibahas untuk membuat animasi titik B pada lingkaran c ada dua cara pertama dengan mengklik tombol animasi yang ada pada baris input dan akan berubah menjadi . Untuk menghentikan animasi titik B pada lingkaran c klik tombol animasi yang tersedia sehingga berubah ke bentuk tombol awal. Cara yang kedua dengan mencentang box Animasi hidup sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya.

Dari pembahasan ini terlihat perbedaan titik A dan B. Titik B dapat dilakukan animasi sehingga akan bergerak pada lintasan lingkaran c. Sedangkan titik A tidak ada fasilitas animasi. Tetapi keduanya dapat digerakkan secara manual menggunakan perintah Pindah dalam baris Peralatan 1.

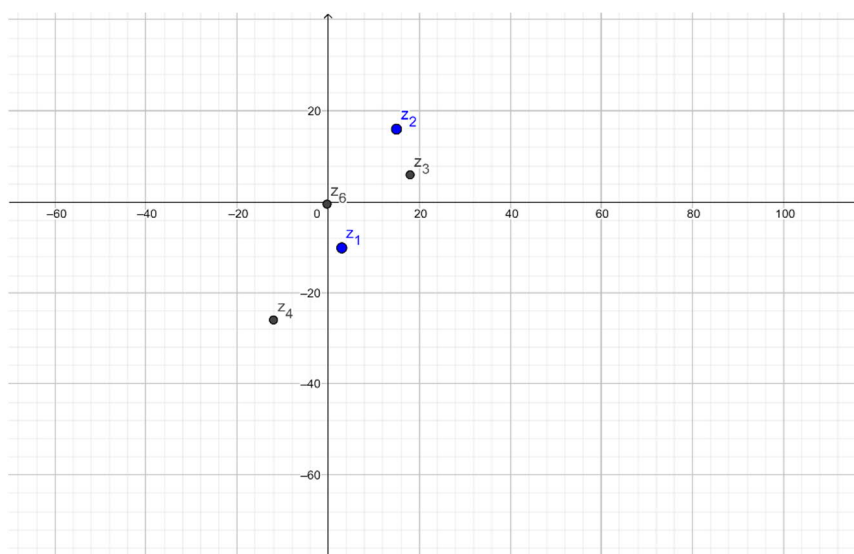
Pindahkan titik A menggunakan perintah Pindah dalam baris peralatan 1 hingga terletak pada lingkaran c di (0,3). Selanjutnya, lakukan animasi dari titik B sebagaimana yang telah dibahas dan amati pergerakan dari titik B pada lintasan lingkaran c. Apakah titik A juga ikut bergerak? Untuk mematikan animasi klik tanda animasi yg tersedia pada baris input titik B, klik tanda tsb. bila ingin lagi melakukan animasi titik B.

Selanjutnya dibahas perintah Perpotongan Dua Objek, Titik Tengah atau Pusat dan Bilangan Kompleks dalam baris Peralatan 2. Untuk hal ini dalam baris input ketik $\frac{3}{10}x^2 - 12x + 110$ dan pada baris input berikutnya ketik $x - 1$. Dalam baris Peralatan 2, klik Perpotongan Dua objek, lalu klik gambar obyek parabola $\frac{3}{10}x^2 - 12x + 110$ dan garis $x - 1$. Maka akan tergambar dua titik potong A dan B.

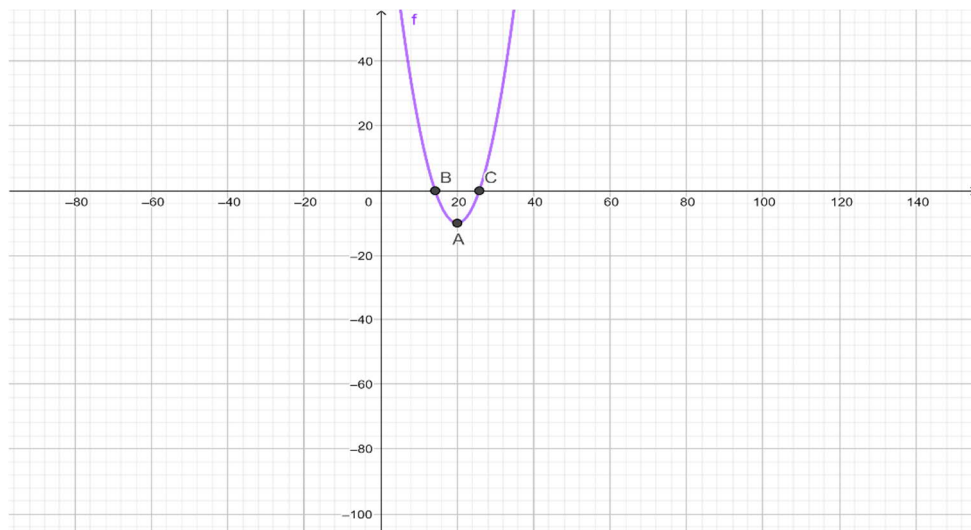
Selanjutnya klik perintah Perpotongan Dua Objek, dilanjutkan klik sumbu- x dan obyek grafik parabola $\frac{2}{10}x^2 - 12x + 110$, maka akan tergambar dua titik potong parabola dengan sumbu- x di titik C dan D. Berikutnya klik perintah Titik Tengan atau Pusat dalam baris Peralatan 2 dan dilanjutkan klik titik C dan D, maka akan tergambar titik tengah E diantara titik C dan D. Hasil pembahasan ini diberikan oleh gambar berikut:



Berikutnya menggambar bilangan kompleks. Klik perintah Bilangan Kompleks dalam baris Peralatan 2. Pada baris input ketik $3 - 10i$ dan pada baris input berikutnya ketik $15 + 16i$. Maka akan tergambar bilangan kompleks $z_1 = 3 - 10i$ dan $z_2 = 15 + 16i$. Pada dua bilangan kompleks ini dapat dilakukan operasi tambah, kurang, perkalian dan pembagian. Lakukan hal ini dengan mengetik pada baris input berturut-turut $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 * z_2$ dan $\frac{z_1}{z_2}$. Maka didapat hasil gambar bilangan kompleks z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 dan z_6 sebagai berikut (z_5 tidak terlihat di gambar sebab koordinat besar, tetapi bisa dilihat dengan menggerakkan kursor pada bidang gambar):



Selanjutnya dibahas perintah Ekstremum dan Roots dalam baris Peralatan 2. Pada baris input ketik parabola $\frac{3}{10}x^2 - 12x + 110$. Selanjutnya ada baris Peralatan 2, klik Ekstremum, lalu klik obyek gambar parabola. Maka akan didapat titik ekstrim A yaitu (20,-10). Berikutnya klik perintah Roots dalam baris Peralatan 2. Lalu klik obyek gambar parabola $\frac{3}{10}x^2 - 12x + 110$, maka akar tergambar titik B dan C yang merupakan dua titik potong parabola dengan sumbu-x. Berikut hasil gambarnya:



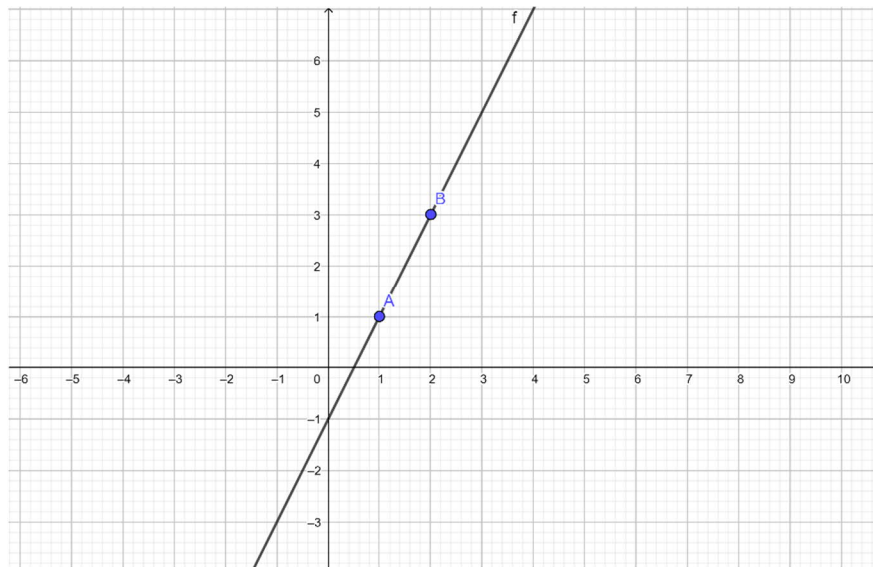
3.2 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 3

Pada bagian ini dibahas perintah-perintah dalam Baris Peralatan 3 yang diberikan oleh gambar berikut:

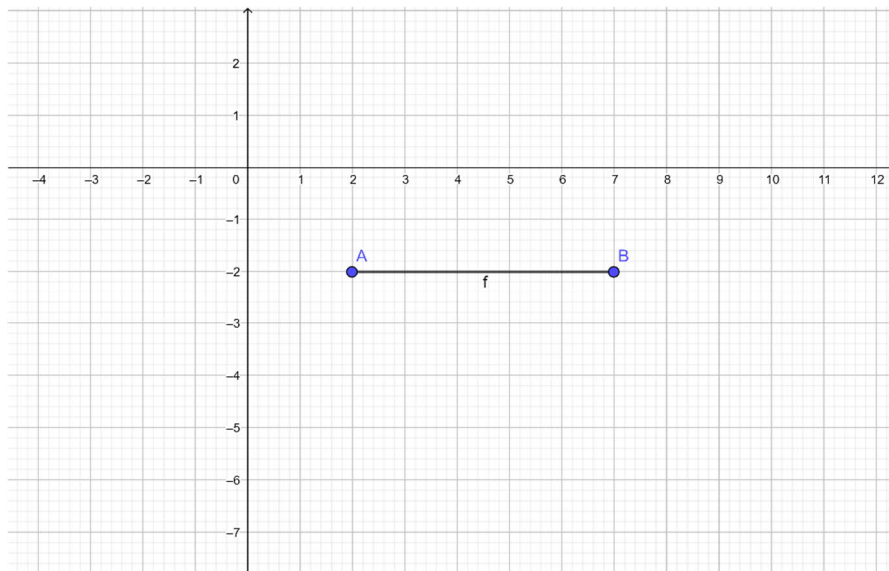


Klik, perintah Garis yang melalui Dua Titik pada Baris Peralatan 3 dan pindahkan kursor pada media grafik pada posisi koordinat (1,1) lalu klik dan pada koordinat (2,3) klik. Maka akan terbentuk

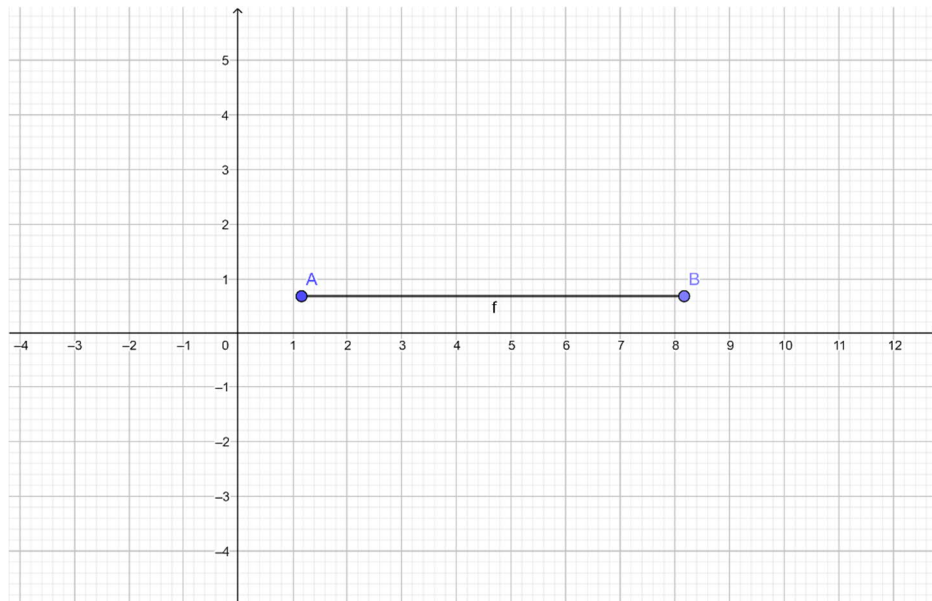
gambar persamaan garis melalui titik (1,1) dan (2,3) yaitu $-2x + y = -1$. Berikut ini hasil gambarnya:



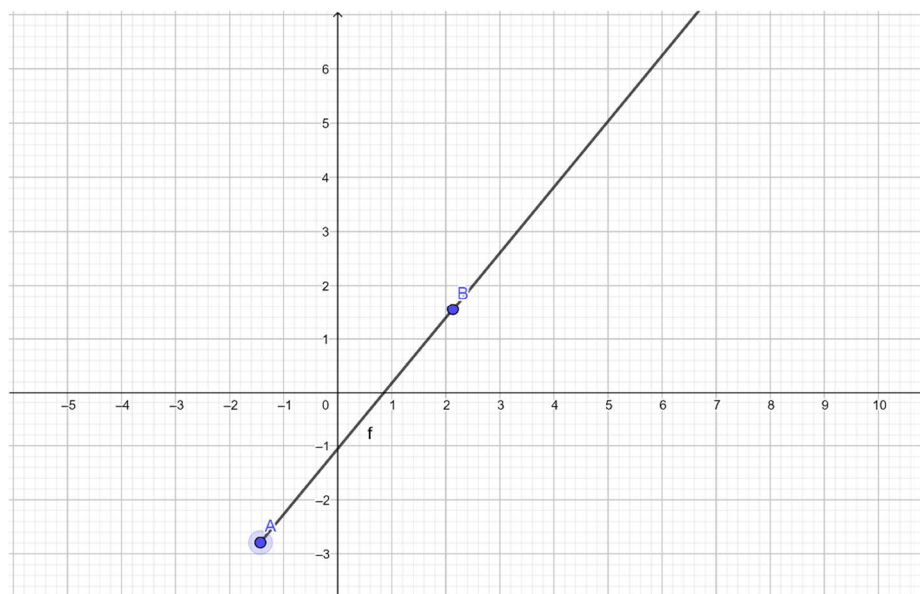
Selanjutnya klik pada Baris Peralatan 3, klik perintah Ruas Garis diantara Dua Titik dan pindahkan kursor pada media grafik pada posisi koordinat (2, -2) lalu klik dan gerakkan kursor pada posisi (7, -2), maka akan terbentuk ruas garis dari titik (2, -2) ke (7, -2) dengan panjang garis 5. Berikut ini gambarnya:



Berikutnya, pada Baris Peralatan 3 klik perintah Ruas Garis dengan Panjang Tetap dan pindahkan kursor pada media grafik lalu klik, dalam dialog yg ada isikan panjang 7. Maka akan tergambar ruas garis dengan panjang 7. Berikut ini hasil gambarnya:

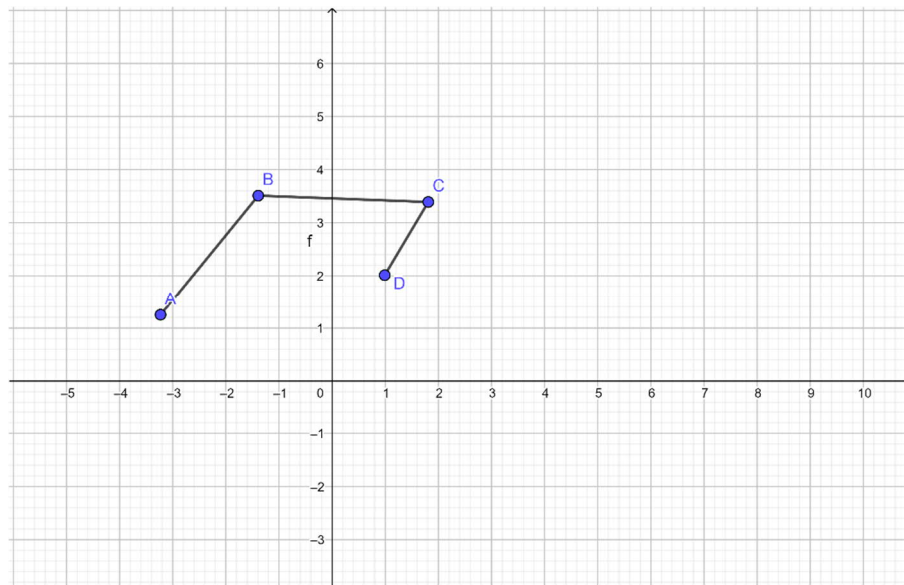


Klik perintah Sinar melalui Dua Titik pada Baris Peralatan 3, dan pindahkan kursor pada media grafik lalu klik dan gerakkan kursor dan klik. Maka akan tergambar garis yang melalui titik awal saat pengklikan pertama dan melalui titik pada saat pengklikan kedua. Berikut ini hasil gambarnya:

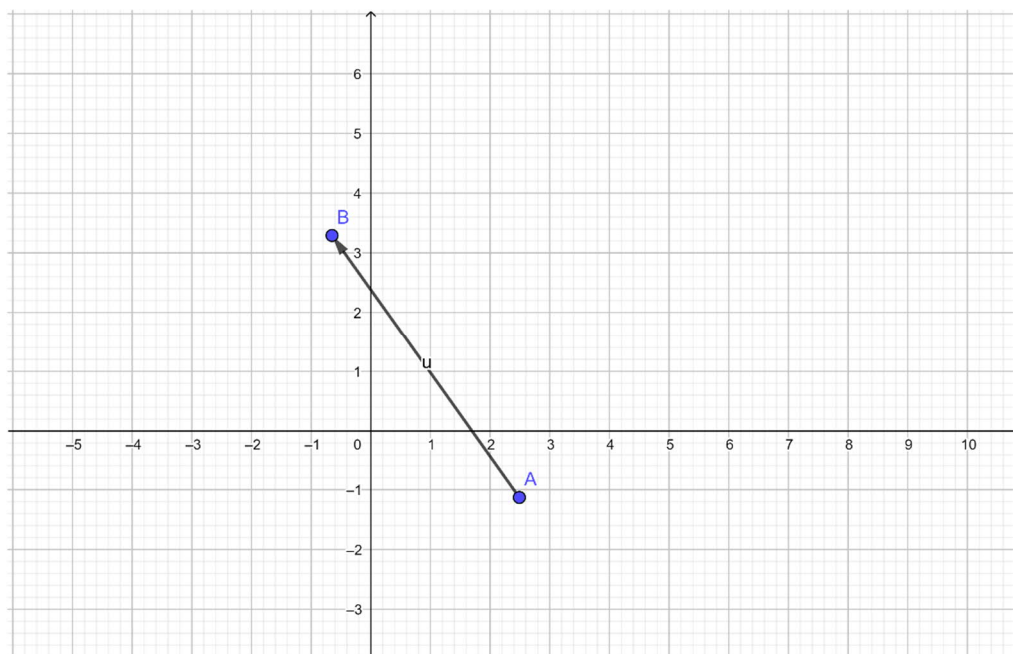


Selanjutnya, pada Baris Peralatan 3 klik perintah Garis Jamak diantara titik-titik dan pindahkan kursor pada media grafik lalu klik dan gerakan kursor sehingga terbentuk beberapa titik.

Selanjutnya arahkan kursor pada titik awal dan klik. Maka akan terbentuk beberapa ruas garis yang melalui beberapa titik yang terbentuk sebagaimana gambar berikut:



Klik perintah Vektor diantara Dua Titik pada Baris Peralatan 3, dan pindahkan kursor pada media grafik lalu klik dan gerakkan kursor dan klik. Maka akan tergambar garis berarah (vektor) yang melalu titik awal saat pengklikan pertama dan melalui titik pada saat pengklikan kedua. Berikut ini hasil gambarnya:



3.3 Perintah-perintah dalam Baris/bilah Peralatan 4

Pada bagian ini dibahas perintah-perintah dalam Baris Peralatan 4 yang diberikan oleh gambar berikut:



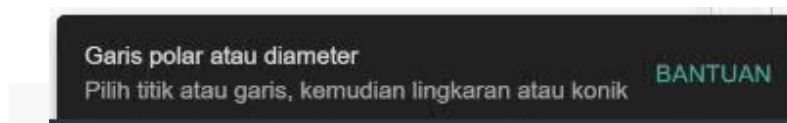
Untuk menjalankan perintah Garis Tegak lurus dalam Baris Peralatan 4. Pertama buat garis melalui dua titik dengan perintah Ruas Garis diantara Dua Titik dalam Baris Peralatan 3 sehingga didapat ruas garis dari titik A ke titik B . Selanjutnya dalam Baris Peralatan 4, klik perintah Garis Tegak Lurus, lalu letakkan kursor di media grafik dan klik sehingga didapat titik C . Berikutnya klik obyek garis AB . Maka didapat garis melalui C tegak lurus garis AB . Untuk menguji garis ini tegak lurus AB . Klik perintah Perpotongan dua Objek dilanjutkan berturut-turut klik obyek garis dan garis AB . Maka didapat titik potong dari garis dengan garis AB dititik D . Untuk menguji sudut BDA 90° klik perintah Sudut dalam Baris Peralatan 8. Selanjutnya berturut-turut klik titik B, D dan A maka akan menghasilkan besar sudut 90° .

Untuk membuat dua garis sejar, klik perintah Ruas Garis diantara Dua Titik pada Baris Peralatan 3 untuk membuat garis AB . Selanjutnya klik perintah Garis Sejajar pada Baris Peralatan 4 dan letakkan kursor pada media grafik lalu berturut-turut klik mouse dan obyek garis AB . Maka akan terbentuk garis sejajar dengan garis AB .

Buat perintah Ruas Garis diantara Dua Titik pada Baris Peralatan 3 untuk membuat garis AB , ulangi lagi perintah ini untuk membuat garis AC . Selanjutnya klik perintah Garis Bagi Sudut pada Baris Peralatan 4. Berikutnya berturut-turut klik titik C, A dan B . Maka akan terbentuk garis bagi sudut. Untuk mengetahui apa benar garis bagi ini membagi sudut CAB menjadi dua bagian sudut yang sama. Lakukan hal berikut, klik perintah Titik pada Objek pada Baris Peralatan 2 lalu klik obyek garis bagi. Maka terbentuk titik D . Selanjutnya klik perintah Sudut pada Baris Peralatan 8 dan berturut-turut klik titik C, A, D dan ulangi perintah ini untuk titik D, A, B . Maka akan terlihat besar sudu CAD sama dengan besar sudut DAB . Hal ini menunjukkan bahwa garis bagi tsb. memabgi sudut CAB menjadi dua bagian sudut yang sama

besarnya. Coba, gunakan perintah Pindah pada Baris Peralatan 1 dan gerakan titik C , maka besar sudut bagi akan berubah sesuai perubahan letak titik C tetapi kedua sudut bagi tsb, besarnya tetap sama. Berikutnya, klik perintah Garis Tengan Tegak Lurus pada Baris Peralatan 4, lalu berturut-turut klik titik A dan C . Maka akan terbentuk garis tengah tegak lurus garis AC . Klik perintah Perpotongan Dua Objek pada Baris Peralatan 2 dan berturut-turut klik obyek garis tengah tegak lurus dan garis AB . Maka terbentuk titik E . Klik perintah Titik pada Objek pada Baris Peralatan 2 lalu klik obyek garis tengah tegak lurus. Maka akan terbentuk titik F pada garis tengah tegak lurus tsb. Selanjutnya tunjukkan bahwa besar sudut CEF adalah 90° . Juga tunjukkan dengan perintah Ruas Garis diantara Dua Titik pada Baris Peralatan 3, panjang AE sama dengan panjang EC .

Selanjutnya dibahas perintah Garis singgung pada Baris Peralatan 4. Untuk ini dalam media grafik buat parabola $x^2 - 2x - 4$ dan titik $(2, -6)$. Lalu berurut-turut klik perintah Garis singgung dan obyek parabola $x^2 - 2x - 4$, maka akan terbentuk suatu garis singgung pada parabola yang melalui titik $A(2, -6)$. Untuk mengetahui titik singgung dengan parabola klik perintah Perpotongan dua Objek pada Baris Peralatan 2, dilanjutkan berurut-turut klik obyek parabola dan garis singgung. Maka akan terbentuk titik singgung $B(2, -4)$. Berikutnya, dibahas perintah Garis polar atau diameter pada Baris Peralatan 4. Perhatikan bahwa pada saat mengklik setiap perintah pada Baris Peralatan akan muncul bantuan yang menerangkan maksud dari perintah tersebut. Misalnya dalam hal ini diklik perintah Garis polar atau diameter pada Baris Peralatan 4. Maka akan muncul bantuan mengenai perintah tsb. sebagaimana ditampilkan oleh gambar berikut.



Dari gambar perintah Garis polar atau diameter terlihat bahwa perintah ini membutuhkan titik atau garis dan lingkaran atau konik. Pada pembahasan sebelumnya telah ada titik $A(2, -6)$. Selanjutnya dibutuhkan obyek suatu gambar lingkaran atau konik. Dalam hal ini dipilih obyek gambar suatu konik. Untuk menggambar obyek konik perintah-perintahnya ada dalam Baris Peralatan 7. Klik, perintah Ellips untuk membuat suatu ellips pada media grafik (lihat bantuan cara membuat Ellips). Selanjutnya klik perintah Garis polar atau diameter pada Baris Peralatan 4. Berikutnya berturut-turut klik titik $A(2, -6)$ dan ellips, maka akan terbentuk suatu obyek gambar garis polar.

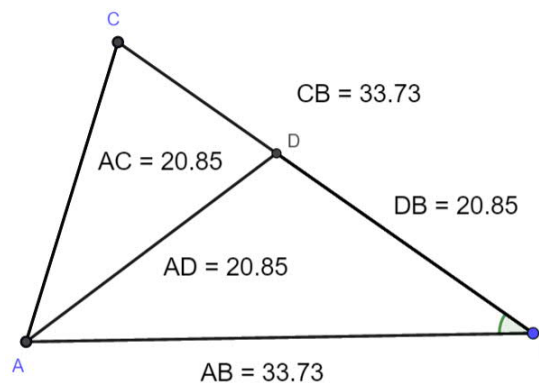
Latihan

1. Praktekkan semua perintah-perintah yang belum dibahas dalam beberapa Baris Peralatan yang tersedia.
2. Buat lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dan parabola $\frac{1}{4}x^2, -10 \leq x \leq 10$. Berturut-turut buat titik A pada lingkaran dan titik B pada parabola. Selanjutnya buat garis singgung pada lingkaran yang menyinggung titik A dan garis singgung pada parabola yang menyinggung titik B . Buat ruas garis CD pada garis singgung lingkaran begitu juga buat ruas garis EF pada garis singgung parabola. Lalu jangan tampilkan kedua garis singgung tersebut sehingga garis singgungnya hanya garis CD dan EF . Hidupkan

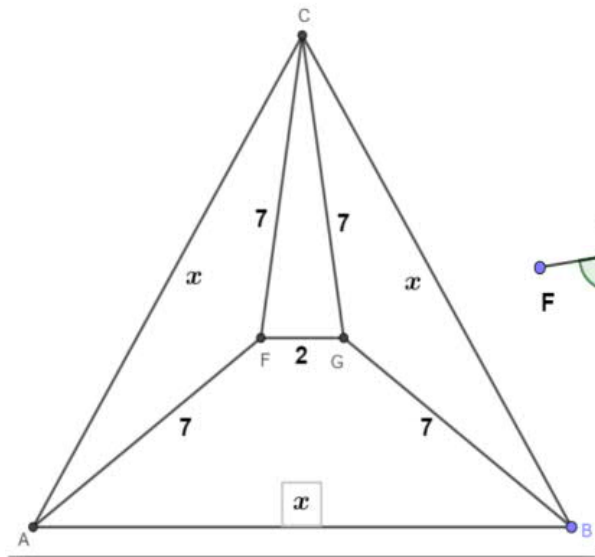
masing-masing animasi pada titik A dan B . Maka kedua garis singgung CD dan EF akan bergerak menyinggung masing-masing pada lintasan lingkaran dan parabola.

3. Pada media grafik buat parabola $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 2, -5 \leq x \leq 13$. Buat Ruas Garis dari titik $(-5,0)$ ke $(13,0)$. Buat titik A pada ruas garis tsb. Selanjutnya buat titik $B(x(A), f'(x(A)))$ dan klik perintah Lokus pada Baris Peralatan 4. Klik berturut-turut titik B dan A . Maka akan terbentuk garis lokus dari parabola yang melalui titik B . Perhatikan bahwa bila titik A digerakkan sepanjang interval $-5 \leq x \leq 13$, maka titik B bergerak pada lintasan lokus. Buat titik $C(x(A), f(x(A)))$. Hidupkan animasi untuk menggerakkan titik A . Diskusikan dari hasil animasi ini dan beri kesimpulan.
4. Membuat animasi pegas datar. Klik, perintah Luncuran pada Baris Peralatan 9. Klik media grafik dan isikan nama a , nilai minimum 0 dan maksimum 5 lalu klik tombol Oke. Ulangan hal ini dengan nama b nilai minimum 0 dan maksimum 5 lalu klik tombol Oke. Hal yang sama untuk luncuran dengan nama s , nilai minimum 0.1, maksimum 3 dan kenaikan 0.1 lalu klik tombol Oke. Juga untuk luncuran dengan nama n , klik Bilangan Bulat dan klik tombol Oke. Geser luncuran a pada posisi 0, b pada posisi 5, s pada posisi 0.6 dan n pada posisi 10. Pada Baris Input ketik $p = \frac{2\pi n}{b-a}$ (π adalah bilangan π fasilitas ini ada pada pegetikan simbol). Pada Baris Input berikutnya ketik $= -p a$. Lanjutkan, pada Baris Input berikutnya ketik Kurva($t, s \sin(pt + q), t, a, b$). Baris Input buat titik $(a, 0)$, $(b, 0)$ dan $(b + 0.5, 0)$. Klik perintah Lingkaran dengan pusat melalui Titik pada Baris Peralatan 6. Klik titik $(b + 0.5, 0)$ sebagai pusat dan klik titik $(b, 0)$. Maka terbentuk lingkaran dengan pusat $(b + 0.5, 0)$ melaui titik $(b, 0)$. Untuk mewarnai lingkaran, letakkan mouse pada obyek lingkaran klik mouse kanan, pilih Pengaturan, pilih Warna, klik warna merah, lalu Opasitas geser sampai nilai 100 klik tanda $\times$ (silang). Maka lingkaran akan berwarna merah. Untuk melalkukan animasi gerakan lingkaran akibat animasi pegas. Hidupkan tanda animasi untuk luncuran b , maka obyek lingkaran bergerak sesuai merapat dan merenggangnya pegas. Untuk mempercepat gerakan obyek pegas klik tanda $\gg$ samapai nilai berubah 4, untuk memperlambat klik tanda sebaliknya yaitu $\ll$. Selanjutnya gerakan secara manual untuk luncuran yang lainnya. Amati apa perubahan dari gerakan obyek pegas. Diskusikan hasil ini dan simpulkan terutama dikaitkan dengan masalah mekanika.
5. Membuat animasi pegas tegak. Klik, perintah Luncuran pada Baris Peralatan 9. Klik media grafik dan isikan nama a , nilai minimum 0 dan maksimum 5 lalu klik tombol Oke. Ulangan hal ini dengan nama b nilai minimum 0 dan maksimum 5 lalu klik tombol Oke. Hal yang sama untuk luncuran dengan nama s , nilai minimum 0.1, maksimum 3 dan kenaikan 0.1 lalu klik tombol Oke. Juga untuk luncuran dengan nama n , klik Bilangan Bulat dan klik tombol Oke. Geser luncuran a pada posisi 0, b pada posisi 5, s pada posisi 0.6 dan n pada posisi 10. Pada Baris Input ketik $p = \frac{2\pi n}{b-a}$ (π adalah bilangan π fasilitas ini ada pada pegetikan simbol). Pada Baris Input berikutnya ketik $= -p a$. Lanjutkan, pada Baris Input berikutnya ketik Kurva($s \sin(p t + q), -t, t, a, b$). Pada Baris Input buat titik $(0, -a)$, $(0, -b, 0)$ dan $(0, -b - 0.5)$. Klik perintah Lingkaran dengan pusat melalui Titik pada Baris Peralatan

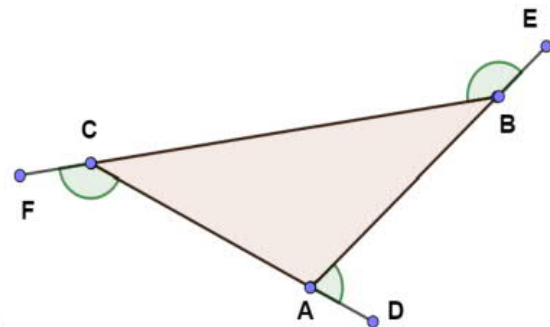
6. Klik titik $(0, -b - 0.5)$ sebagai pusat dan klik titik $(0, -b)$. Maka terbentuk lingkaran dengan pusat $(0, -b - 0.5)$ melalui titik $(0, -b)$. Untuk mewarnai lingkaran, letakkan mouse pada obyek lingkaran klik mouse kanan, pilih Pengaturan, pilih Warna, klik warna merah, lalu Opasitas geser sampai nilai 100 klik tanda $\times$ (silang). Maka lingkaran akan berwarna merah. Untuk melakukan animasi gerakan lingkaran akibat animasi pegas. Hidupkan tanda animasi untuk luncuran b , maka obyek lingkaran bergerak sesuai merapat dan merenggangnya pegas. Untuk mempercepat gerakan obyek pegas klik tanda $\gg$ samapai nilai berubah 4, untuk memperlambat klik tanda sebaliknya yaitu $\ll$. Selanjutnya gerakan secara manual untuk luncuran yang lainnya. Amati apa perubahan dari gerakan obyek pegas. Diskusikan hasil ini dan simpulkan terutama dikaitkan dengan masalah mekanika.
6. Buat parabola $x^2 - x - 12, -4 \leq x \leq 5$. Buat suatu titik A pada parabola tsb. Buat garis singgung pada parabola yang melalui titik A . Klik perintah Kemiringan pada Baris Peralatan 8 dan obyek garis singgung. Maka akan terbentuk gambar gradien/kemiringan garis singgung tsb. Hidupkan animasi pada titik A maka titik A akan bergerak dan tunjukkan bahwa nilai gradien garis singgung m terletak pada $-9 \leq m \leq 9$.



7. Buat gambar segi tiga ABC dalam media grafik sebagaimana diberikan oleh gambar diatas. Panjang garis AB sama dengan panjang garis BC . Titik D terletak pada garis BC sehingga panjang garis AD sama dengan panjang garis AC dan sama dengan panjang garis BD . Tunjukkan bahwa besar sudut CBA adalah 36° .
8. Segitiga ABC sama sisi dengan panjang sisi adalah x . Bila panjang : $AF = BG = GC = CF = 7$ dan panjang $FG = 2$. Tunjukkan bahwa x sama dengan 13 (lihat Gambar Soal no.8).

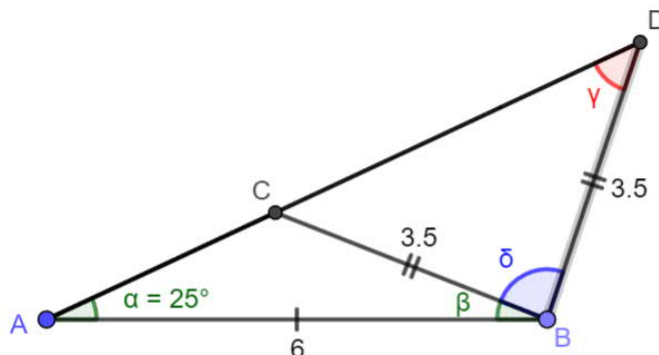


Gambar Soal no. 8



Gambar Soal no. 9

9. Dari Gambar Soal no.9. Tujukkan bahwa jumlah sudut $DAB + \text{sudut } EBC + \text{sudut } FCA$ sama dengan 360° .
10. Diberikan gambar berikut :

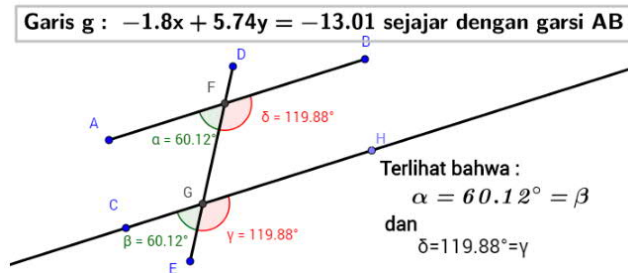


Berapa panjang garis AC dan berapa besar sudut β ? Selanjutnya tunjukkan bahwa $\gamma = \alpha + \beta$ dan tentukan berapa besar sudut δ . Petunjuk, gunakan bahwa nilai $\cos(\alpha) = \cos(25^\circ) = 0.91$.

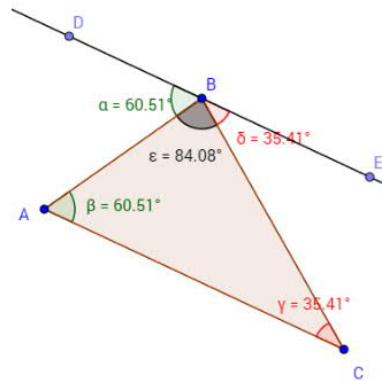
11. Masalah Program Linier. Ketik berturut turut dalam Baris Input sebagai konstrain/ pembatas $5x + 16y \leq 130, 17x + 3y \leq 185, x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Pada Baris Input berikutnya ketik $a \&\&b \&\&c \&\&d$. Klik bagian baris input untuk tidak menampilkan gambar konstrain. Maka akan tergambar daerah fisibel dari konstrain. Selanjutnya berturut-turut dalam Baris Input ketik $5x + 16y = 130, 17x + 3y = 185$. Selanjutnya tentukan titik potong dua grafik tersebut hasilnya adalah titik $A(10,5)$. Selanjutnya berturut-turut tentukan titik potong $5x + 16y = 130$ dengan sumbu- x , sumbu- x dengan sumbu- y dan $17x + 3y = 185$ dengan sumbu- y . Titik potong tersebut adalah titik B, C dan D . Titik potong A, B, C dan D adalah titik ekstrim pada daerah fisibel. Berikutnya, pada baris input ketik fungsi obyektif $P(x, y) = 10x + 19y$. Selanjutnya berturut-turut dalam Baris Input ketik : $P(A), P(B), P(C)$ dan $P(D)$.

Dari hasil ini, simpulkan dan diskusikan berapa nilai maksimum dari fungsi obyektif $P(x, y) = 10x + 19y$. Titik ekstrim mana yang merupakan titik ekstrim maksimum.

12. Buktikan aksiomatik dua garis sejajar : Bila dua garis AB dan CH sejajar dipotong oleh garis DE dengan titik potong masing-masing adalah F dan G (lihat gambar dibawah). Maka sudut-sudut yang berhadapan adalah sama, yaitu $\angle AFG = \angle CGE$ dan $\angle BFG = \angle HGE$. Untuk membuktikan hal ini, lakukan dalam media grafik untuk menggerakkan titik F ke G dengan mempertahankan garis AB tetap sejajar CH .



13. Buktikan jumlah sudut suatu segi tiga ABC adalah 180° . Selanjutnya lakukan hal ini dalam media grafik sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut.

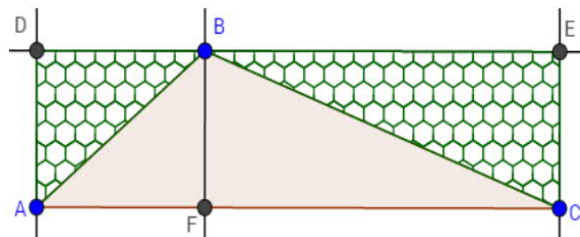


3.3.1 Luas Segi Tiga

Dalam bagian ini dibuktikan bahwa luas suatu segi tiga adalah $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$. Untuk membuktikan hal ini diberikan aksiomatik berikut.

Aksiomatik Persegi Panjang

Luas Persegi Panjang adalah : panjang $\times$ lebar.



Gambar : Luas $\triangle ABC$

Luas $\triangle ABC$ sebagaimana diberikan dalam Gambar diatas adalah $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$.

Bukti

Berdasarkan Aksiomatik dari Persegi Panjang maka luas persegi panjang $ACED$ adalah

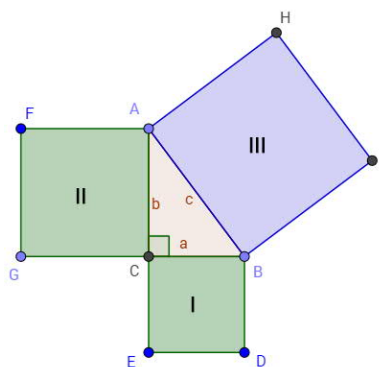
$$\begin{aligned}
 \text{Luas } ACED &= \text{panjang} \times \text{lebar} \\
 &= AC \times CE \\
 &= (AF + FC) \times (CE) \\
 &= AF \times CE + FC \times CE \\
 &= 2 \times \text{luas } \triangle AFB + 2 \times \text{luas } \triangle FCB \\
 &= 2 \times (\text{luas } \triangle AFB + \text{luas } \triangle FCB) \\
 &= 2 \times \text{luas } \triangle ABC.
 \end{aligned}$$

Sehingga didapat :

$$\begin{aligned}
 \text{luas } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \text{luas } ACED \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{panjang} \times \text{lebar} \\
 &= \frac{1}{2} \times AC \times CE \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{alas } \triangle ABC \times \text{tinggi } \triangle ABC.
 \end{aligned}$$

Latihan

Buat aktifitas dalam GeoGebra bila titik B pada Gambar : Luas $\triangle ABC$ bergerak sepanjang garis DE , maka luas segi tiga ABC adalah tetap. Selanjutnya tunjukkan bahwa rumus luas segi empat dan jajaran genjang adalah sama yaitu alas $\times$ tinggi, dimana alas = panjang dan tinggi = lebar.

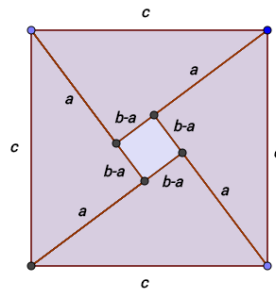


Gambar : Dalil Phytagoras

3.3.2 Membuktikan Dalil Phytagoras

Dalam Gambar : Dalil Phytagoras segitiga ABC adalah segitiga siku-siku dengan masing-masing sisi siku siku panjangnya a dan b , sedangkan panjang sisi miring adalah c . Maka $c^2 = a^2 + b^2$. Intepretasi geometri dalil Phytagoras adalah luas III merupakan

jumlah dari luas I dan luas II. Ada beberapa cara untuk membuktikan Dalil Pythagoras, dalam hal ini hanya dibuktikan dengan dua cara.

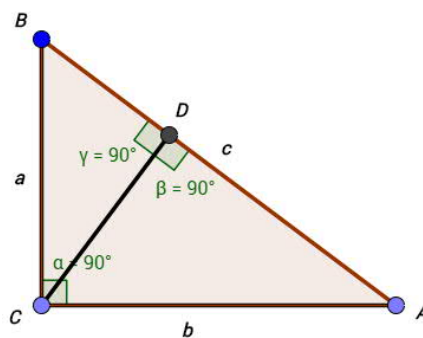


Gambar : Bukti Cara 1 Dalil Pythagoras

Bukti Cara 1 :

Dalam Gambar : Bukti Cara 1 Dalil Pythagoras, maka luas persegi adalah :

$$\begin{aligned} c^2 &= (b-a)^2 + 4 \frac{ab}{2} \\ &= b^2 - 2ab + a^2 + 2ab \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$



Gambar : Bukti Cara 2 Dalil Pythagoras

Bukti Cara 2 :

Dari Gambar : Bukti Cara 2 Dalil Pythagoras, maka segitiga ABC , BCD dan CAD adalah sebangun. Sehingga didapat :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AB \cdot BD = BC^2 \quad (1)$$

Dan

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AD = AC^2 \quad (2)$$

Tambahkan (1) dengan (2) didapat

$$\begin{aligned}
 AB \cdot BD + AB \cdot AD &= BC^2 + AC^2 \\
 AB(BD + AD) &= a^2 + b^2 \\
 AB \cdot AB &= a^2 + b^2 \\
 c^2 &= a^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

Latihan

Buktikan Dalil Phytagoras dengan empat cara lain yang berbeda dengan yang telah dibahas.

3.4 Bilah Ragam

Pada bagian ini dibahas bagaimana membuka Bila Ragam  dari suatu obyek. Bergantung pada alat atau objek yang saat ini dipilih, Bilah Ragam menyediakan opsi berbeda untuk mengubah warna, ukuran, label, atau ragam objek dalam konstruksi yang kita buat.

Buka Bilah Ragam  untuk objek tertentu dengan mengikuti langkah-langkah di bawah ini:

1. Pilih objek yang ingin kita ubah dalam Tampilan apa pun.
2. Klik tombol Bilah Ragam  di Tampilan Grafik.
3. Ubah properti objek kita menggunakan opsi yang disediakan di Bila Ragam.
4. Tutup Bilah Ragam atau pilih objek lain untuk mengubah propertinya juga.

Petunjuk:

- Kita dapat memilih lebih dari satu objek untuk mengubah propertinya secara bersamaan (misalnya. Warna, ukuran titik) dengan menekan tombol Ctrl sambil memilih objek yang diinginkan.
- Kita juga dapat membuka dialog Pengaturan  yang menawarkan lebih banyak opsi untuk memodifikasi objek.

Di GeoGebra, setiap objek memiliki nama unik yang dapat digunakan untuk memberi label objek di Tampilan Grafik. Selain itu, suatu objek juga dapat diberi label menggunakan nilainya atau nama dan nilainya. Kita dapat mengubah pengaturan label ini di Bilah Ragam .

- Pilih tombol Label .
- Pilih salah satu opsi yang disediakan Nama, Nilai atau Nama & Nilai dari menu tarik turun (*drop down menu*).

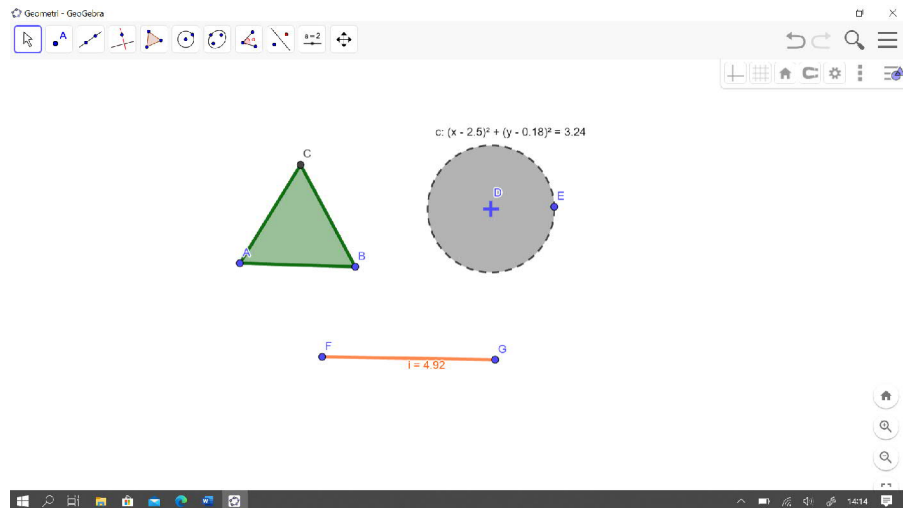
Catatan: Nilai suatu titik adalah koordinatnya, sedangkan nilai suatu fungsi adalah persamaannya.

Instruksi

1. Pilih satu titik dan buka Bilah Ragam . Tambah ukuran titik  dan ubah warnanya .

2. Pilih segmen, ubah ketebalan dan ragamnya , dan tampilkan labelnya .
3. Pilih lingkaran dan cari tahu cara mengubah transparansi dan warnanya.

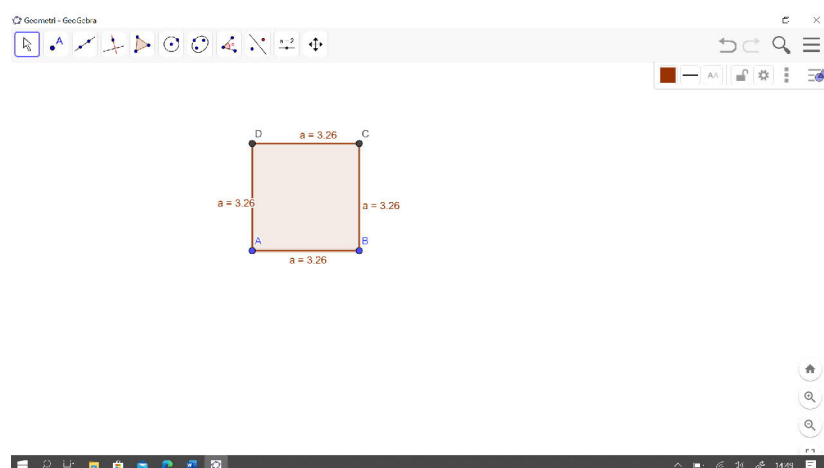
Kita ikuti instruksi dan hasilnya dicoba pada Perpektif Geometri  sebagaimana gambar berikut (ingat untuk mengaktifkan fasilitas Bilah Ragam  lebih dulu diklik obyek gambar yang dipilih):



Keterangan (Caption)

GeoGebra menawarkan keterangan untuk semua objek agar dapat memberi label beberapa objek dengan nama yang sama. Contoh: Jika kita ingin memberi label pada keempat tepi persegi dengan huruf yang sama a .

- Pilih objek yang Keteranganannya ingin kita ubah.
- Buka Bilah Ragam .
- Pilih tombol Pengaturan  untuk membuka Pengaturan dan pilih tab Dasar.
- Masukkan teks yang diinginkan ke dalam bidang teks yang disebut Teks.
- Aktifkan kotak centang Tampilkan Label dan pilih opsi Pelabelan keterangan dari menu drop down.
-



3.4.1 Cara membuka Bilah Ragam untuk Tampilan

Yang harus diperhatikan saat akan membuka Bilah Ragam untuk suatu tampilan adalah:

1. Pastikan tidak ada objek yang dipilih.
2. Klik tombol Bilah Ragam  di sudut kanan atas dari Tampilan GeoGebra untuk membuka Bilah Ragam pada Tampilan yang aktif.

Catatan: Setiap Tampilan menyediakan tombol dan opsi Bilah Ragam-nya sendiri, sebagaimana berikut ini:

Tampilan	Tombol
Tampilan Grafik	
Tampilan 3D	
Tampilan Aljabar	
Tampilan CAS	
Tampilan Spreadsheet	

3.4.2 Opsi Bilah Ragam untuk berbagai tampilan GeoGebra

Bilah Ragam Tampilan Grafik 

Gunakan Tombol Bilah Ragam  tampilan grafik untuk membuka Bilah Ragam Tampilan Grafik yang menyediakan opsi berikut:

-  Tampilkan/Sembunyikan Sumbu : Kita dapat menunjukkan atau menyembunyikan sumbu koordinat.
-  Tampilkan/Sembunyikan grid: Kita dapat menampilkan atau menyembunyikan grid (GeoGebra Desktop) atau memilih jenis grid mana yang akan ditampilkan (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).
-  Kembali ke Tampilan Default: Jika tampilan pada Tampilan Grafik telah diubah sebelumnya, tombol ini menetapkan asal sumbu koordinat kembali ke posisi default.
-  Mengubah Pengaturan Pengambilan Titik: Kita dapat memilih antara pengaturan Otomatis, Snap ke Grid, Fixed ke Grid, dan Off.
-  Buka Dialog Properti: Buka Dialog Properti untuk Tampilan Grafik atau objek yang dipilih (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).
-  Menyajikan Tampilan: Kita dapat menampilkan Tampilan tambahan di jendela GeoGebra (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet)

Bilah Ragam Tampilan Grafik 3D

Gunakan Tombol Bilah Ragam Tampilan Grafik 3D  untuk membuka Bilah Ragam Tampilan Grafik 3D yang menyediakan opsi berikut:

-  Tampilkan/Sembunyikan Sumbu : Kita dapat menunjukkan atau menyembunyikan sumbu koordinat, juga bidang xOy .
-  Tampilkan/Sembunyikan grid: Kita dapat menampilkan atau menyembunyikan grid dalam bidang xOy .
-  Kembali ke Tampilan Default: Kita dapat memindahkan sistem koordinat kembali ke tampilan default.
-  Mengubah Pengaturan Pengambilan Titik: Kita dapat memilih antara pengaturan Otomatis, Snap ke Grid, Fixed ke Grid, dan Off.
-  Mulai/Berhenti memutar Tampilan Secara Otomatis: Kita dapat memutar Tampilan Grafik 3D  secara otomatis dan dapat mengatur arah serta kecepatan rotasi.
-  Sesuaikan Arah Tampilan: Kita dapat memilih antara tampilan menuju bidang xOy , bidang xOz , bidang yOz , atau memutar kembali ke tampilan default.
-  Buka Dialog Properti: Buka Dialog Properti  untuk Tampilan Grafik 3D  atau objek yang dipilih (GeoGebra Web dan Aplikasi Tablet).
-  Menyajikan Tampilan: Kita dapat menyajikan Tampilan tambahan di jendela GeoGebra (Web GeoGebra dan Aplikasi Tablet).

Bilah Ragam Tampilan CAS

Bilah Ragam Tampilan CAS  letaknya berbeda dengan bilah tampilan yang lainnya. Bilah ini terletak di sebelah kiri atas pada tampilan input CAS. Untuk menampilkannya klik  dan akan tersedia pilihan berikut:

- ✓  Teks: Pilih tombol untuk mengubah Warna Teks dan atur gaya menjadi Tebal atau Miring.
- ✓  Pengaturan : Pilih tombol pengaturan dengan mencentang pilihan Tampilkan Pangkat Rasional sebagai Akar dan Batang Navigasi.
- ✓  Penyajian Tampilan: Kita dapat menampilkan Tampilan tambahan di jendela GeoGebra (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).
- ✓ Keyboard Virtual: Menampilkan keyboard virtual di jendela terpisah (GeoGebra Desktop). Untuk menampilkan Keyboard Virtual klik pada baris input CAS.

Bilah Ragam Tampilan Spreadsheet

Gunakan Tombol Bilah Ragam Tampilan Spreadsheet  untuk membuka Bilah Tampilan Spreadsheet dengan memberikan opsi berikut:

- ✓ Tampilkan Bilah Input : Beralih tombol ini menampilkan atau menyembunyikan Bilah Input di bagian atas Tampilan Spreadsheet  (GeoGebra Desktop).
- ✓  **B** Tebal: Atur ragam font menjadi tebal (bold).
- ✓  *I* Miring: Atur ragam font menjadi *miring/italic*.
- ✓ Penyelarasan Teks: Atur perataan teks ke Kiri , Tengah , atau Kanan .
- ✓  Warna Latar Belakang: Mengubah warna latar belakang sel.
- ✓  Perbatasan Sel: Mengubah gaya batas sel (GeoGebra Desktop)
- ✓  Dialog Properti: Buka Dialog Properti (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet)
- ✓  Penyajian Tampilan: Kita dapat menampilkan Tampilan tambahan di jendela GeoGebra (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).

3.4.3 Opsi Bilah Ragam untuk Alat dan Objek

Bergantung pada Alat atau objek yang ada yang Kita pilih, Bilah Gaya menawarkan pilihan tombol untuk mengubah properti berikut dari objek yang dipilih atau objek yang akan Anda buat menggunakan Alat yang dipilih:

-  ● Ragam Titik: Kita dapat memilih antara ragam titik yang berbeda (misalnya Titik ●, silang +, panah ▼, diamond ◆) dan mengatur ukuran titik.
-  — Ragam Garis: Kita dapat memilih antara ragam garis yang berbeda (misalnya, Putus-putus ---, titik-titik) dan mengatur ketebalan garis.
-   Warna Obyek: Kita dapat mengatur warna yang berbeda untuk objek yang dipilih.
-   Warna dan Transparansi Pengisian Objek: Kita dapat memilih warna dan transparansi pengisian untuk objek yang dipilih.
-  T Ragam Teks: Kita dapat mengatur Warna Teks, Warna Latar Belakang, Ragam Teks (tebal **B**, miring *I*), dan Ukuran Font untuk objek teks.
-  Pengaturan Pelabelan: Anda dapat memilih dari Pengaturan Pelabelan berikut:
 - Tersembunyi: Tidak ada label yang ditampilkan.
 - Nama: Hanya nama objek yang ditampilkan (misalnya, A).
 - Nama & Nilai: Nama dan nilai objek ditampilkan (misalnya, A = (1, 1)).
 - Nilai: Hanya nilai objek yang ditampilkan (mis. (1, 1)).
-  AA Keterangan (Caption): Kita dapat menampilkan keterangan yang berbeda dari nama atau nilai objek (misalnya, Jika kita ingin memberikan beberapa objek label yang sama) dan dapat ditentukan dalam Dialog Properti .
-   Posisi Absolut di Layar: Kita dapat memperbaiki objek (misalnya, Kotak teks) di layar sehingga tidak terpengaruh dengan memindahkan tampilan grafik (3D) atau memperbesar (GeoGebra Desktop).
-  Dialog Properti: Membuka Dialog Properti . (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).
-  Penyajian Tampilan: Kita dapat menyajikan Tampilan tambahan di jendela GeoGebra (Aplikasi GeoGebra Web dan Tablet).

3.5 Pengaturan

Pengaturan ⚙ memungkinkan kita untuk mengubah pengaturan objek (misalnya, Ukuran, warna, pengisian, gaya garis, ketebalan garis, visibilitas) serta mengotomatiskan beberapa tindakan objek menggunakan Javascript atau GeoGebra Script.

3.5.1 Cara menemukan Pengaturan

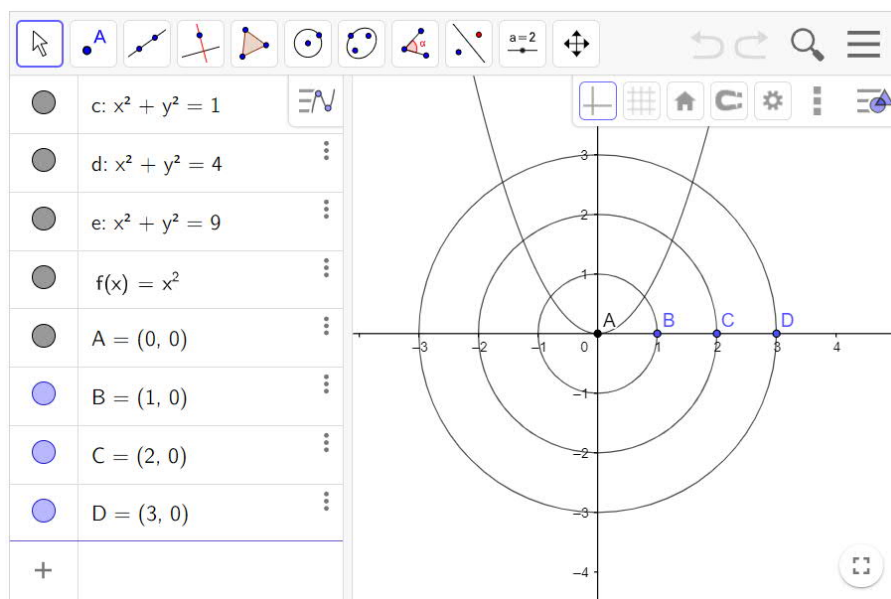
Kita dapat membuka Pengaturan dengan beberapa cara:

- ❖ Pilih Pengaturan ⚙ dari Menu Edit ✎ dan menu ☰.
- ❖ Klik kanan (Mac OS: Ctrl-klik) pada objek dan pilih Pengaturan ⚙ dari Menu Konteks yang muncul.
- ❖ Pilih tombol Pengaturan ⚙ dari Bilah Ragam.

3.5.2 Tugas

- 1) Klik kanan (MacOS: Ctrl-klik) titik A di Tampilan Grafik atau di Tampilan Aljabar dan pilih Pengaturan ⚙ dari Menu Konteks yang muncul. Jelajahi tab yang tersedia untuk titik yang tersedia.
- 2) Klik kanan (MacOS: Ctrl-klik) objek yang berbeda di Tampilan Grafik atau di Tampilan Aljabar dan pilih Pengaturan ⚙ dari Menu Konteks yang muncul. Jelajahi tab yang tersedia untuk berbagai jenis objek.
- 3) Pilih beberapa objek untuk mengubah pengaturan tertentu untuk semuanya secara bersamaan.
Petunjuk: Tahan tombol Ctrl (MacOS: Cmd-key) ditekan dan pilih semua objek yang diinginkan.
- 4) Perlihatkan nilai berbagai objek dan cobalah berbagai ragam label.
- 5) Ubah pengaturan default objek tertentu (misalnya, Warna, ragam, ...).

Silahkan dicoba sebagaimana gambar berikut:



3.6 Kiat dan trik untuk Input Aljabar

Konfirmasikan suatu ekspresi

Selalu konfirmasikan ekspresi yang kita masukkan ke Input Bar dengan menekan Enter.

Beri nama objek baru

Masukkan nama di depan representasi aljabar untuk menentukan nama spesifik untuk objek baru.

Contoh: $P = (3,4)$ membuat titik P.

Tunjukkan multiplikasi/perkalian

Perkalian harus dimasukkan menggunakan tanda bintang atau spasi di antara faktor-faktor tersebut.

Contoh: Ketik salah satu $a * x$ atau $a x$ untuk menunjukkan perkalian.

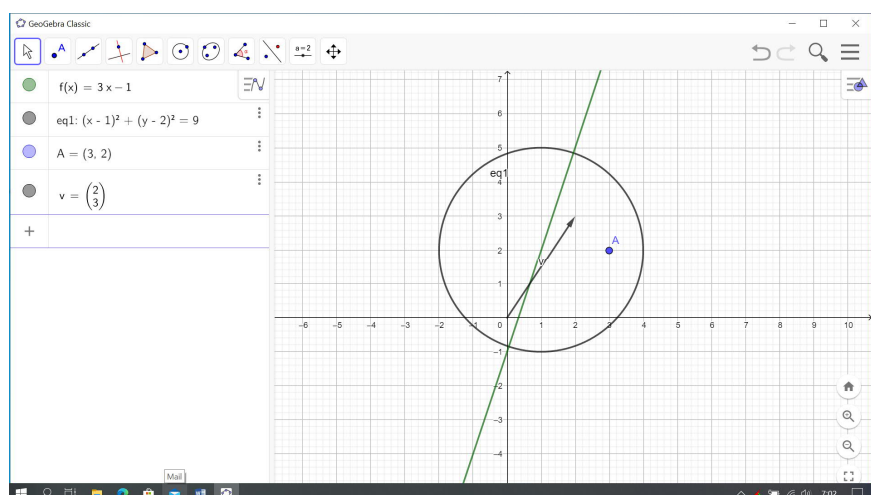
Huruf besar dan kecil

GeoGebra peka terhadap huruf besar atau kecil! Jadi, huruf besar dan kecil tidak boleh dicampuradukkan.

Catatan:

- Titik selalu dinamai dengan huruf besar.
Contoh: $A = (1,2)$
- Vektor dinamai dengan huruf kecil.
Contoh: $v = (4,5)$
- Segmen, garis, lingkaran, fungsi ... selalu dinamai dengan huruf kecil.
Contoh: lingkaran : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- Variabel x dalam suatu fungsi dan variabel x dan y dalam persamaan irisan kerucut selalu harus huruf kecil.
Contoh: $f(x) = 3 * x - 1$

Silahkan dicoba sebagaimana gambar berikut:



Gunakan objek dalam ekspresi aljabar

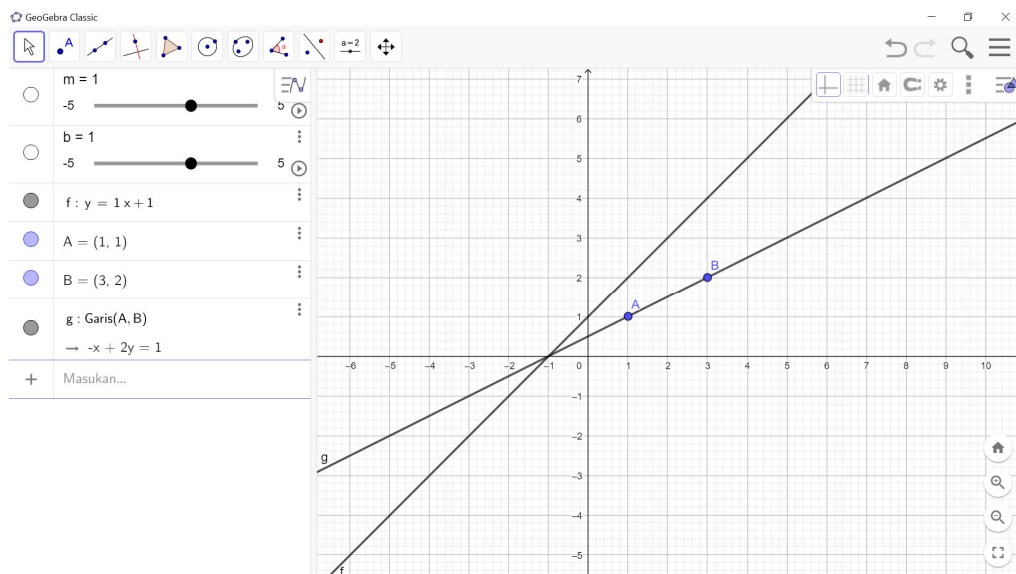
Jika kita ingin menggunakan objek dalam ekspresi atau perintah aljabar, kita harus membuat objek sebelum menggunakan namanya di Bilah Input.

Catatan: Namun, jika kita menggunakan parameter baru dalam input aljabar, GeoGebra akan secara otomatis membuat slider yang sesuai setelah menekan tombol Enter.

Contoh:

1. Input $y = m * x + b$ membuat garis yang parameternya adalah nilai m dan b (misalnya, angka/sliders).
Catatan: Jika parameter m dan b belum ada, GeoGebra akan secara otomatis membuat slider untuk kita setelah menekan Enter.
2. Input $\text{Garis}(A, B)$ membuat garis melalui titik A dan B yang ada.

Silahkan hal ini dicoba sebagaimana ditampilkan gambar berikut:



Pesan kesalahan

Selalu baca pesan kesalahan, hal ini bisa membantu kita untuk memperbaiki masalah!

3.7 Mengganti nama objek

Kita dapat mengubah nama objek dengan cara berikut:

- Untuk mengganti nama objek dengan cepat, pilih alat Pindahkan  lalu objek. Mulai ketikkan nama baru pada keyboard yang membuka dialog Ubah nama dan pilih OK setelah selesai.
- Buka Pengaturan  objek menggunakan Bilah Ragam, dan ketik nama baru di kotak Nama tab Dasar.

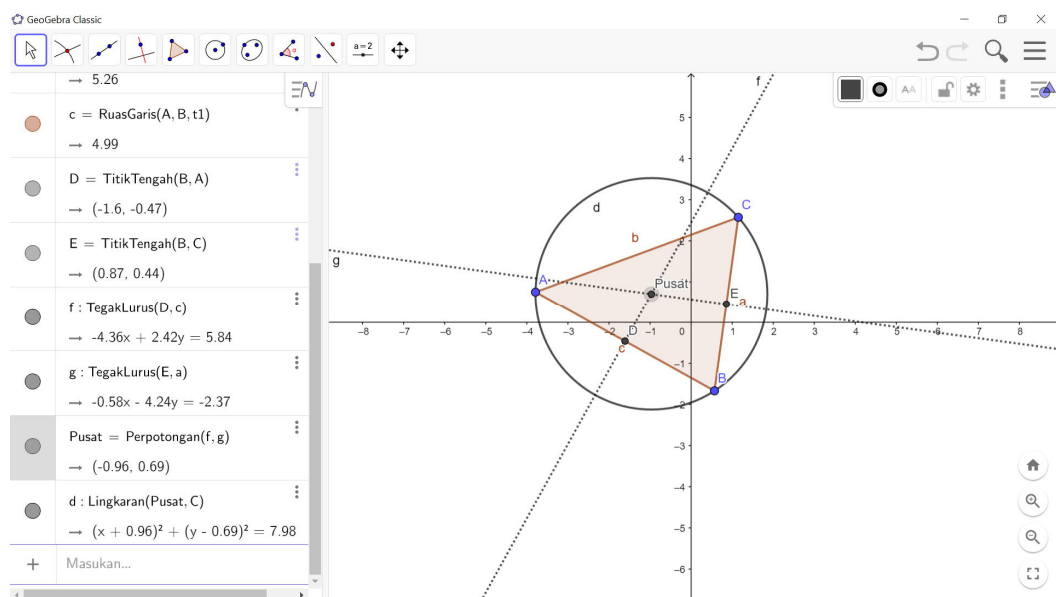
- Klik kanan pada objek (MacOS: Ctrl-klik, tablet: ketuk panjang), lalu pilih opsi Ubah nama di Menu Konteks yang muncul.

Instruksi

Penggantian nama cepat

1. Aktifkan alat Pindahkan  dan pilih titik F lalu klik kanan.
2. Gambar Toolbar Mulai  untuk membuka dialog Ganti nama ketikkan nama baru Pusat pada keyboard.
3. Pilih OK untuk menerapkan perubahan kita dan ganti nama yang ada.

Silahkan dicoba sebagaimana gambar berikut:



Instruksi (Lanjutan)

Pengaturan (Silahkan lanjutannya dicoba)

1. Aktifkan alat Pindahkan  dan pilih/klik obyek lingkaran.
2. Buka Pengaturan  objek yang dipilih menggunakan Bilah Ragam .
3. Pada tab Dasar, masukkan LingkaranLuar nama baru di kotak Nama.
4. Tutup Pengaturan .

Menu Konteks (Silahkan lanjutannya dicoba)

1. Aktifkan alat Pindahkan  dan klik kanan obyek segitiga.
2. Gambar Toolbar Mulai  untuk membuka dialog Ganti nama ketikkan nama baru SegiTiga pada keyboard.
3. Pilih OK untuk menerapkan perubahan kita dan ganti nama yang ada.

Petunjuk

Jika nama yang kita tetapkan untuk suatu objek sudah digunakan oleh objek lain, nama objek terakhir ini akan diubah.

Dalam konstruksi di atas, ubah nama titik B menjadi A .

Catatan: Karena titik A sudah ada, titik ini akan diganti namanya menjadi A_1 .

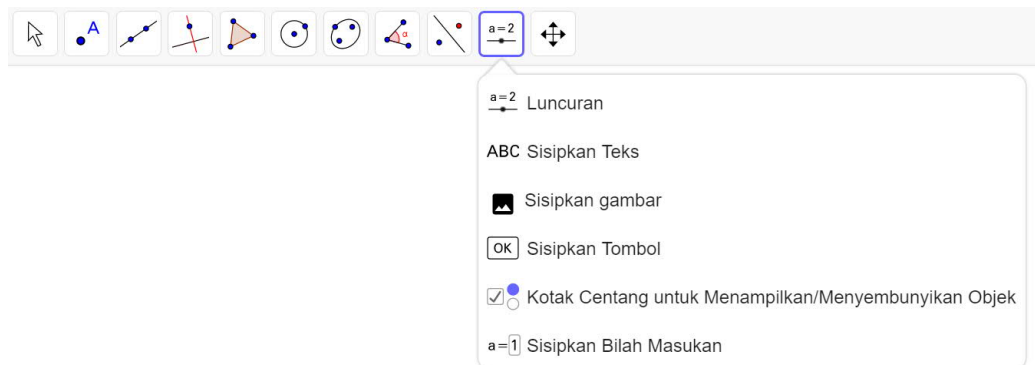
GeoGebra biasanya secara otomatis menyelesaikan dependensi. Ini berarti bahwa nama objek juga diubah dalam definisinya.

Catatan: Scripting yang melibatkan objek yang diberi nama baru perlu diubah secara manual.

3.8 Memasukkan teks statis

Alat teks

Alat Teks ABC memungkinkan kita untuk memasukkan teks ke dalam Tampilan Grafik . Kita dapat menemukan alat Teks ABC di Toolbox Alat Objek Khusus (lihat gambar berikut:)



Pilih alat Teks ABC dan klik di Tampilan Grafik  untuk menentukan posisi sudut kiri bawah teks. Kemudian, masukkan teks yang diinginkan di jendela dialog teks yang muncul. Klik OK setelah kita selesai mengetik teks yang kita inginkan.

Dialog Teks

Dialog Teks memungkinkan kita untuk...

- memasukkan teks yang diinginkan dan ubah formatnya
- memasukkan formula LaTeX.

Pilih Lanjutan (Advanced) untuk mendapatkan opsi tambahan untuk teks kita:

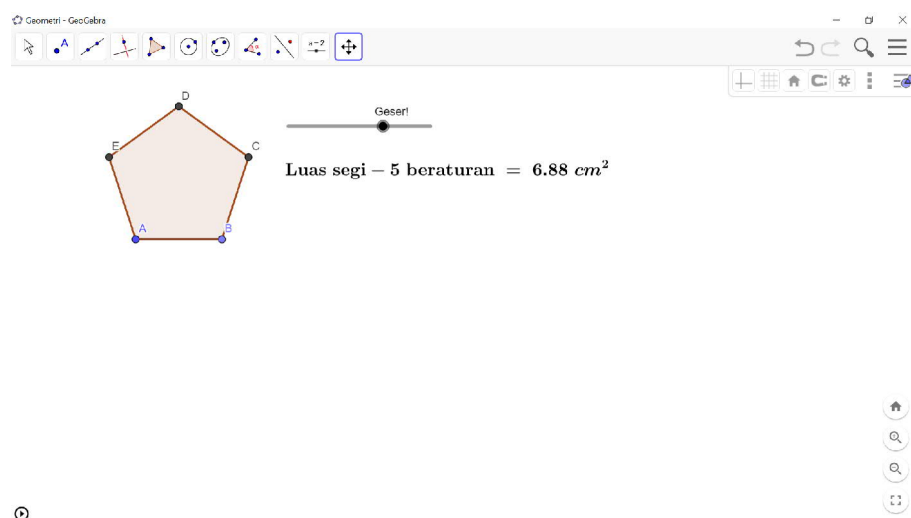
- ✓ Pratinjau: Menampilkan preview teks kita.
- ✓ Objek : Menyediakan daftar objek yang tersedia untuk membuat teks dinamis.
- ✓ $\alpha\beta\gamma$: Menyediakan huruf Yunani, simbol matematika, dan karakter khusus untuk digunakan dalam teks kita.
- ✓ Formula LaTeX: Menyediakan sintaks untuk pilihan formula LaTeX.

Cara memasukkan teks statis

Teks statis selalu tetap sama dan tidak merujuk ke objek GeoGebra apa pun yang digunakan dalam konstruksi.

1. Pilih alat Teks  dan klik di bagian atas Tampilan Grafik .
2. Masukkan Jelajahi Area Kotak ke dalam bidang teks.
Petunjuk: Kita dapat mengubah format teks menggunakan tombol yang disediakan di atas bidang teks.
3. Klik Lanjutan untuk melihat Pratinjau teks kita.
4. Klik OK setelah kita selesai.
5. Memindahkan  teks ke posisi yang diinginkan.
6. Kita dapat mengubah format teks menggunakan Bilah Ragam .
7. Kita dapat memperbaiki teks menggunakan Bilah Ragam  sehingga tidak dapat dipindahkan secara tidak sengaja .

Coba lakukan sebagaimana gambar berikut:



Mengedit dan memformat teks

Teks yang dimasukkan dan dipilih dapat diedit kapan saja di Teks tab Pengaturan , yang dapat diakses melalui Bilah Ragam .

Kita dapat memformat teks yang disisipkan menggunakan Bilah Ragam  (misalnya, Ragam font, ukuran font, warna teks, dan latar belakang).

Petunjuk: Lebih banyak opsi pemformatan tersedia di Pengaturan .

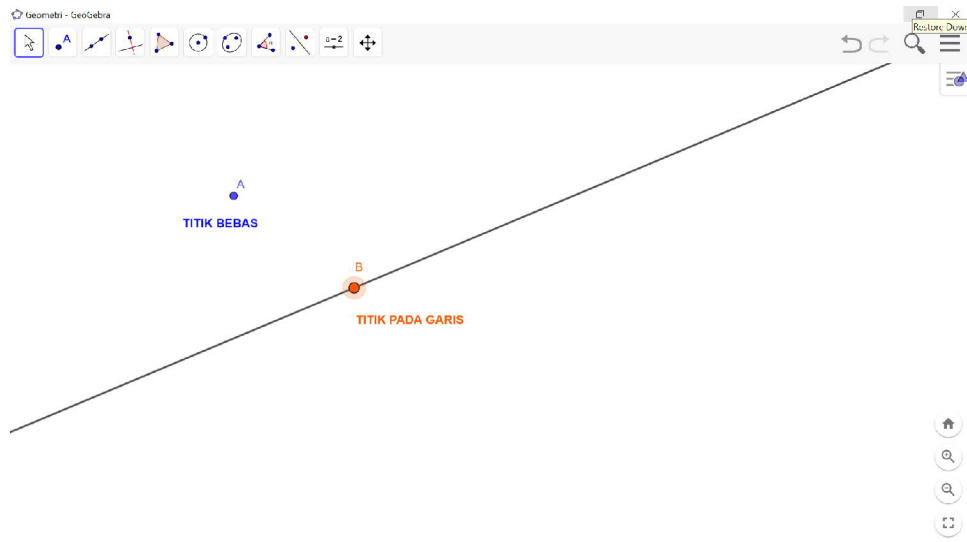
Cara melampirkan teks ke objek

Lampirkan teks ke suatu objek, sehingga bergerak sepanjang ketika objek diubah.

1.  Pilih titik teks Bebas.
2. Buka Pengaturan  untuk teks ini menggunakan Bilah Ragam .

3. Klik pada Posisi tab dan pilih **titik biru A** sebagai Titik Awal.
4. Pindahkan  **titik biru A** dan periksa apakah teks bergerak.
5.  Lampirkan teks **Titik pada garis** ke **titik merah B**.
6. Pindahkan  **titik merah B** dan periksa apakah teks bergerak.

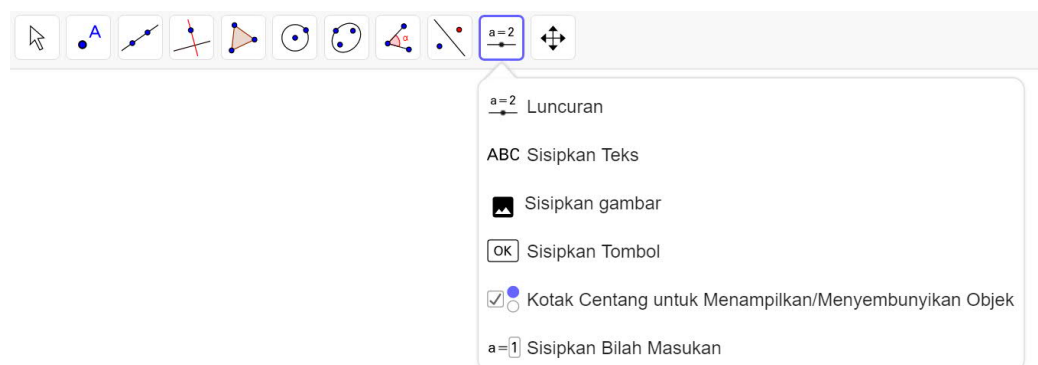
Lakukan hal ini sehingga didapat gambar berikut:



3.9 Memasukkan Gambar

Alat Gambar

Alat Gambar  memungkinkan kita untuk memasukkan gambar ke Tampilan Grafik . Kita dapat menemukan alat Gambar  di Toolbox Alat Objek Khusus (lihat gambar berikut):



Pilih alat Gambar  pembuka dialog yang memungkinkan kita memilih file dari penyimpanan lokal kita (folder file local tersimpannya gambar yang akan dimasukkan).

Petunjuk: Jika kita tidak memiliki file gambar yang cocok disimpan di komputer kita, Kita dapat mengunduh gambar [matahari terbenam](#) sebelum kita mencoba memasukkan gambar sendiri.

Instruksi

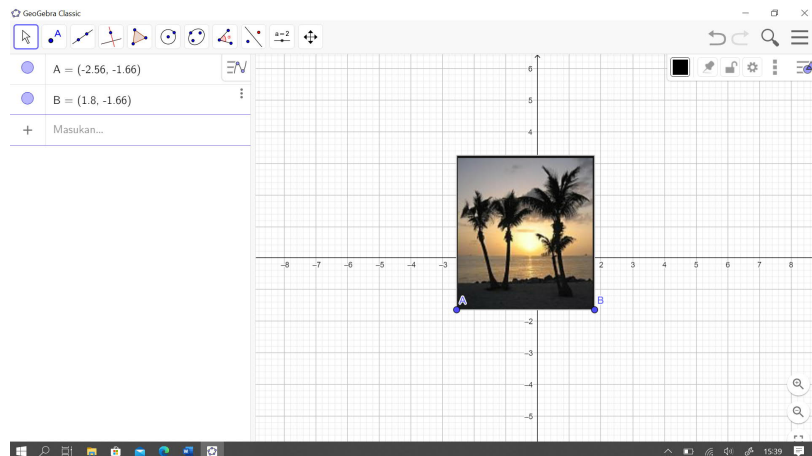
Tugas 1: Memasukan Gambar

1. Aktifkan/klik alat Gambar .

Catatan: Kita akan menemukan alat Gambar  di Kotak Alat kedua dari kanan.

2. Dalam dialog yang muncul pilih file gambar yang diinginkan dan klik OK untuk menyisipkan gambar ke dalam Tampilan Grafik .

Sebagai contoh hasilnya gambar matahari terbenam berikut:

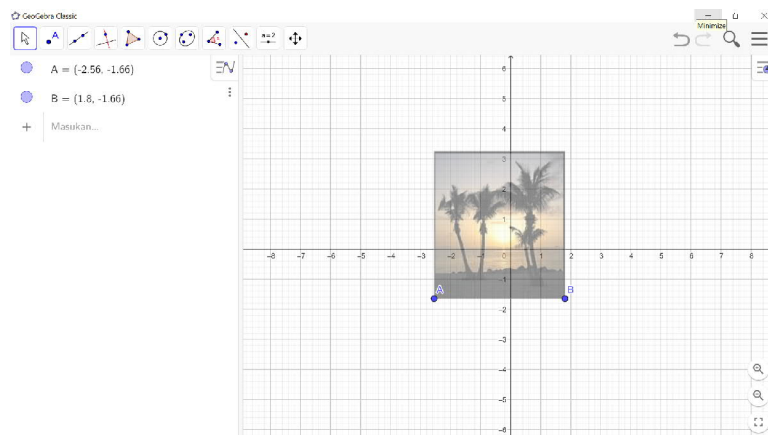


Tugas 2: Mengubah transparansi gambar yang dimasukkan

Ubah Transparansi gambar untuk melihat objek atau sumbu yang terletak di belakang gambar.

3. Aktifkan alat Pindahkan  dan pilih gambar yang sudah kita masukkan ke dalam Tampilan Grafik  di Tugas 1.
4. Buka Pengaturan  gambar menggunakan tombol Bilah Ragam .
5. Pilih tab Warna Pengaturan .
6. Ubah Opasitas gambar menggunakan slider yang disediakan (nilai antara 0% dan 100%).

Hasil gambar matahari terbenam berubah sebagai berikut:



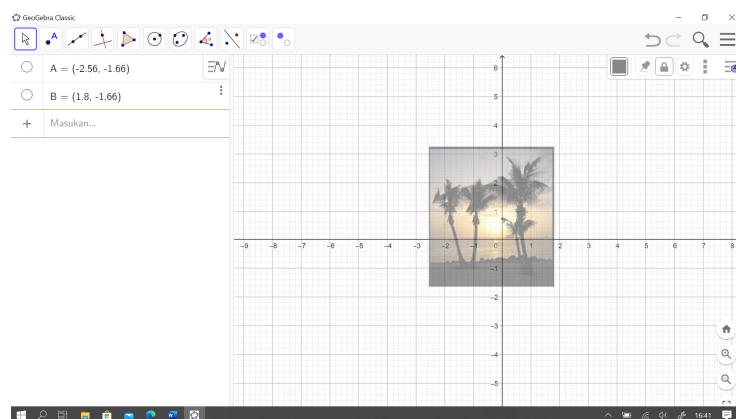
Instruksi (Lanjutan)

Tugas 3: Posisi absolut di layar

- Gunakan alat Tampilkan/Sembunyikan Objek  untuk menyembunyikan dua titik sudut dari gambar yang dimasukkan dalam Tampilan Grafik .
- Catatan: Kita akan menemukan alat ini di Toolbox Alat Umum (Toolbox terakhir).
- Aktifkan alat Pindahkan  dan pilih gambar.
- Buka Bilah Ragam  pada Tampilan Grafik .
- Gunakan tombol Objek Tetap  untuk mengatur gambar ke posisi absolut di layar.

Catatan: Memperbaiki gambar juga dapat dilakukan dengan membuka Pengaturan  dan memeriksa opsi Objek Tetap pada tab Dasar.

Berikut hasil gambarnya:

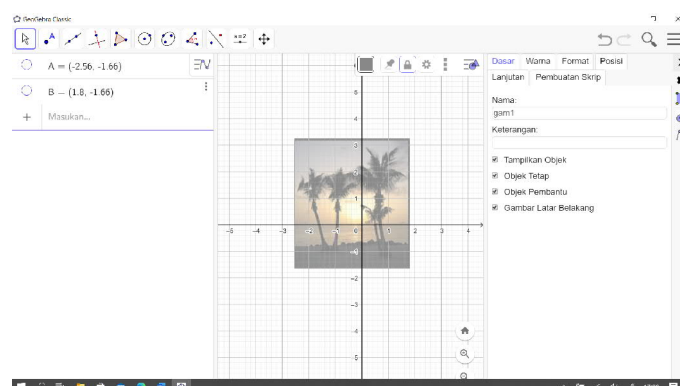


Tugas 4: Buat gambar latar belakang

Kita dapat menggunakan gambar apa pun sebagai gambar latar belakang dalam Tampilan Grafik .

- Aktifkan alat Pindahkan  dan pilih gambar yang disisipkan di Tampilan Grafik .
- Buka Pengaturan gambar  dengan menggunakan tombol Bilah Ragam .
- Pada tab Dasar, centang opsi Background Image.

Berikut hasil gambarnya:



Catatan: Gambar latar belakang tidak dapat dipilih dalam Tampilan Grafik lagi. Jika kita ingin mengubah ragam atau status gambar latar belakang, kita perlu melakukan hal berikut:

14. 🏠 Buka Tampilan Aljabar  dari Tampilan Menu.
15. Tampilkan Objek Bantu  menggunakan Pengaturan  di Tampilan Aljabar Bilah Ragam.
16. Pilih gambar di Tampilan Aljabar .
17. Buka Pengaturan  gambar dengan menggunakan tombol Bilah Ragam .
18.  Pada tab Dasar, kita dapat menghapus centang opsi Gambar Latar Belakang.

3.10 Menyimpan file GeoGebra

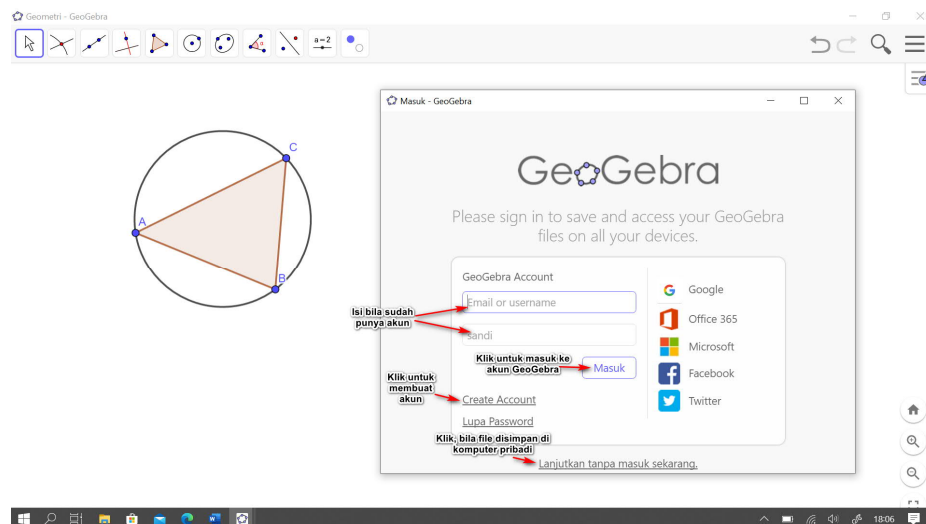
Catatan: Saat bekerja di Buku GeoGebra ini, konstruksi yang kita buat di applet yang disediakan tidak akan disimpan dalam Buku ini secara otomatis. Namun, jika kita juga ingin menyimpannya secara terpisah ke akun GeoGebra atau komputer kita, kita mungkin ingin mengikuti petunjuk berikut ini.

3.10.1 Menyimpan file GeoGebra kita ke platform sumber daya GeoGebra

Untuk menyimpan file GeoGebra ke akun GeoGebra kita, kita perlu ...

-  buka Menu  di sudut kanan atas aplikasi GeoGebra Classic.
-  pilih Simpan  dari menu File .
-  masukkan nama file dan konfirmasi dengan memilih Simpan.

Gambar berikut contoh cara menyimpan file GeoGebra:



Catatan: Untuk mengunggah file kita ke Platform Sumber Daya GeoGebra, kita harus masuk ke akun GeoGebra kita. Jika kita belum memiliki akun, atau belum masuk, kita harus membuat akun baru atau masuk ke akun yang ada.

File GeoGebra yang disimpan muncul di Sumber Daya tab di halaman profil kita sebagai kegiatan. Ini dapat diedit nanti, dibagikan dengan orang lain, atau diintegrasikan ke dalam Buku GeoGebra.

Catatan: Jika kita memilih untuk tidak masuk, kita dapat menyimpan file di komputer kita (ekstensi .ggb).

3.10.2 Menyimpan file GeoGebra ke komputer kita

Untuk menyimpan file GeoGebra ke komputer kita, kita harus ...

-  buka Menu  di sudut kanan atas aplikasi GeoGebra Classic.
-  Pilih unduh sebagai...  dari menu file . masukkan nama file dan konfirmasi dengan memilih Simpan.
-  pilih format file pilihan kita.
-  masukkan nama file dan pilih Ekspor/Simpan.

Catatan: Jika kita memilih ekstensi nama file.ggb, kita dapat menyimpan konstruksi kita saat ini sebagai file GeoGebra.

Menciptakan Aktivitas

GeoGebra memungkinkan kita membuat halaman web interaktif, yang disebut Aktivitas, dari file kita. Kita dapat ...

- ✓ mengeksport suatu Aktivitas langsung dari GeoGebra (menu File , opsi Share ) , atau
- ✓ membuat Aktivitas menggunakan Editor Aktivitas online di Situs [Web GeoGebra](https://www.geogebra.org/m).

Memilih nama file

Direkomendasikan konvensi penamaan file berikut:

- Hindari penggunaan spasi atau karakter khusus dalam nama file, karena ini dapat menyebabkan masalah yang tidak perlu saat file dibagikan dan ditransfer ke komputer lain.
- Sebagai gantinya, kita dapat menggunakan garis bawah atau huruf besar dalam nama file (misal. Konstruksi_Pertama_Kita.ggb).

Mengekspor gambar

Tampilan Grafik  GeoGebra dapat diekspor sebagai gambar. Dengan demikian, dapat dengan mudah dimasukkan ke dalam pemrosesan teks atau dokumen presentasi, memungkinkan kita untuk membuat sketsa yang menarik untuk tes, kuis, catatan atau permainan matematika.

GeoGebra akan mengekspor seluruh Tampilan Grafik  sebagai gambar, jadi kita mungkin ingin mengurangi ruang yang tidak perlu dan menyiapkan Tampilan Grafik :

- ❖ Pindahkan gambar kita (atau bagian yang relevan dari konstruksi kita) ke sudut kiri atas Tampilan Grafik  menggunakan alat Pindahkan  dan seret latar belakang.

Petunjuk: kita dapat menggunakan alat Zoom In  dan Zoom Out  untuk mempersiapkan gambar kita untuk proses ekspor.

- ❖ Kurangi ukuran jendela aplikasi dengan menyeret sudut kanan bawahnya dengan mouse atau jari kita.

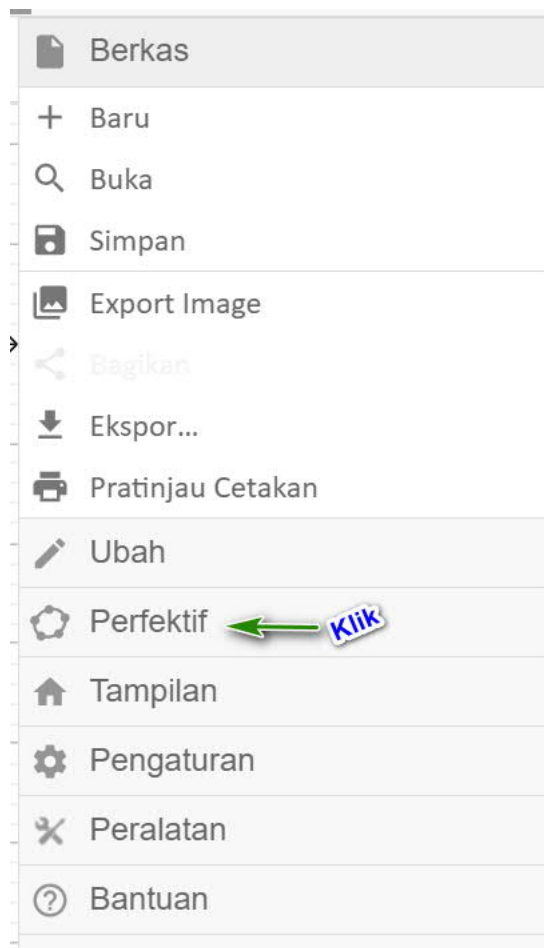
Petunjuk: Pointer akan berubah bentuk saat melayang di atas tepi atau sudut jendela aplikasi.

Kita dapat mengekspor gambar sebagai file png di Menu  di sudut kanan atas aplikasi. Dari menu File , pilih Ekspor Gambar  dan pilih antara Salin ke Papan Klip dan Unduh.

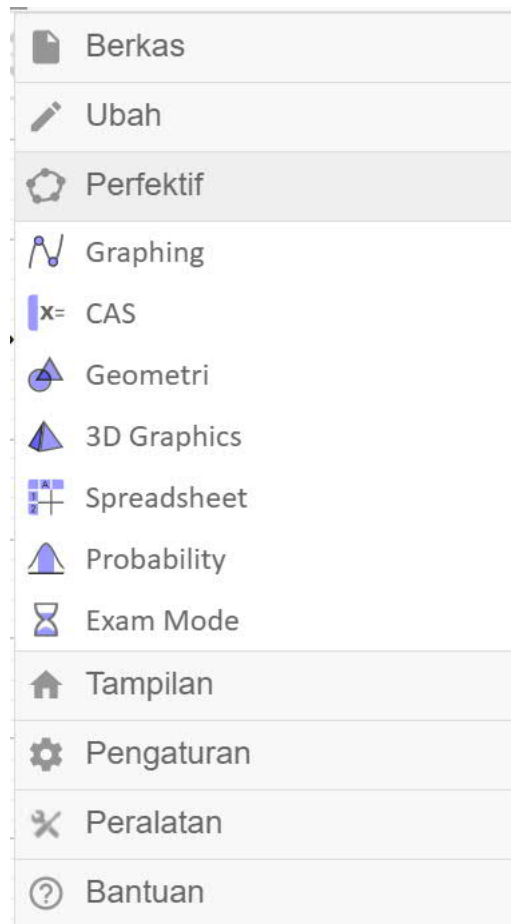
Gambar Tampilan Grafik sekarang disimpan di komputer kita dan dapat dimasukkan ke dalam pengolah kata atau dokumen presentasi apa pun.

BAB IV: Perfektif Dalam GeoGebra

Dalam Bab ini dibahas Perfektif dalam Geogebra. Perspektif dalam geogebra ada beberapa bagian se-bagaimana ditampilkan oleh gambar dalam menu utama sebagai berikut.



Klik, Perfektif akan muncul tampilan Gambar berikut :



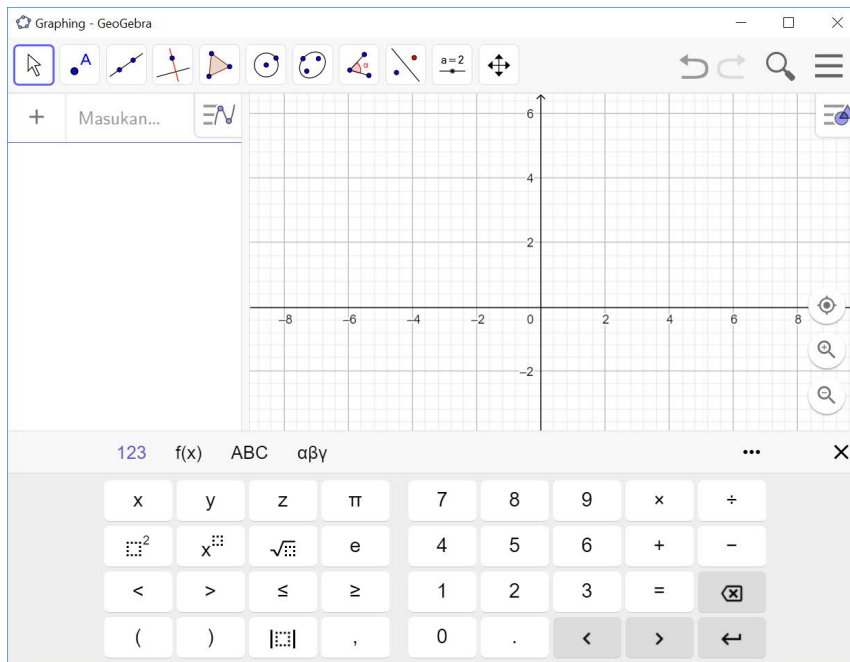
Tampak dalam Gambar ada 7 Pefektif yaitu :

- Graphing
- CAS
- Geometri
- 3D Graphics
- Spreadsheet
- Probbability
- Exam Mode

4.1 Perfektif Graphing

Perfektif Graphing  mencakup Tampilan Aljabar  dan Tampilan Grafik . Secara default, sumbu koordinat ditampilkan dan Bilah Alat Tampilan Grafik ditampilkan di bagian atas aplikasi GeoGebra Classic, dengan tombol Undo/Redo  di sudut kanan atas.

Klik ikon Graphing  akan didapat gambar berikut:



Gambar : Perfektif Graphing

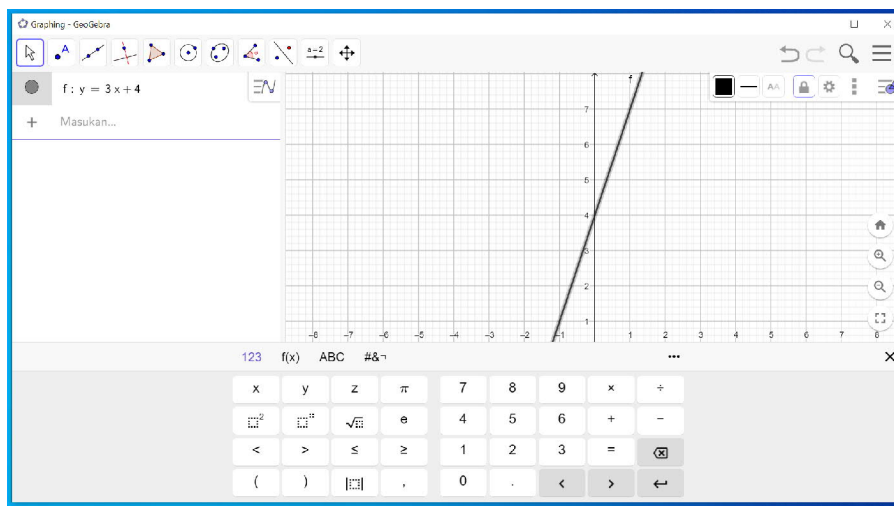
Tampilan Graphing ini adalah tampilan untuk media gambar sebagaimana telah banyak dibahas dalam pembahasan sebelumnya.

4.1.1 Tampilan Aljabar

Di Tampilan Aljabar  kita dapat langsung memasukkan ekspresi aljabar menggunakan Bilah/barisan Input. Setelah menekan tombol Enter, input aljabar kita muncul di Tampilan Aljabar .

Catatan: Pada saat yang sama, representasi grafis yang sesuai secara otomatis ditampilkan di Tampilan Grafik .

Contoh: Pada Bilah Input ketik $y = 3x + 4$ memberi kita persamaan linear dalam Tampilan Aljabar  dan garis yang sesuai dalam Tampilan Grafik . Hasilnya diberikan oleh gambar berikut:



Tugas

Lakukan Perfektif Graphing dengan mengikuti instruksi di bawah ini.

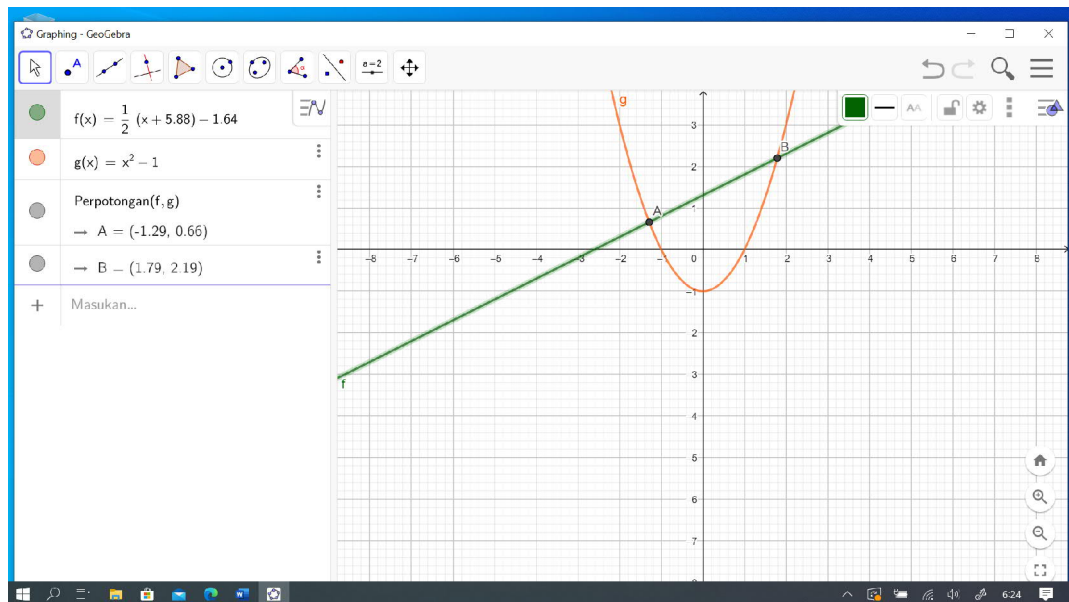
Instruksi

1.  Klik ke Bilah Input , masukkan $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ dan tekan *Enter*.
2.  Aktifkan alat Pindah dan pilih fungsi di Tampilan Grafik . Klik obyek garis $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ dan buka Bilah ragam dan pilih  supaya fungsi tidak tetap (*unfixed*) dan untuk dapat menyeret fungsi. Jelajahi bagaimana parameter fungsi dalam Tampilan Aljabar  berubah ketika obyek garis diklik $f(x)$ dan mendrag/menyeret $f(x)$.
3. Masukkan fungsi kuadrat $g(x) = x^2 - 1$ ke dalam Bilah Input dan tekan Enter.
4. Masukan Perpotongan($f(x),g(x)$) dalam Bilah input dan tekan *Enter*.

Catatan: Perintah ini menghasilkan titik potong dari dua fungsi. Titik potong tsb. ditampilkan dalam Tampilan Grafik  serta dalam Tampilan Aljabar .

5.  Klik/pilih alat Pindah dan klik/seret fungsi linier $f(x)$. Amati bagaimana titik potong berubah?

Apa yang telah kita buat ini diberikan oleh gambar berikut:



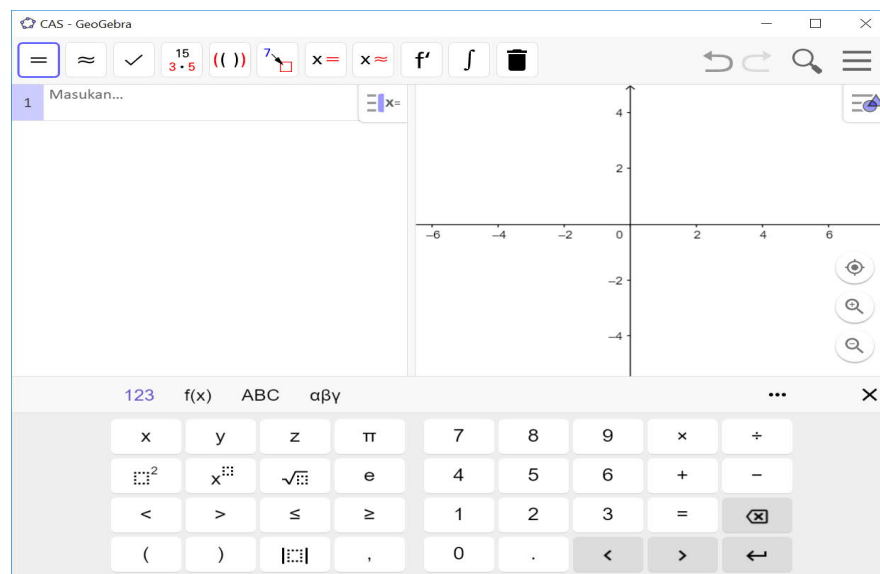
4.1.2 Menyembunyikan Objek Matematika di Tampilan Aljabar

Jika kita ingin menyembunyikan representasi aljabar suatu objek di Tampilan Aljabar , kita dapat menentukan objek sebagai Obyek Bantu (Auxiliary Object). Buka tab Properti Dialog Dasar  dan periksa Obyek Bantu.

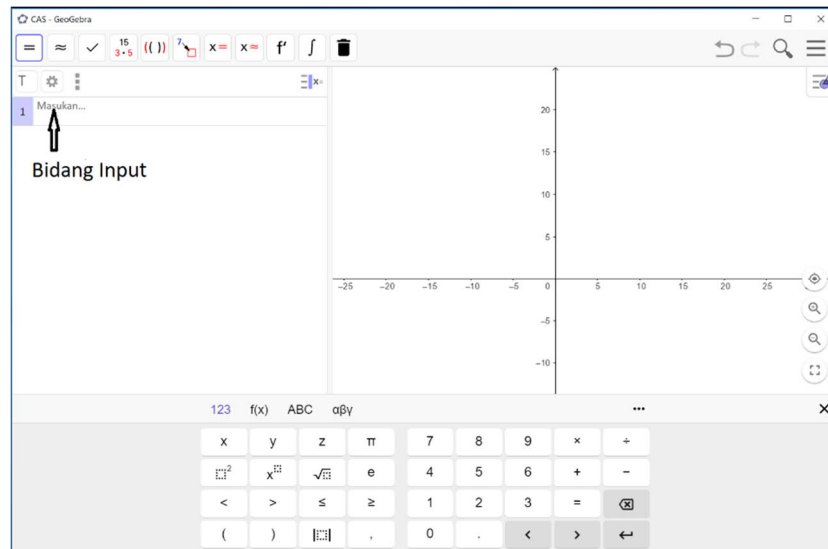
Secara default, Objek Bantu tidak ditampilkan dalam Tampilan Aljabar . Kita dapat mengubah pengaturan ini dengan memilih Objek Bantu dari Menu Konteks (klik kanan lalu pilih Pengaturan kemudian centang pada Obyek Pembantu), atau dengan memilih ikon yang sesuai di Tampilan Aljabar Bilah Ragam.

4.2 Perfektif CAS

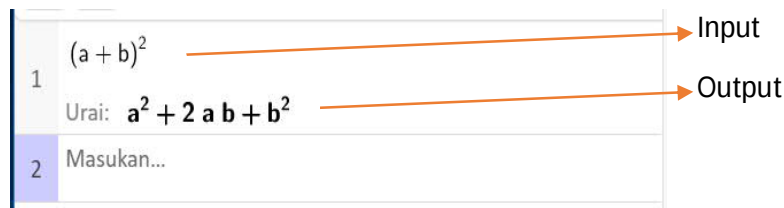
Tampilan CAS (Computer Algebra System) dalam GeoGebra untuk komputasi simbolik. Ia terdiri dari sel dengan bidang input di atas dan hasil output pada tampilan dibawahnya. Berikut gambar Perfektif CAS.



Bidang input dapat digunakan secara normal sebagaimana baris input dengan beberapa perbedaan. Misalnya, ketik pada bidang input $(a + b)^2$ lalu klik  akan menghasilkan $a^2 + 2ab + b^2$. Sebelum melakukan contoh tersebut, tampilkan dulu perspektif CAS sebagaimana berikut ini.



Bila dalam bidang input dilakukan sebagaimana yang telah dibahas sebelum nya akan muncul hasil tampilan gambar berikut.



Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$, lalu tekan enter atau klik tanda $=$, maka akan memberikan hasil ouput $\rightarrow 1$. Hal ini menunjukkan bahwa $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik $(\sqrt{3^{-1}})^{x-2} = 243$, lalu klik tanda $x =$, akan memberikan Output Selesaikan : $\{x = -8\}$. Hal menjelaskan bahwa penyelesaian dari persamaan $(\sqrt{3^{-1}})^{x-2} = 243$ adalah $x = -8$.

Untuk memfaktorkan nilai $a^3 + b^3$, maka pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik nilai tersebut lalu klik tanda $15 \cdot 3 \cdot 5$ akan memberikan Ouput Faktor : $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Jadi $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Bila bilangan real x memenuhi persamaan $\frac{(x+15)^{\frac{4}{3}}}{(64x+960)^{\frac{5}{6}}} = 2^{-2}$, maka nilai dari $\log_7 x$ sama dengan.. Untuk menjawab persoalan ini pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik $\frac{(x+15)^{\frac{4}{3}}}{(64x+960)^{\frac{5}{6}}} = 2^{-2}$ lalu tekan enter akan memberikan Output $x = 49$. Selanjutnya pada Bidang

input berikutnya ketik $\log(7,49)$ lalu klik tanda  akan memberikan hasil Output ≈ 2 . Hal ini menjelaskan bahwa $\log_7 49 = 2$.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{2}{z} = 0 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 3 \end{cases}$$

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik persamaan pertama $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{2}{z} = 0$ lalu klik tanda , lakukan hal yang sama pada persamaan kedua dan ketiga. Kemudian sorot semua tiga bidang input yang

memuat tiga persamaan tsb. Selanjutnya klik tanda  akan memberikan Output Selesaikan : $\left\{ \left\{ x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{1}{4} \right\} \right\}$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Selesaikan($\{x + y = 4, x - y = 2\}$) lalu tekan enter, akan menghasilkan Output $\rightarrow \{ \{ x = 3, y = 1 \} \}$.

Untuk menentukan nilai a supaya system persamaan :

$$\begin{cases} x = 4x + y \\ x + y = 2 \\ x - y = a \end{cases}$$

mempunyai penyelesaian, maka pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik : Selesaikan($\{x = 4x + y, x + y = 2, x - y = a\}, \{x, y, a\}$) lalu tekan enter, akan menghasilkan Output $\rightarrow \{ \{ x = -1, y = 3, a = -4 \} \}$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai a harus $a = -4$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Selesaikan($x^2 - 5 = 0$) lalu tekan enter, akan menghasilkan Output DaftarTitik : $\{(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)\}$. Hal ini menjelaskan bahwa penyelesaian dari $x^2 - 5 = 0$ adalah $x = -\sqrt{5}$ dan $x = \sqrt{5}$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik NilaiPenyelesaian($x^2 - 5 = 0$) lalu tekan enter, akan menghasilkan Output $\rightarrow \{ x = -2.2360679775, x = 2.2360679775 \}$. Hal ini menjelaskan bahwa penyelesaian dari $x^2 - 5 = 0$ adalah $x = -2.2360679775$ dan $x = 2.2360679775$. Disini nilai dari $\sqrt{5}$ didekati secara numerik oleh **2.2360679775**.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Selesaikan($x^2 + 5 = 0$) lalu tekan enter, akan menghasilkan Output $\rightarrow \{ \}$. Hal ini menjelaskan bahwa penyelesaian dari $x^2 + 5 = 0$ untuk nilai x real adalah himpunan kosong. Bila dikehendaki nilai penyelesaian x adalah kompleks, maka pada Bidang Input ketik perintah SolusiC($x^2 + 5 = 0$) lalu tekan enter, akan

menghasilkan Output $\rightarrow \{i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}\}$, dengan i adalah bilangan kompleks imajiner $i = \sqrt{-1}$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Limit $\left(\frac{x^2-9}{x-3}, x, 3\right)$ lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 6$. Hal ini menjelaskan bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Turunan(cos(x), x, 3) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow \sin(x)$. Hal ini menjelaskan bahwa $\frac{d^3 \cos(x)}{dx^3} = \sin(x)$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Integral(cos(x)) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow \sin(x) + c_1$. Hal ini menjelaskan bahwa $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c_1$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Integral($x^2 - 1, 0, 3$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 6$. Hal ini menjelaskan bahwa $\int_0^3 (x^2 - 1) dx = 6$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik $a(n) := 3 + 5(n - 1)$ lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow a(n) := 5n - 2$. Pada Bidang Input berikutnya ketik Barisan($a(n), n, 1, 10$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow \{3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48\}$. Output ini menjelaskan bahwa barisan aritmetika suku ke- n adalah $a(n) = 5n - 2$ dengan suku pertama adalah 3 dan beda sama dengan 5. Sedangkan perintah Barisan($a(n), n, 1, 10$) untuk menampilkan suku-1 s.d suku ke-10. Untuk menampilkan jumlah barisan $a(n)$ dari suku-1 s.d suku ke-10 pada Bidang Input ketik Jumlah($a(n), n, 1, 10$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 255$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik $g(n) := 3 \cdot 5^{n-1}$ lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow g(n) := 3 \cdot 5^{n-1}$. Pada Bidang Input berikutnya ketik Barisan($g(n), n, 1, 10$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow \{3, 15, 75, 375, 1875, 9375, 46875, 234375, 1171875, 5859375\}$. Output ini menjelaskan bahwa barisan geometri suku ke- n adalah $g(n) = 3 \cdot 5^{n-1}$ dengan suku pertama adalah 3 dan rasio sama dengan 5. Sedangkan perintah Barisan($g(n), n, 1, 10$) untuk menampilkan suku-1 s.d suku ke-10. Untuk menampilkan jumlah barisan $g(n)$ dari suku-1 s.d suku ke-10 pada Bidang Input ketik Jumlah($a(n), n, 1, 10$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 7324218$.

Pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik FPB($\{363, 285, 1044\}$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 3$. Hal ini menjelaskan bahwa Faktor Persekutuan Terbesar dari bilangan 363, 285 dan 1044 adalah 3. Sedangkan untuk menentukan Kelipatan Persekutuan Terkecil dari bilangan 363, 285 dan 1044, dalam Bidang Input ketik KPK($\{363, 285, 1044\}$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output $\rightarrow 3158100$.

Untuk menyelesaikan Pertidaksamaan $x^2 - 2x + 1 \leq 4$, pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik : Selesaikan($x^2 - 2x + 1 \leq 4$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output : $\rightarrow \{-1 \leq x \leq 3\}$.

Untuk menyelesaikan Pertidaksamaan $ax \leq b$, bila $a < 0$ dan $b > 0$ pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik : Selesaikan($ax \leq b, x, \{a < 0, b > 0\}$) lalu tekan enter akan menghasilkan Output : $\rightarrow \{x \geq \frac{b}{a}\}$.

Untuk menyelesaikan persamaan Trigonometri : $\sin\left(\frac{5}{4}\pi + x\right) - \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{6}\cos(x) - \sqrt{2}$, pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik Selesaikan(PerluasTigono($\sin\left(\frac{5}{4}\pi + x\right) - \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{6}\cos(x) - \sqrt{2}$)) lalu tekan enter, akan memberikan Ouput : $\rightarrow \left\{x = 2k_1\pi + \frac{1}{2}\pi, x = 2k_1\pi + \frac{11}{6}\pi\right\}$.

Untuk menunjukkan bahwa $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$ pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik : SederhanaTrigono($1 - \sin^2(x)$) lalu tekan enter, akan memberikan Ouput : $\rightarrow \cos^2(x)$.

Untuk menunjukkan bahwa $\sin^2(x) - \cos^2(x) + 1 = 2\sin^2(x)$ pada Bidang Input dalam Perspektif CAS ketik : SederhanaTrigono($\sin^2(x) - \cos^2(x) + 1$) lalu tekan enter, akan memberikan Ouput : $\rightarrow 2\sin^2(x)$.

Untuk menampilkan $\frac{1}{3}\log(x + \sqrt{3})$ dalam Bidang Input Perspektif CAS ketik : $\log\left(\frac{1}{3}, x + \sqrt{3}\right)$. Selanjutnya untuk menyelesaikan pertidaksamaan $\frac{1}{3}\log(x + \sqrt{3}) + \frac{1}{3}\log(x - \sqrt{3}) > 0$. Dalam Bidang Input Perspektif CAS ketik : Selesaikan($\log\left(\frac{1}{3}, x + \sqrt{3}\right) + \log\left(\frac{1}{3}, x - \sqrt{3}\right), x$) lalu tekan enter akan memberikan Output $\rightarrow \{\sqrt{3} < x < 2\}$. Hal ini menjelaskan bahwa $\sqrt{3} < x < 2$ adalah peyelesaian dari $\frac{1}{3}\log(x + \sqrt{3}) + \frac{1}{3}\log(x - \sqrt{3}) > 0$.

Untuk merasionalisasi bentuk akar : $\frac{3}{\sqrt{3}}$, dalam Bidang Input Perspektif CAS ketik : Rasionalisasi($\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$) lalu tekan enter akan memberikan Output $\rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Hal ini menjelaskan bahwa $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Latihan

1. Tentukan nilai real x yang memenuhi $x^3 + x - 8 = \frac{8}{x^2}$.
2. Bila $x + y = 4$ dan $xy = -12$, maka tentukan nilai $x^2 + 2xy + y^2$.
3. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $x^2 - y^2 = 45$.
4. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.
5. Bila $X = x^2 + \frac{1}{x^2}$, maka tentukan nilai dari bilangan real a, b dan c yang memenuhi persamaan $x^{12} + 1 = (aX^3 + bX^2 + cX)X^6$.
6. Buktikan bahwa $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$.
7. Tentukan nilai real x yang memenuhi persamaan $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{x-2} = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

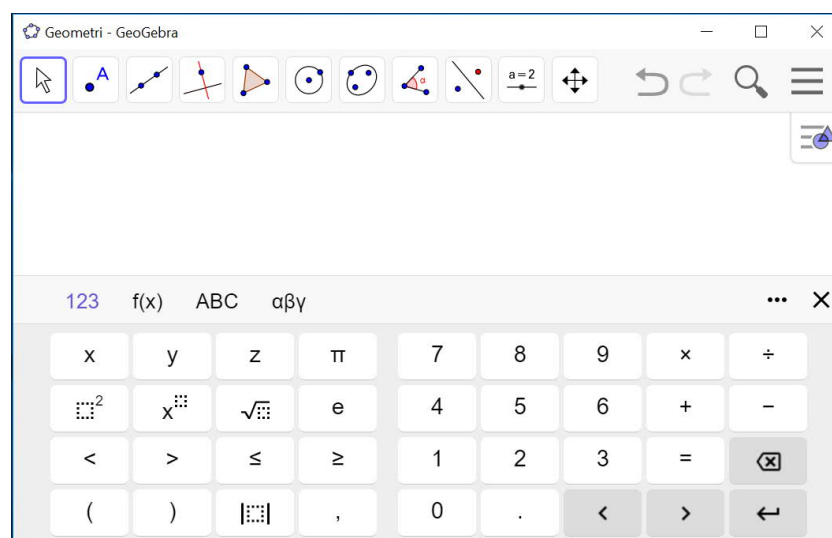
8. Bila bilangan real x adalah penyelesaian dari persamaan $2^{x+2} - (\sqrt{2})^x = 1008$, maka tentukan nilai dari 4^x .
9. Bila $ab = 3$ dan $\sqrt[3]{64a^{12}b^6} = 144$, maka tentukan nilai dari b^3 .
10. Bila suatu barisan aritmetika suku ke-2, ke-31 dan ke- n masing-masing adalah $7\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ dan $-6\frac{1}{2}$. Maka tentukan nilai n .
11. Bila deret : $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \dots$ sama dengan $\frac{463}{288}$, maka tentukan banyaknya suku deret tersebut.
12. Bila $\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2}$, maka tentukan nilai dari $\sin^3(x) + \cos^3(x)$.
13. Bila $\tan(x) = \frac{\sin 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 40^\circ}$, maka tentukan nilai dari x .
14. Hitung nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x}}$.
15. Bila garis $y = x + a$ menyinggung grafik parabola $y = x^2 - 2x - 3$. Maka tentukan nilai dari a .
16. Bila sistem persamaan berikut :
- $$\begin{cases} y + 2x = 17 \\ y + x = 11 \\ y + 1\frac{1}{8}x - \frac{x^2}{64} = a \end{cases}$$
- Mempunyai penyelesaian, maka tentukan nilai dari a .
17. Tentukan nilai dari x dan y yang memenuhi persamaan $3^x - y = -1$ dan $x + y = 12$.
18. Selesaikan pertidaksamaan : $\frac{1}{3}\log(x^2 + x) > \frac{1}{3}\log(8 - x)$. (UN 2015)
19. Selesaikan pertidaksamaan : $\frac{1}{4}\log(x^2 + 3x + 2) > \frac{1}{4}\log(5x + 5)$. (UN 2015)
20. Tentukan semua nilai real x yang memenuhi pertidaksamaan : $(x + 1)(x + 2) \geq (x + 2)$ (SNMPTN 2012).
21. Bila a dan b adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $a^b = 2^{20} - 2^{19}$, maka tentukan nilai dari $a + b$ (SNMPTN 2012).
22. Bila $2 - x = 6$, $2y + 3z = 4$ dan $3x - z = 5$, maka tentukan nilai dari $5x + y + 2z$. (SNMPTN 2012).
23. Bila $p + 1$ dan $p - 1$ adalah akar-akar persamaan $x^2 - 4x + a = 0$, maka tentukan nilai dari a (SNMPTN 2012).
24. Bila ${}^2\log 3 = x$ dan ${}^3\log 7 = y$, maka tentukan nilai dari ${}^3\log 14$ (SNMPTN 2012).
25. Bila f adalah fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $(-1,0)$, $(2,0)$ dan $(0,2)$, maka tentukan nilai dari $f(7)$ (SNMPTN 2012).
26. Bila $S_n = 5n^2 - 6n$ adalah jumlah n suku pertama barisan aritmetika, maka tentukan suku ke-5 barisan tersebut (SNMPTN 2012).
27. Bila $f(x) = ax + 3$ dan $f(f(x)) = 4x + 9$, maka tentukan nilai dari $a^2 + 3a + 3$ (SNMPTN 2012).
28. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+2x-3} - \sqrt{2x^2-2x-3}}{2\sqrt{2}}$.
29. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.
30. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{3x^4 - 3x^2}$.

31. Tentukan nilai-nilai dari x dimana grafik $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ turun.
32. Faktorkan : $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.
33. Hitung : $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$.
34. Selesaikan persamaan : $|x - 1| + |x - 4| = 2$.
35. Selesaikan persamaan : $|x - 1| + |x| + |x + 1| = x + 2$.
36. Tentukan nilai dari $a^4 + b^4$ bila $a - b = 10$ dan $ab = 10$. Petunjuk : gunakan persamaan $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ dan $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$.
37. Tentukan banyaknya bilangan asli yang bias membagi bentuk $n^7 - n$ untuk semua bilangan asli n . Petunjuk, tunjukkan bahwa $n^7 - n$ bisa dibagi 6 dan 7.
38. Bila $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(a-d)} = -\frac{4}{7}$ dengan a, b, c dan d semuanya berbeda, maka tunjukkan bahwa $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{11}{4}$.
39. Diberikan polinomial $p(x)$ berderajat 4 yang memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$ dan $x = 2$. Bila $p(1) = 2017$, maka tentukan nilai dari $p(5)$. Petunjuk : gunakan fakta bahwa $p(x)$ berderajat 4, maka $\frac{dp(x)}{dx}$ adalah polynomial derajat 3 yang memenuhi dan yang mempunyai faktor x dan $(x - 2)$. Jadi $\frac{dp(x)}{dx} = ax(x - 2)(x - b)$. Selanjutnya hitung : $p(x) = \int ax(x - 2)(x - b) dx$.
40. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat n :
- $n^3 - n$ dapat dibagi oleh 3.
 - $n^5 - n$ dapat dibagi oleh 5.
 - $n^7 - n$ dapat dibagi oleh 7.
 - $n^{11} - n$ dapat dibagi oleh 11.
 - $n^{13} - n$ dapat dibagi oleh 13.
- Catatan : $n^9 - n$ untuk $n = 2$ didapat $2^9 - 2 = 510$ tidak bisa dibagi oleh 9.
41. Jika himpunan penyelesaian dari $|2x - a| < 5$ adalah $\{x \mid -1 < x < 4\}$, maka tentukan nilai a (SBMPTN 2017).
42. Sumbu simetri grafik $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah $x = 2$. Bila $f(0) = 1$ dan $f(1) = -2$, maka tentukan nilai dari $a - b$ (SBMPTN 2017).
43. Bila $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$, maka tentukan daerah asal fungsi komposisi $f \circ g$ (SBMPTN 2017).
44. Tentukan luas daerah penyelesaian sistem persamaan $x + y \geq 2$, $x + 4y \leq 3$ dan $y \geq 0$ (SBMPTN 2017).
45. Tentukan gradien peta garis $y = x + 1$ dibawah pencerminan terhadap sumbu- x dan kemudian translasi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (SBMPTN 2017).
46. Hitung $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$ (SBMPTN 2017).
47. Bila $f(x) = ax + b$ dan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{f(x)} = \frac{1}{4}$, maka tentukan nilai $f(2)$ (SBMPTN 2017).
48. Akan dikonstruksi suatu barisan aritmetika dengan beda b yang terdiri dari n suku. Selisih suku terbesar dan terkecil adalah 27. Bila $n = b + 7$, maka tentukan selisih suku ke- n dengan suku ke-4 (SBMPTN 2017).

49. Lima bilangan asli membentuk suatu barisan geometri dengan rasio positif. Jika jumlah 3 suku terbesar dan jumlah 3 suku terkecil barisan berturut-turut 171 dan 76, maka tentukan jumlah 5 bilangan tersebut (SBMPTN 2017).
50. Misalkan A^T adalah transpose matriks A . Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ sehingga $BA^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, maka tentukan nilai dari $2x + 3y$ (SBMPTN 2017).

4.3 Perspektif Geometri

Tampilan dari Perspektif Geometri dalam GeoGebra Klasik ver.6.0.652.0 offline diberikan oleh gambar berikut :



Pada gambar tampilan Perspektif Geometri tampak bahwa perintah-perintah yang telah dikenal dalam pembahasan yang terdahulu yaitu Baris Peralatan. Pada bagian ini digunakan perintah-perintah yang ada dalam Baris Peralatan selanjutnya diberikan latihan. Perhatikan bahwa apa yang dibahas disini berkaitan dengan materi Geometri Bidang. Untuk materi Geometri Ruang dibahas berikutnya yang berkaitan dengan Perspektif 3D.

Dibahas pendekatan nilai dari π sebagai berikut. Klik pada Baris Peralatan 6 yaitu



(Lingkaran dengan Pusat melalui Titik). Lalu letakan kursor pada media grafik klik untuk membuat titik pusat lingkaran (A) dan klik untuk membuat titik (B) yang melalui lingkaran. Klik Baris Peralatan 10 (slider/luncuran). Isikan nama luncuran n , minimum : 3, maksimum : 200 dan kenaikan : 1. Klik Baris Peralatan 9, pilih

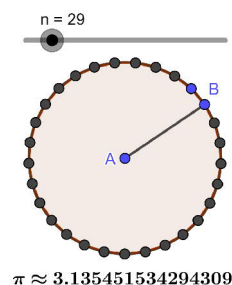


Rotasi Objek mengitari Titik dengan Sudut. Klik titik B yang akan dirotasi dan klik titik A sebagai pusat. Isikan sudut $\frac{360}{n}^\circ$ lalu klik Oke. Klik Baris Peralatan 5, pilih

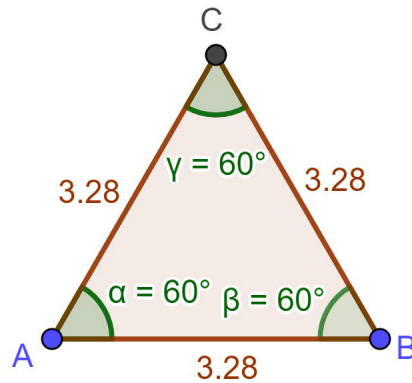


Segi-n Beraturan, klik titik B dan titik hasil rotasi B yaitu B' dan Titik-titik isi dengan n

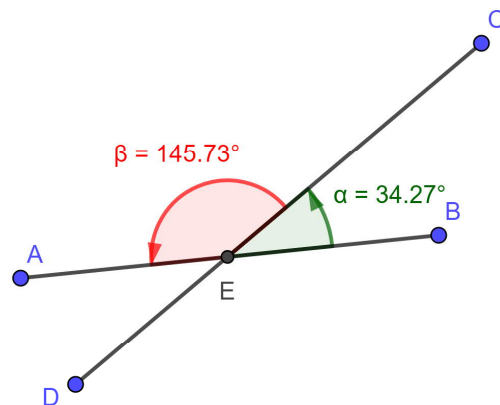
lalu klik Oke. Klik Baris Peralatan 3, pilih  Ruas Garis di antara Dua Titik lalu klik titik B dan A. Gerakan luncuran n , maka terjadi segi- n beraturan dalam lingkaran. Klik Baris Peralatan 8 pilih  Jarak atau Panjang berturut-turut klik objek ruas garis AB dan Poligon dari segi- n beraturan. Maka menghasilkan objek f yang merupakan panjang garis AB atau jari-jari lingkaran dan objek kelilingpoli1 yang merupakan keliling dari segi- n beraturan. Dalam baris input ketik $a = \frac{\text{kelilingpoli1}}{2f}$ tekan enter. Nilai dari a adalah nilai pendekatan dari π . Klik Baris Peralatan 10 lalu pilih  Sisipkan Teks, letakkan kursor pada media grafik lalu klik dan klik Formula LaTeX, lalu ketik $\pi \approx$ lalu klik Lanjutan dan klik  pilih a dan ketik π . Output dari perintah yang terakhir tersebut memberikan nilai pendekatan dari π . Untuk melihat hasilnya gerakan luncuran n akan terlihat perubahan nilai pendekatan π . Untuk mengubah digit klik pada menu utama lalu pilih pengaturan, isikan Pembulatan : 15 Angka Desimal. Apa yang dibahas disini adalah salah satu cara mendekati bilangan irrasional π dengan bilangan rasional sampai berapa digit yang ditentukan. Juga bila diperhatikan ide dalam pembahasan yang digunakan dari pengetahuan rumus dasar keliling lingkaran adalah : $2\pi r$. Sehingga didapat $\pi = \frac{\text{KelilingLingkaran}}{2r}$. Bila hal dibandingkan dengan $a = \frac{\text{kelilingpoli1}}{2f}$, maka $\pi \approx a$, $2r = 2f$ dan $\text{KelilingLingkaran} \approx \text{kelilingpoli1}$. Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa untuk n yang cukup besar nilai a semakin akurat mendekati nilai π . Jadi bentuk lingkaran adalah segi- ∞ beraturan. Hasil yang didiskusikan diberikan oleh gambar berikut.



Untuk membuat segitiga sama sisi dan menunjukkan bahwa masing-masing sudut yang terbentuk dalam segitiga adalah 60° lakukan hal berikut. Klik Baris Peralatan 5, lalu pilih/klik Segi- n beraturan. Letakkan kursor di media gambar lalu klik pindah kursor dan klik (membuat dua titik A dan B). Selanjutnya dalam kotak dialog isikan 3 lalu klik Oke. Akan terbentuk segitiga ABC. Untuk menunjukkan bahwa $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, klik Baris Peralatan 8, pilih/klik Jarak atau Panjang dan klik objek garis AB, maka akan muncul suatu nilai yang merupakan panjang dari ruas garis $\overline{AB}$. Lakukan hal ini pada garis BC dan CA, maka akan memberikan hasil nilai yang sama seperti nilai panjang ruas garis $\overline{AB}$. Untuk menentukan nilai sudut $\angle BAC = \alpha = 60^\circ$. Klik Baris Peralatan 8 (Sudut) selanjutnya berturut-turut klik titik B, A dan C. Maka akan terbentuk nilai $\alpha = 60^\circ$. Lakukan hal ini dengan berturut-turut mengklik titik C, B dan A untuk menghasilkan $\beta = 60^\circ$. Selanjutnya berturut-turut klik titik A, C dan B untuk menghasilkan $\gamma = 60^\circ$. Hasil diskusi ini diberikan oleh gambar berikut.



Dua sudut Berpelurus : Bila ruas garis AB dan CD berpotongan di suatu titik E , maka $\angle BEC$ dan $\angle CEA$ dinamakan sudut yang saling berpelurus sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut.

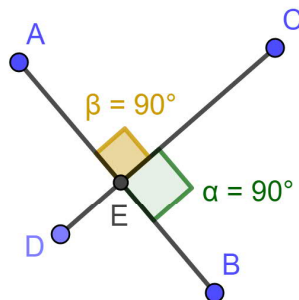


$$\text{Jumlah : } \angle \alpha + \angle \beta = 34.27^\circ + 145.73^\circ = 180^\circ$$

Untuk membuat gambar dua sudut berpelurus, klik Baris Peralatan 3, lalu pilih/klik Ruas Garis diantara Dua Titik. Selanjutnya pada media grafik klik untuk membuat titik A dan geser mouse lalu klik, akan terbentuk garis AB dengan cara yang sama buat ruas garis CD yang berpotongan dengan garis AB . Untuk menentukan titik potong kedua garis klik Baris Peralatan 2, lalu pilih/klik Perpotongan Dua Objek dan berturut-turut klik objek ruas garis AB dan CD , maka akan tergambar titik E sebagai titik potong dua garis AB dan CD . Untuk membuat $\angle BEC$ dan $\angle CEA$, klik Baris Peralatan 8 (Sudut) berturut-turut klik objek titik B , E dan C , maka akan terbentuk sudut $\angle BEC$. Untuk menentukan warna gambar sudut, arah panah dan nama sudut serta besarnya sudut, arahkan mouse pada objek gambar sudut lalu klik kanan mouse dan pilih/klik Pengaturan. Untuk mengubah warna klik menu Warna lalu pilih warna yang diinginkan. Untuk memberikan arah garis sudut klik/pilih menu Format, lalu klik Dekorasi pilih sesuai yang diinginkan. Untuk memberikan nama sudut beserta besarnya klik menu Dasar, lalu pada Tampilan Label pilih Nama & Nilai. Untuk menampilkan besar kecilnya tampilan ukuran sudut, klik menu Format lalu pilih Ukuran. Lakukan hal ini pada

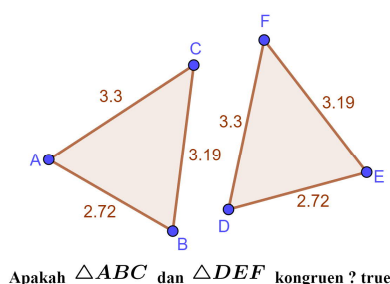
sudut $\angle CEA$. Perhatikan bahwa jumlah dua sudut berpelurus selalu sama dengan 180° . Untuk melakukan eksperimen ini gerakan/geser titik A dan C , maka nilai sudut α dan β berubah tetapi $\alpha + \beta$ besarnya tetap 180° . Hasil ini bisa digunakan sebagai dalil yaitu : jumlah dua sudut berpelurus adalah **180°** .

Sama halnya dengan sudut berpelurus yaitu dua sudut berpenyiku. Bila garis AB dan CD berpotongan di suatu titik E , $\angle BEC = 90^\circ$ dan $\angle CEA = 90^\circ$ dinamakan sudut yang saling berpenyiku sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut.

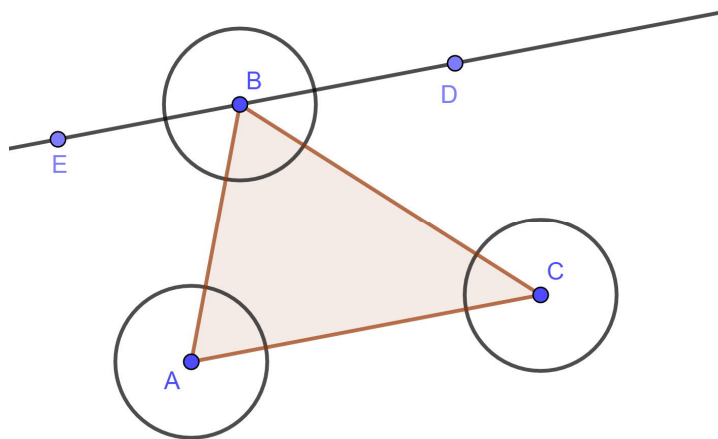


Dua sudut $\angle BEC = \alpha = 90^\circ$ dan $\angle CEA = \beta = 90^\circ$ saling berpenyiku.

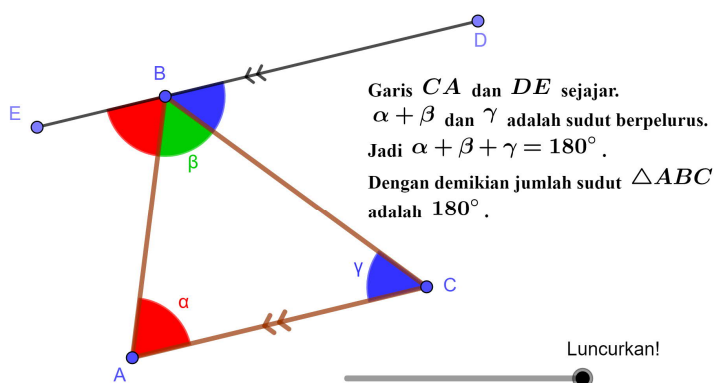
Dua bentuk dalam bidang datar dikatakan kongruen bila masing-masing sisi yang bersesuaian mempunyai panjang yang sama. Perintah untuk menentukan dua obyek kongruen dalam baris input ketik `AreCongruent(<object>,<object>)`. Misalkan obyek yang pertama adalah $t1$ dan obyek kedua $t2$, maka untuk mengetahui $t1$ dan $t2$ kongruen dalam baris input ketik `AreCongruent(t1,t2)` tekan enter akan memberikan jawaban true atau false. Gambar dua segitiga berikut adalah kongruen,



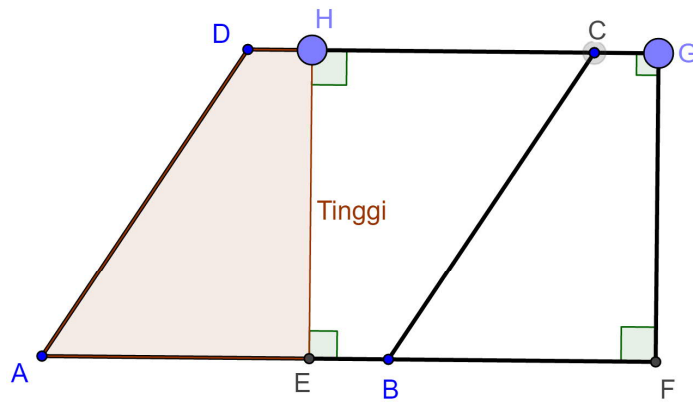
Untuk membuktikan jumlah sudut suatu segitiga adalah 180° . Dapat dilakukan dengan animasi sebagai berikut. Buat $\triangle ABC$, klik Baris Peralatan 5, klik Poligon. Buat lingkaran dengan pusat di A, B dan C dengan jari-jari 1. Hal dilakukan dengan mengklik Baris Peralatan 6 dan pilih/klik Lingkaran dengan Pusat dan Jari-jari. Selanjutnya buat garis melalui titik B sejajar garis CA sehingga terbentuk gambar berikut.



Berikutnya buat ruas garis DE, lalu jangan tampilkan objek garis sejajar sehingga hanya tampil ruas garis DE. Klik Baris Peralatan 6 lalu pilih/klik Sektor Sirkular dengan Pusat melalui Dua Titik dan klik titik A sebagai pusat sector dan berturut-turut klik titik perpotongan lingkaran dengan garis AC dan titik perpotongan lingkaran dengan garis AB, maka akan terbentuk gambar sector AFG. Klik kanan nama sector lalu pilih Nama Ulang ganti nama yang ada dengan α . Untuk mewarnai sector α dengan warna merah. Klik kanan objek α lalu pilih Pengaturan dan klik menu Warna untuk memilih warna merah dan arahkan Opasitas menuju angka 100. Dengan cara yang sama buat sector dengan pusat titik B dan beri nama β serta beri warna hijau. Begitu juga dititik C dengan nama sector γ dan berwarna biru. Buat titik tengah pada garis AB dengan perintah pada Baris Peralatan 2 dan pilih/klik Titik Tengah atau Pusat. Lakukan juga hal ini pada garis BC. Selanjutnya buat Luncuran/slider dengan a, isi minimum 0, maksimum 180 dan kenaikan 1. Klik Baris Peralatan 9, pilih/klik Rotasi Objek Mengitari Titik dengan Sudut. Lalu klik Obyek sector α dan klik titik tengah garis AB selanjutnya isikan sudut dengan a. Lakukan hal ini pada obyek sector γ dan isikan sudut dengan $-a$. Berikut ini adalah hasil gambarnya. Untuk melakukan animasi gerakan luncuran

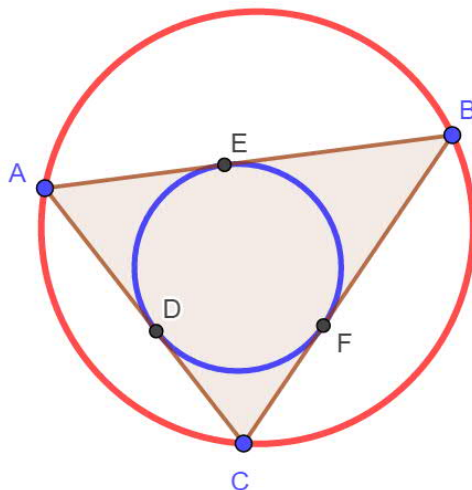


Menentukan luas Jajaran Genjang ABCD sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



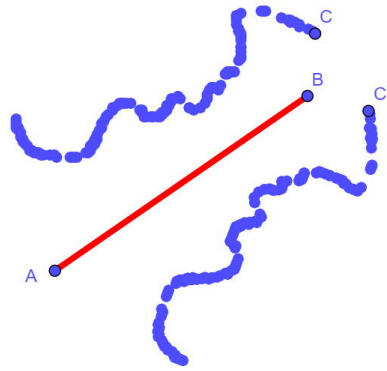
Perhatikan bahwa Luas ABCD sama dengan Luas AEHD + Luas EBCH. Tetapi dari gambar tampak bahwa Luas AEHD = Luas BFGC. Jadi Luas Jajaran Genjang ABCD sama dengan Luas EBCH + Luas BFGH sama dengan Luas Persegi Panjang EFGH sama dengan $EF \times \text{Tinggi (EH)}$. Tetapi EF sama dengan AB. Jadi Luas Jajaran Genjang ABCD adalah : panjang alas AB $\times$ Tinggi EH.

Pada aktifitas berikut diberikan sebarang $\triangle ABC$, buat lingkaran luar yang melalui titik A, B dan C dan lingkaran dalam yang menyinggung garis AB, BC dan CA sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



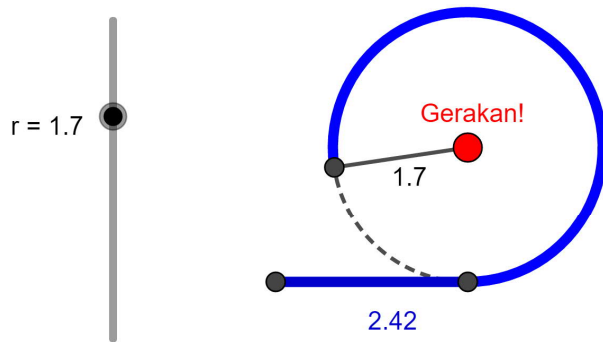
Diskusikan bagaimana cara membuatnya.

Aktifitas membuat pencerminan. Buat ruas garis AB dan suatu titik C. Cermin titik C pada garis AB menjadi titik C'. Klik kanan masing-masing obyek C dan C' lalu centang Tampilkan Jejak. Gerakan titik C dan amati gerakan titik C' sehingga didapat gambar berikut.



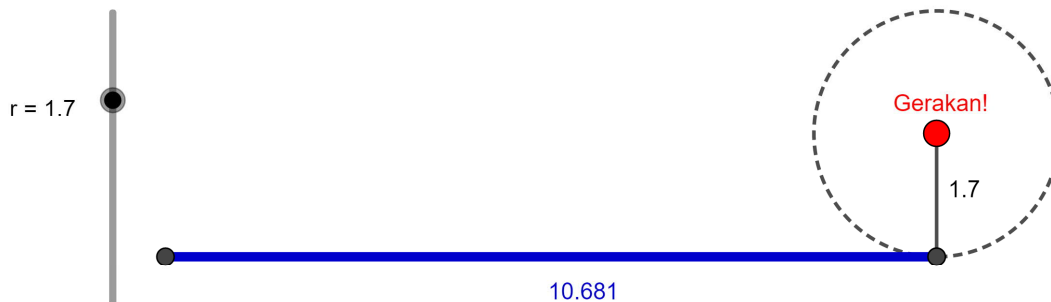
Buat aktifitas untuk memasukkan gambar bunga yang simetri dalam Geogebra. Tentukan sumbu simetrinya dan lakukan sebagaimana aktifitas sebelumnya sehingga didapat gambar berikut.





$$\text{Keliling Lingkaran} = 2\pi 1.7 = 10.681 \approx 2.42$$

Pada gambar diatas segmen garis panjangnya 2.42 dan keliling lingkaran adalah 10.681. Untuk menjadikan bagian busur lingkaran yang tersisa menjadi segemen garis lurus gerakan pusat lingkaran kekanan sehingga pajang segmen garis lurus bertambah panjang sedangkan bagian busur lingkaran semakin pendek. Gerakan terus pusat lingkaran kekanan sampai bagian busur lingkaran panjangnya nol dan panjang segmen garis menjadi $2\pi 1.71 = 10.681$. Hal ditampilkan oleh gambar berikut.

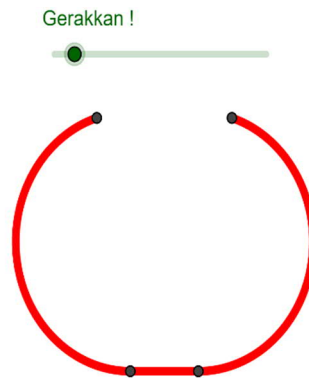


$$\text{Keliling Lingkaran} = 2\pi 1.7 = 10.681 \approx 10.681$$

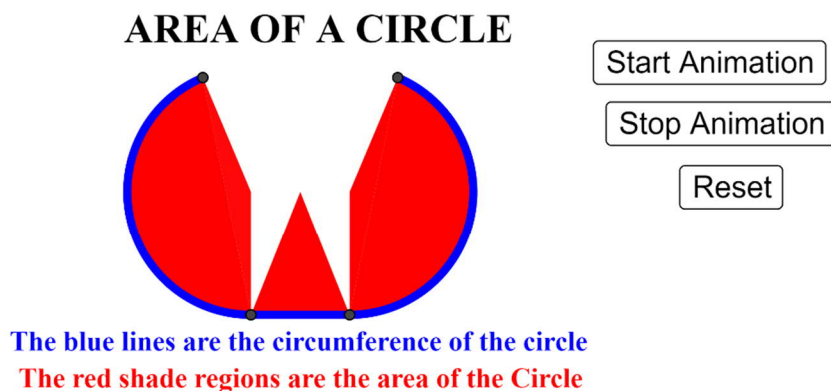
Untuk melakukan hal ini, klik Luncuran beri nama r dan isi minimum dengan 1, maksimum dengan 2 dan kenaikan 0.1. Pada Baris Input ketik $y = r$ tekan enter. Pada Baris Peralatan 2 klik/pilih Perpotongan Dua Objek, berturut-turut klik obyek garis $y = r$ dan obyek garis sumbu- y akan menghasilkan titik potong A . Klik Baris Peralatan 3, pilih/klik Ruas Garis dengan Panjang Tetap. Lalu klik obyek titik A dan isikan Panjang dengan $2\pi r$ klik Oke. Dengan demikian terbentuk ruas garis AB dengan panjang . Jangan tampilkan obyek garis $y = r$. Selanjutnya klik Baris Peralatan 2, pilih/klik Titik pada Objek, lalu klik obyek ruas garis AB . Hal ini menghasilkan titik C terletak sepanjang ruas garis AB bersifat dinamik sepanjang ruas garis AB . Klik Baris Peralatan 6, klik/pilih Lingkaran dengan Pusat dan Jari-jari dan klik obyek titik C dan isikan jari-jari dengan r , hal ini menghasilkan lingkaran c dengan pusat di C dan jari-jari r . Klik Baris Peralatan 2, pilih/klik Titik pada Objek, lalu klik obyek lingkaran c akan terbentuk titik dinamis D yang terletak pada lingkaran c . Klik Baris Peralatan 9, pilih/klik Rotasi Objek mengitari Titik dengan Sudut dan berturut-turut klik obyek titik D dan titik C ,

selanjutnya isikan Sudut dengan $-\frac{x(C)}{r} \frac{180}{\pi}$ klik Oke akan menghasilkan titik D' . Gerakan titik D sehingga menyinggung sumbu- x . Buat titik potong sumbu- x dan sumbu- y untuk menghasilkan titik potong E . Buat segment garis dari titik E ke titik D . Warnai obyek garis ED dengan biru dan tebalkan ukuran garisnya. Klik Baris Peralatan 6 pilih/klik Busur Sirkular dengan Pusat melalui Dua Titik dan berturut-turut klik obyek titik C, D dan D' . Warnai dengan warna biru busur yang terbentuk dan tebalkan ukuran garisnya. Klik kanan obyek lingkaran c , klik Pengaturan lalu pilih menu Format, klik Format garis pilih garis putus-putus. Jangan tampilkan label dan obyek yang tidak diperlukan. Gerakan titik C kekiri atau kekanan amati apa hasilnya. Simpulkan apa hasilnya bila titik C sampai pada tepi ujung paling kiri dan yang paling kanan.

Apa yang telah dibahas menjelaskan bahwa keliling lingkaran didapat dengan membentangkan lingkaran menjadi suatu garis lurus yang panjangnya sama dengan Panjang keliling lingkaran. Untuk melakukan bentangan lingkaran menjadi garis lurus yang panjangnya sama dengan keliling lingkaran bisa juga dilakukan sebagai berikut. Klik Baris Peralatan 10 dan pilih Luncuran. Klik pilihan Sudut, isi minimum 0° , maksimum 180° dan kenaikan 1° selanjutnya klik Oke. Pada baris input ketik $(\alpha, 1)$ disini α adalah nama luncuran (slider). Hal ini akan menghasilkan titik $A = (\alpha, 1)$. Buat lingkaran pusat A dengan jari-jari 1. Hal ini bisa dilakukan dengan memasukkan perintah Lingkaran($A,1$) pada baris input. Klik Baris Peralatan 2 lalu pilih Perpotongan Dua Objek. Klik obyek lingkaran dan garis sumbu- x . Sehingga didapat titik B . Klik Baris Peralatan 9 lalu pilih/klik Rotasi Objek mengitari Titik dengan Sudut. Klik titik B obyek yang akan dirotasi dan klik titik A sebagai pusat rotasi dan isikan sudut $135.088 - x(A) * 180^\circ \frac{\alpha}{\pi}$ lalu klik Oke. Akan menghasilkan titik B' sebagai hasil rotasi dari titik B . Jangan tampilkan obyek lingkaran dalam gambar. Dalam Baris Peralatan 6, pilih/klik Busur Sirkular dengan Pusat melalui Dua Titik. Berturut-turut klik titik A, B dan B' akan menghasilkan busur d . Pilih Baris Peralatan 9 dan klik Refleksi Objek pada Garis. Klik obyek busur sirkular d dan sumbu- y . Lakukan hal yang sama untuk pencerminan titik B dan B' sehingga didapat busur sirkular d' sebagai hasil pencerminan busur sirkular d terhadap sumbu- y . Buat garis lurus dari titik B'_1 ke B . Beri warna merah garis : busur d' , B'_1 ke B dan busur d berikan ketebalan garis maksimum 13. Selanjutnya klik kanan obyek busur d , pilih/klik Pengaturan dan klik Lanjutan. Isi baris Kondisi menampilkan Objek dengan $\alpha \neq \pi$ lalu tekan enter. Lakukan hal yang sama pada obyek busur d' . Hidupkan animasi luncuran/slider. Amati dan simpulkan apa hasil animasi. Gambar berikut adalah hasil dari apa yang telah dibahas.



Apa yang telah dibahas ini dapat digunakan sebagai ide dasar untuk menghitung luas Luas Lingkaran : Sebagai mana dapat diakses di <https://www.geogebra.org/u/subiono> . Silahkan mencoba membuat perintah-perintahnya dengan Goegebra Klasik untuk menentukan luas suatu lingkaran sebagaimana ditampilkan dalam website <https://www.geogebra.org/u/subiono> Berikut adalah gambar hasil luas lingkaran.



Pembahasan mengenai Keliling lingkaran dan Luas Lingkaran akan dibahas lagi menggunakan konsep matematika kurva parametrik, yaitu kurva sikloida.

4.4 Perfektif 3D

Pada bagian ini dibahas Geometri Tiga Dimensi yang disingkat dengan Geometri 3D atau dikenal dengan istilah Geometri Ruang. Pembahasan juga berkaitan dengan bangun ruang sisi datar dan lengkung. Untuk membahas geometri ruang dalam Geogebra dilakukan aktifiatas membuat kubus, sebagai salah satu contoh bentuk bangun ruang sisi datar. Lalu dibuat animasi sehingga semua sisi-sisi kubus membuka menjadi bentangan bidang datar

terdiri dari 6 bidang persegi yang masing-masing merupakan sisi dari kubus. Langkahnya sebagai berikut:

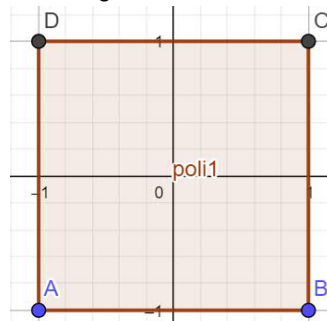
1. Buka Perspektif Graphing, klik Baris Peralatan 5 sehingga didapat gambar berikut



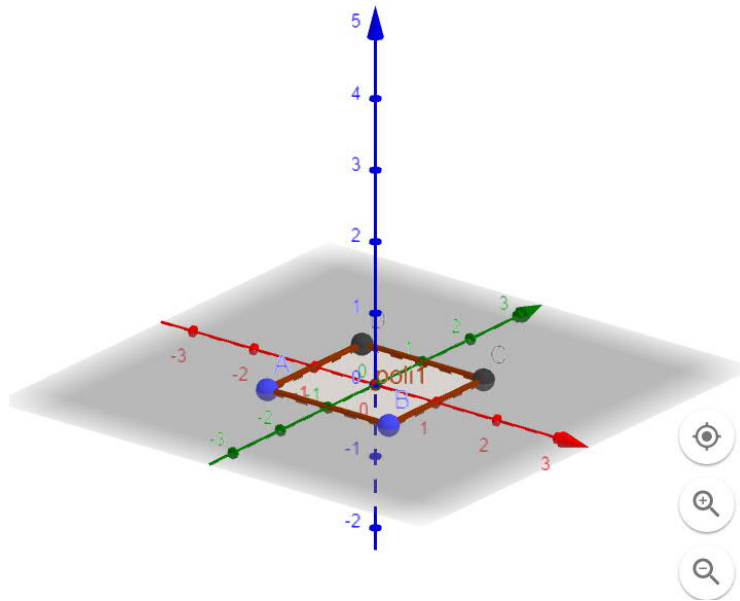
2. Selanjutnya Pilih Segi-n Beraturan lalu klik berturut dua titik $(-1,-1)$ dan $(1,-1)$ pada media grafik akan muncul gambar menu isian sebagai berikut



Sehingga menghasilkan gambar berikut.



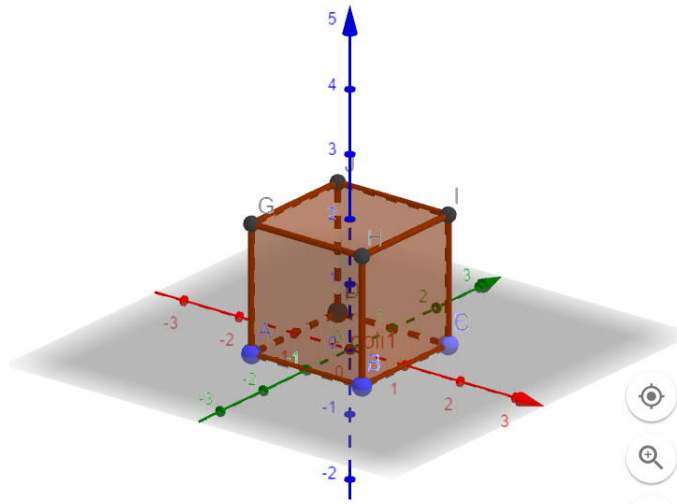
3. Selanjutnya pada Menu Utama Pilih Perspektif 3D Graphings sehingga didapat gambar berikut



Pada Baris Perlatan klik Baris Peralatan Piramida sehingga didapat gambar berikut

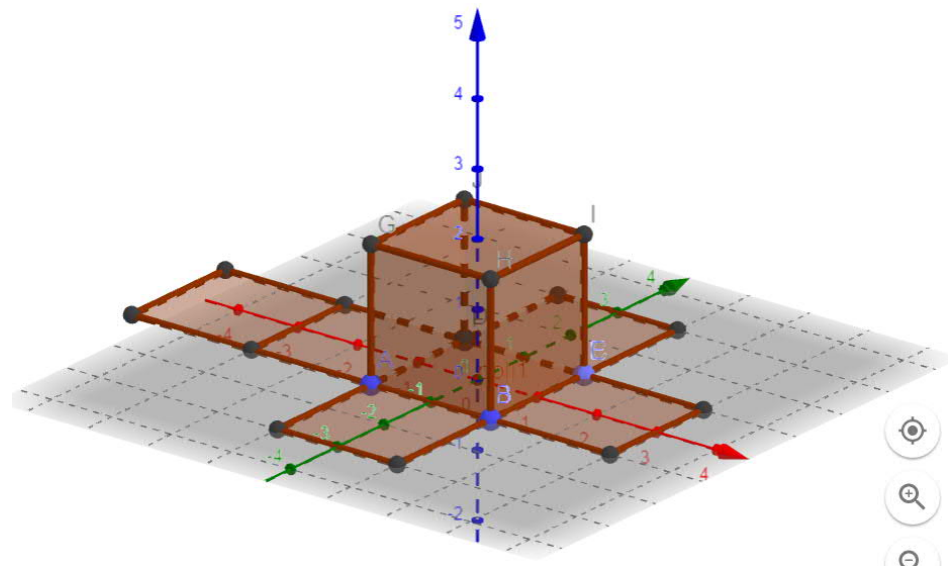


4. Lalu pada media grafik 3D klik dua titik A dan B sehingga didapat gambar berikut.

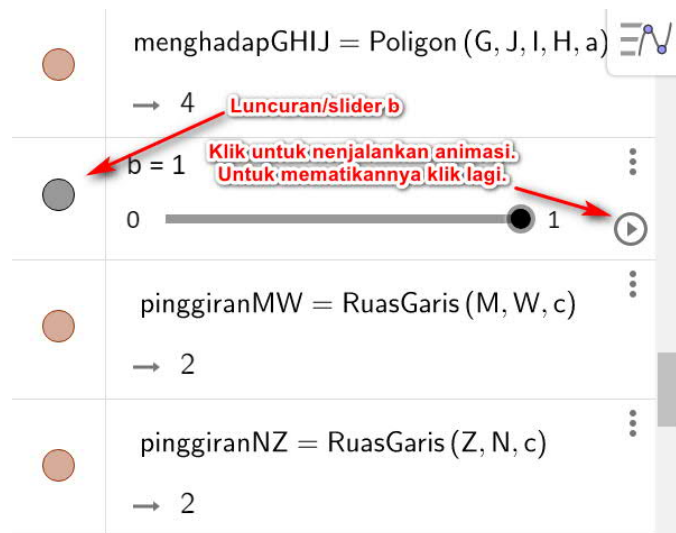


5. Untuk membuat animasi membentangkan sisi-sisi kubus pada Peralatan Piramida

klik/pilih Net sebagaimana gambar berikut  . Selanjutnya pada media grafi 3D klik gambar obyek kubus sehingga menghasilkan gambar berikut.

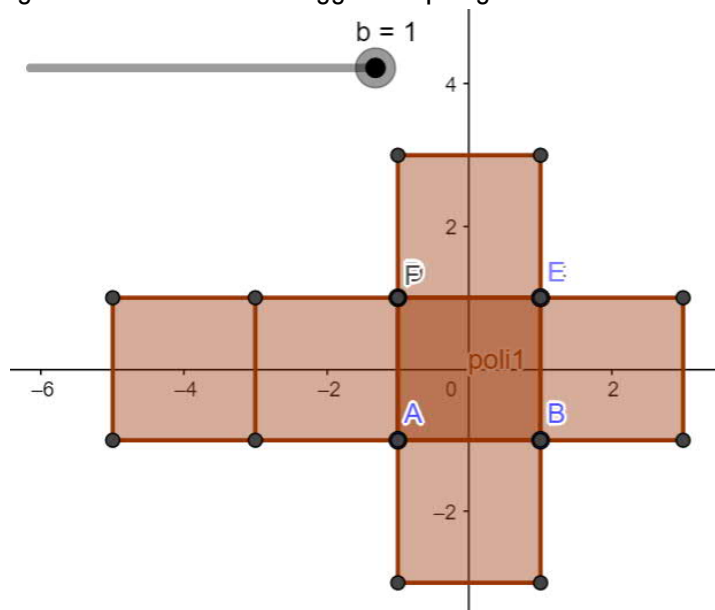


6. Untuk melakukan animasi, pada Baris Input cari Luncuran b sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut.



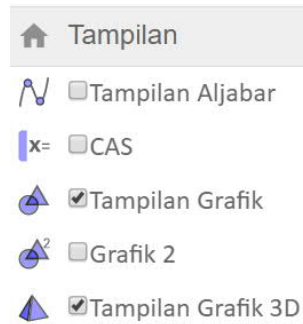
Klik Tombol aktif/tidak aktif dari luncuran b, maka gambar obyek kubus sisi-sisinya akan membuka dan akan menutup kembali begitu seterusnya. Perhatikan bahwa dari gambar tampak bahwa nilai Luncuran b minimum adalah 0 dan maksimum 1. Jadi bila nilai $b=0$, maka animasi akan direset keposisi awal. Dalam hal ini sisi-sis kubus kembali ke keadaan awal (menutup). Bila nilai $b=1$, maka semua sisi-sisi gambar obyek kubus terbuka yang terletak pada satu bidang datar.

7. Untuk melihat Luncuran b juga bisa dilihat dengan memindah Perfektif ke mode Graphing. Lakukan hal ini sehingga didapat gambar berikut.

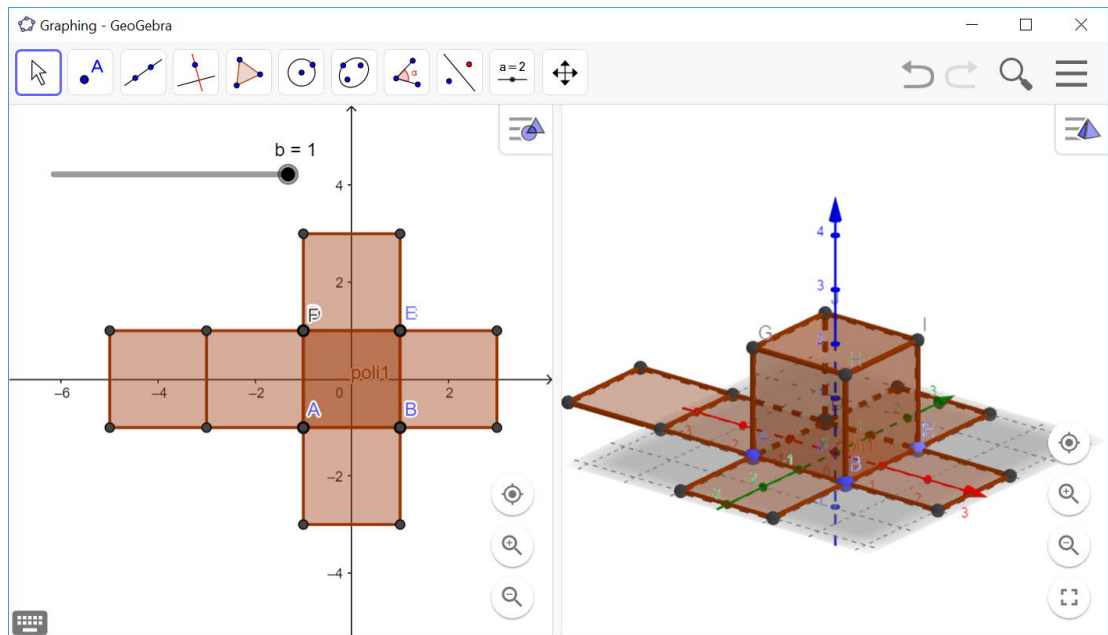


Terlihat bahwa pada saat $b=1$ semua sisi-sisi kubus terbuka dan terletak pada satu bidang datar.

8. Untuk menyatukan tampilan Perfektif Graphing dan 3D secara bersama lakukan hal berikut. Pada Menu Utama pilih/klik Tampilan. Selanjutnya centang pilihan Tampilan Grafik dan Tampilan Grafik 3D sebagaimana gambar berikut.



Bila hal ini dilakukan, maka akan menghasilkan gambar tampilan berikut.



Gerakan Luncuran b kekiri dan kekanan amati animasi dari gambar 3D disebelah kanannya, maka akan terjadi gerakan sisi-sisi dari kubus. Pada tampilan grafik bila nilai b tidak sama dengan 1, maka gambar 5 sisi kubus tidak muncul, yang muncul hanya gambar sisi dasar kubus yaitu persegi ABCD.

9. Pada langkah ini, Luncuran b tidak ditampilkan. Sebagai gantinya akan dibuat tiga tombol berkaitan dengan animasi dari Luncuran b . Untuk hal ini di atur animasi bergerak hanya satu kali dalam arah menaik. Klik kanan obyek Luncuran b lalu pilih Pengaturan dan klik Singgung . Sehingga didapat gambar berikut.

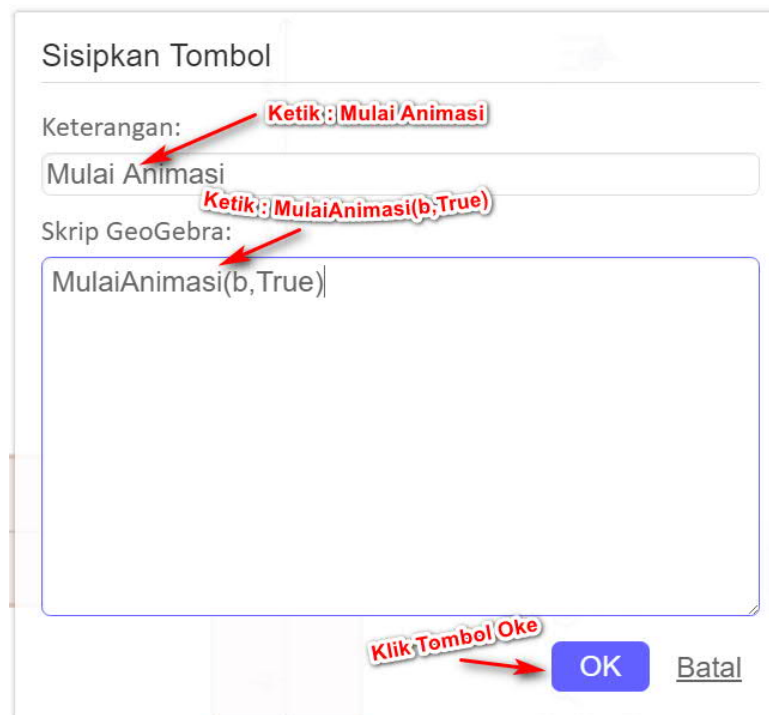
Dasar	Luncuran	Warna	Posisi	Lanjutan
Aljabar	Pembuatan Skrip			
minimum:		maksimum:	Kenaikan:	
0		1		
☐ tetap		☐ Acak	Horizontal ▾	
Kecepatan:		1		
Ulangi:		↔ Singgung Klik, lalu pilih Menaik (Sekali)		
☒ Show slider in Algebra View				
Format Titik				
Ukuran:		5	px	
Warna:				
Format garis				
Lebar:		200	px	
Ketebalan Garis:		5	px	

10. Klik kana obyek Luncuran b, lalu klik Tampilkan Objek supaya tanda centang hilang.

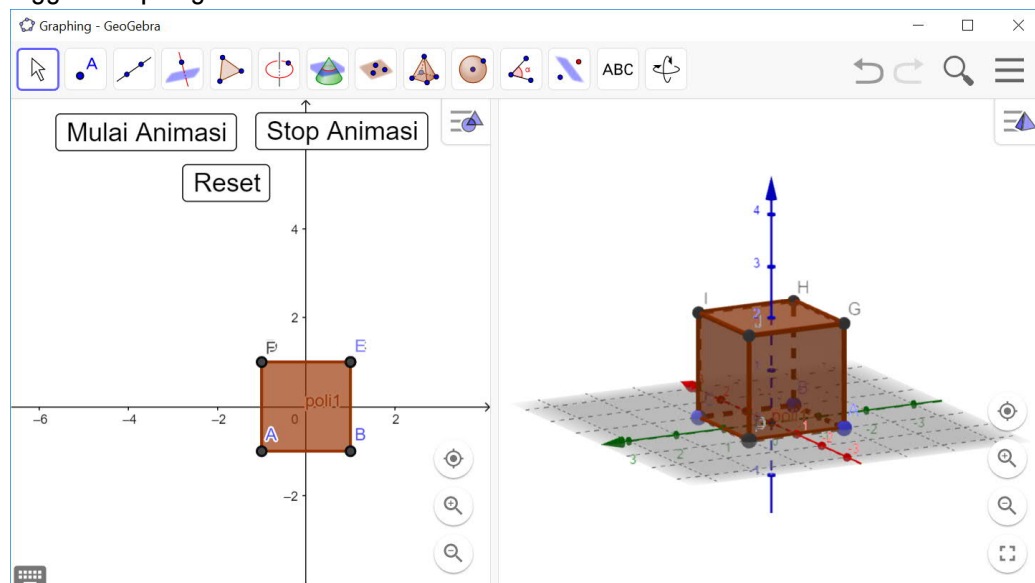
11. Pilih Baris Peralatan 10 (gambar Luncuran) sehingga muncul gambar berikut.



12. Letakkan mouse pada media grafik lalu klik sehingga didapat gambar berikut.



13. Ulang lagi Langkah 12 dan Keterangan diisi Stop Animasi sedangkan Skrip GeoGebra diisi MulaiAnimasi(b,False)
14. Ulang lagi Langkah 12 dan Keterangan diisi Reset sedangkan Skrip GeoGebra diisi $b=0$. Sehingga didapat gambar berikut.



Untuk melakukan animasi klik Tombol Mulai Animasi untuk menghentikan klik Tombol Stop Animasi. Sedangkan mengembalikan obyek kubus dalam keadaan semula klik Tombol Reset.

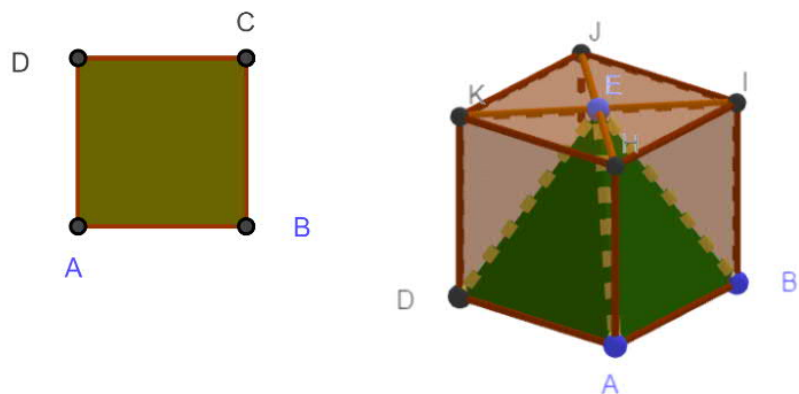
Pada bahasan berikut ini, coba buat dalam Geogebra apa yang dihasilkan oleh gambar-gambar berikut yang merupakan hasil yang serupa dengan apa yang dibahas sebelumnya. Hanya saja didalam kubus ada suatu piramida dan animasinya terdiri dari

dua animasi, yaitu animasi untuk sisi-sisi kubus dan animasi untuk sisi-sisi piramida. Pembaca dipersilahkan mencobanya dalam Geogebra.

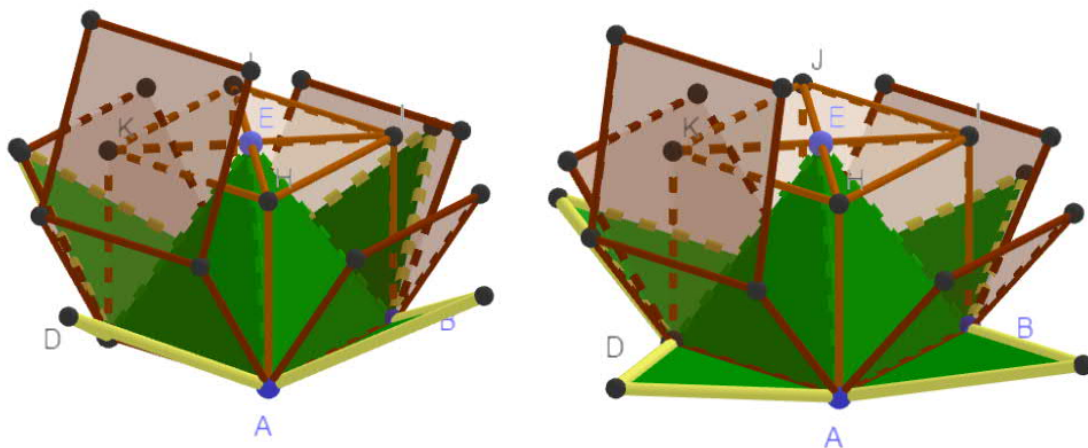
Mulai Animasi

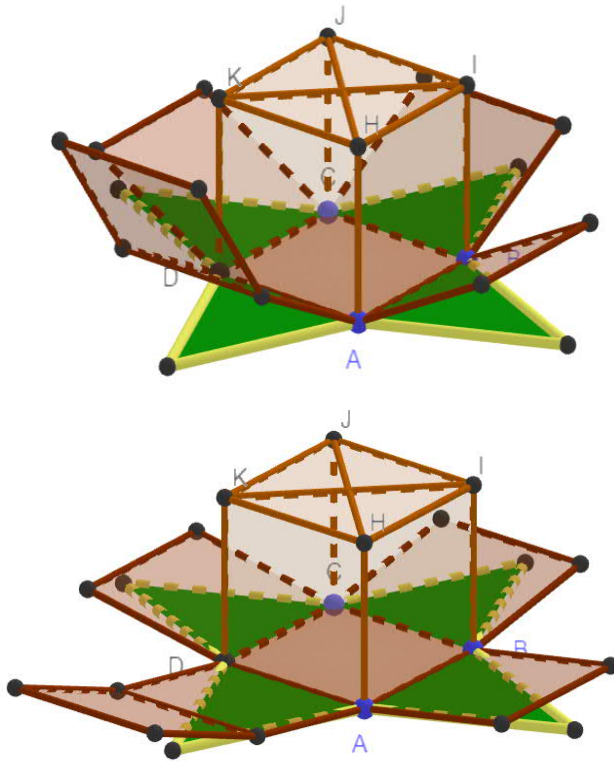
Stop Animasi

Reset

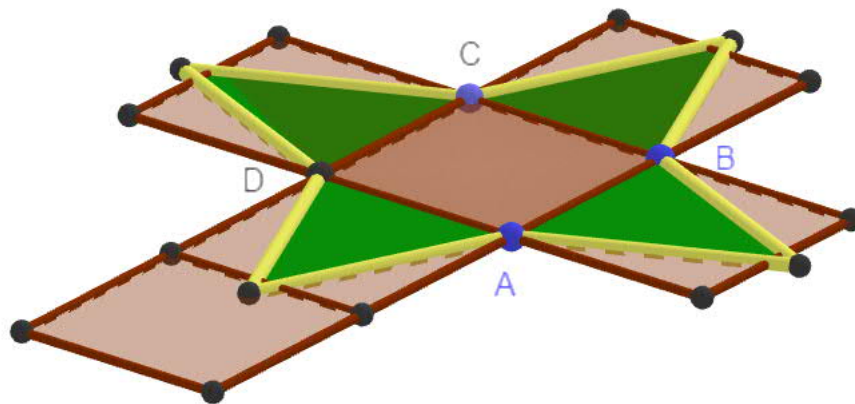


Dalam Kubus ada suatu Piramida, bila tombol Mulai Animasi diklik, maka terjadi animasi sisi-sisi Kubus dan sisi-sisi Piramida akan membuka. Untuk menghentikan animasi klik tombol Stop Animasi. Untuk menghentikannya klik lagi tombol Mulai Animasi. Bila hal ini dilakukan akan diperoleh hasil beberapa gambar berikut.



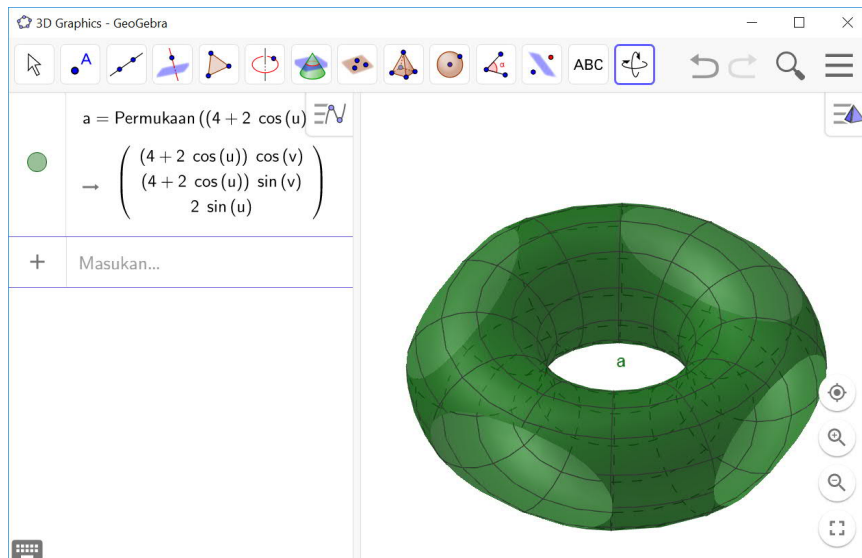


Hasil akhir dari animasi diberikan oleh gambar berikut.



Bentuk ruang sisi datar yang berikutnya adalah balok.

Dalam Perspektif 3D, pada Baris Input dapat digunakan perintah untuk menggambar permukaan dari suatu kurva. Buka Perspektif 3D dan pada Baris Input ketik : Permukaan((4 + 2 cos(u)) cos(v) , (4 + 2 cos(u)) sin(v) , 2 sin(u) , u, 0, 2 π , v, 0, 2 π) lalu tekan Enter akan menghasilkan gambar torus berikut.

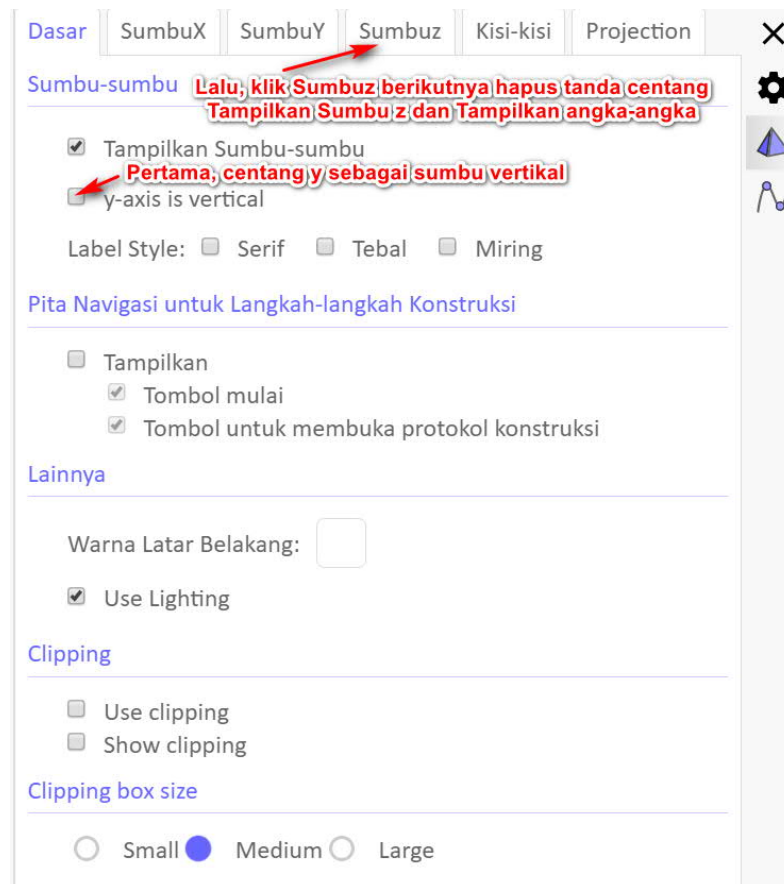


Aktifitas berikut adalah membuat putaran dari dari kurva diputar pada suatu sumbu. Kurva yang diputar adalah $f(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2$, $0 \leq x \leq 4$ dan $g(x) = 1 + 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$. Diputar mengelilingi sumbu- x dengan sudut putar $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Hasilnya akan ditampilkan dalam media grafik 3D. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Buka Perspektif 3D, klik tampilan gambar  , sehingga muncul tampilan berikut

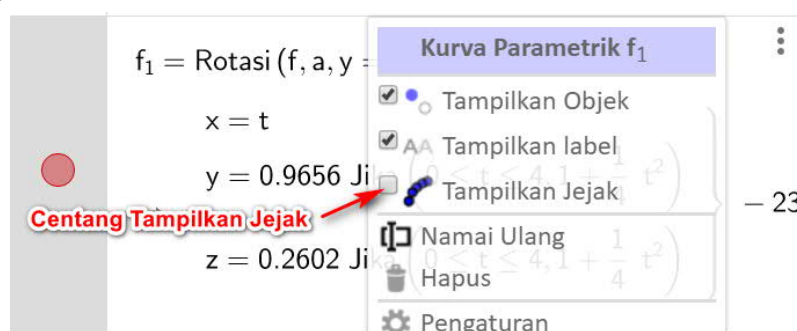


Selanjutnya akan muncul tampilan menu berikut



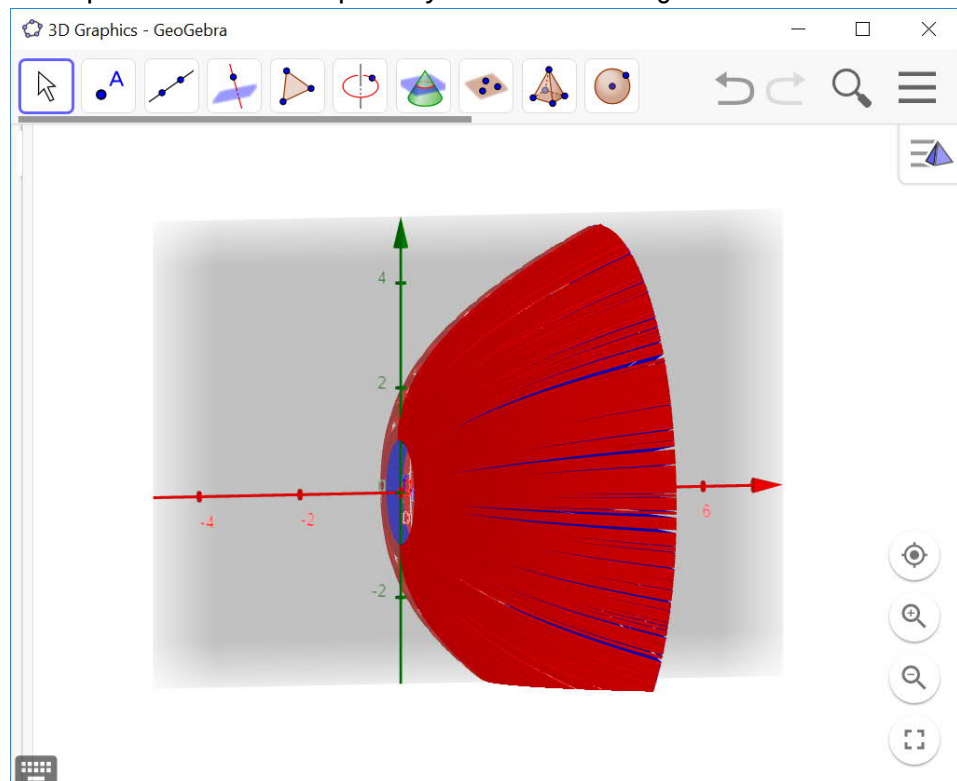
Lalu klik tanda silang $\times$.

2. Buka Menu Utama, klik pilihan Tampilan selanjutnya centang masing-masing pilihan Tampilan Aljabar dan Tampilan Grafik.
3. Klik media Tampilan Grafik dan pada Baris Input ketik perintah Fungsi($1 + \frac{1}{4}x^2$, $0 \leq x \leq 4$), lalu tekan Enter. Pada Baris Input berikutnya ketik perintah Fungsi($1 + 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$), tekan Enter.
4. Klik media Tampilan Grafik, buat Luncuran a dengan nilai minimum 0 dan maksimum 2π dan kenaikan 0.001 jangan lupa klik Oke.
5. Klik kanan obyek Luncuran a, kecepatan isi dengan nilai 0.5 tekan Enter dan Ulangi : pilih $\Rightarrow$ **Kenaikan**
6. Dalam Baris Input, klik kanan obyek f_1 hasil rotasi dari $f(x)$, sehingga didapat gambar berikut.



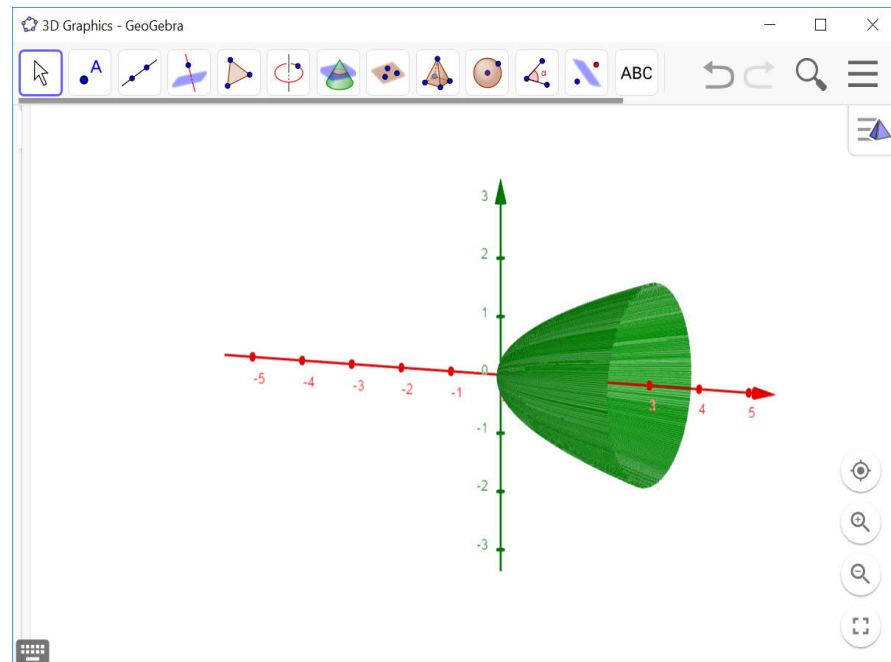
7. Lakukan hal yang sama tetapi untuk obyek g_1 hasil rotasi dari $g(x)$.

8. Hidupkan animasi dari Luncuran a, amati animasi pada grafik 3D dari perputaran $f(x)$ dan $g(x)$ terhadap sb-x. Hasil benda putarnya diberikan oleh gambar berikut.

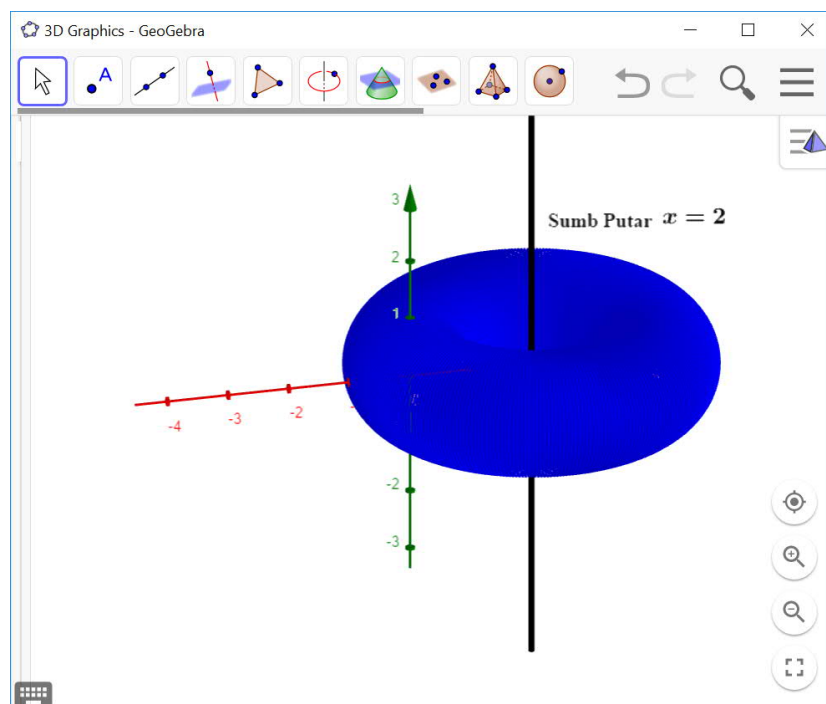


Latihan :

1. Buat fungsi $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$ diputar pada sumbu-x dengan sudut putar $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Hasilnya diberikan oleh gambar berikut.

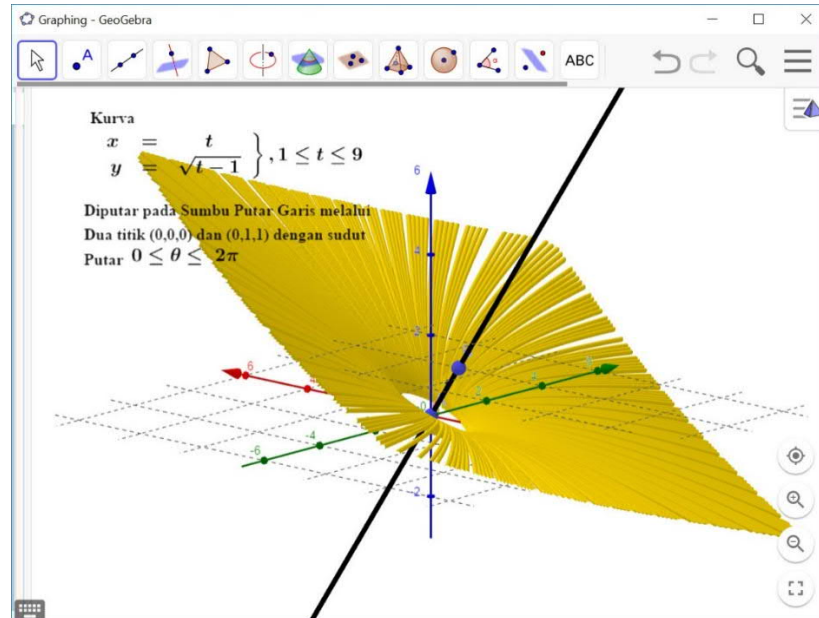


2. Buat lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ diputar pada sumbu putar $x = 2$ dengan sudut putar $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Hasilnya merupakan suatu torus yang diberikan oleh gambar berikut.

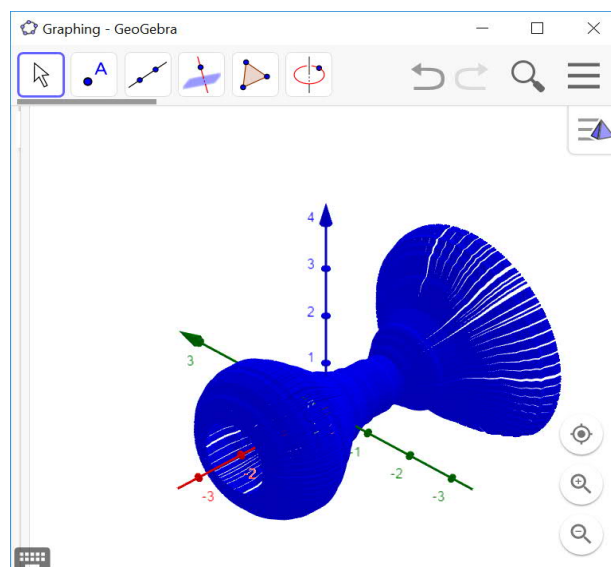


3. Buka Perspektif 3D, pada Baris Input ketik titik (0,0,0) tekan Enter, lakukan lagi perintah pada Baris Input berikutnya titik (0,1,1) tekan Enter. Pada Baris Input ketik Garis(A,B) (membuat garis melalui titik (0,0,0) dan (0,1,1) pada 3D). Pada Baris Input berikutnya ketik Kurva($t, \sqrt{t}, t, 1 \leq t \leq 1$) tekan Enter. Lalu pada Perspektif Graphing buat Luncuran Sudut α , isi minimum 0 dan maksimum 360° kenaikan 1° klik Oke. Pada Baris Input ketik Rotasi(a, α, f), dimana a adalah obyek Kurva($t, \sqrt{t}, t, 1 \leq t \leq 1$)

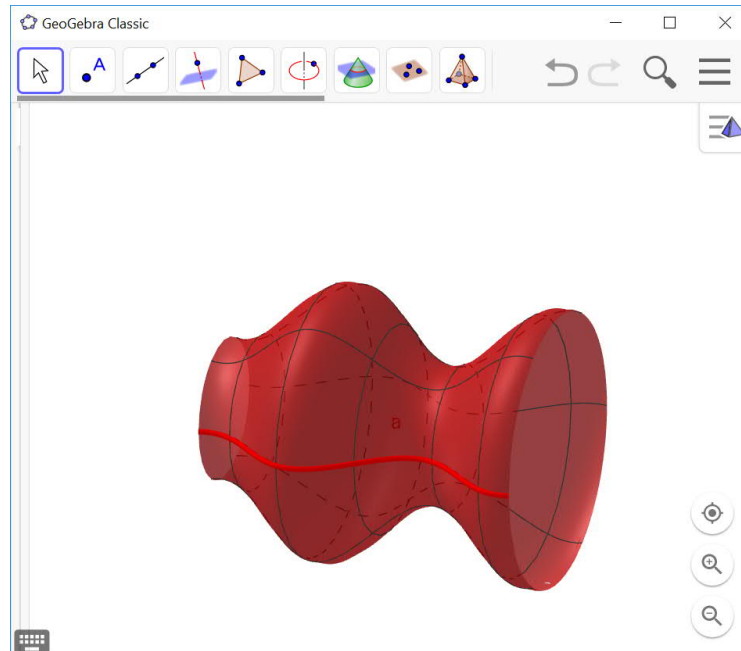
sedangkan f adalah hasil Garis(A,B) tekan Enter akan menghasilkan obyek rotasi a' . Klik kanan obyek a' lalu centang Tampilkan Jejak selanjutnya hidupkan animasi Luncuran α , maka akan terjadi hasil benda putar dari kurva a pada garis f dengan sudut putar α . Hasil Gambarnya sebagai berikut.



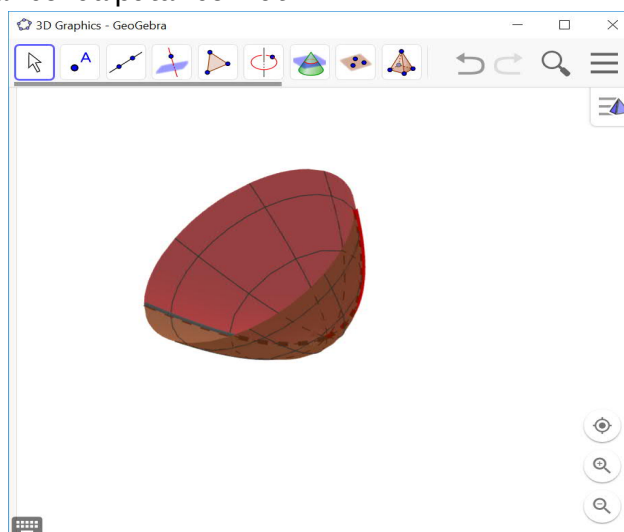
4. Buka Perspektif Graphing, pada Baris Peralatan 1 pilih/klik Bentuk Tulisan Tangan dengan alat ini gambar fungsi $f(x)$. Buat Luncuran θ , isi minimum 0° , maksimum 360° dan kenaikan 1° klik Oke. Pada Baris Input ketik Rotasi($f, \theta, y=0$) tekan Enter. Klik kanan obyek f , pilih Warna dengan biru, klik Format, jadikan Ketebelan Garis menjadi 2 dan Line Opacity dengan 15. Hal yang sama Lakukan pada obyek f_1 hasil Rotasi($f, \theta, y=0$). Klik Dasar dan centang Tampilkan Jejak. Hidupkan animasi θ . Maka akan menghasilkan gambar benda putar berikut.



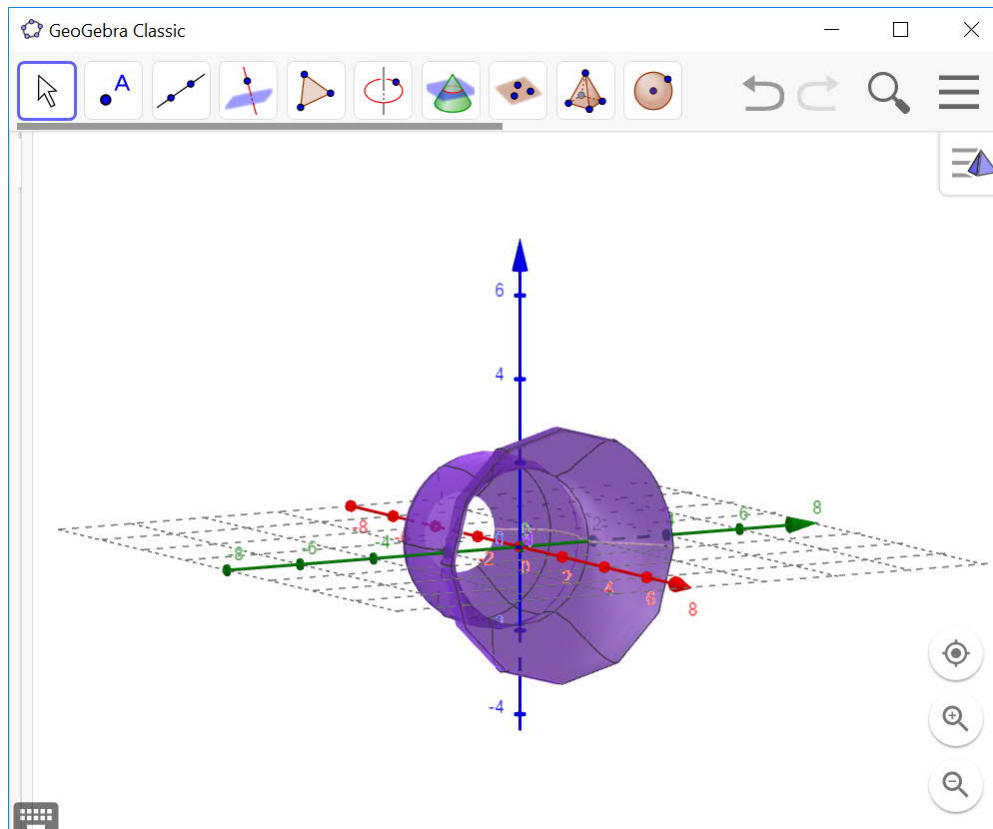
5. Buka Perpektif Graphing, pada Baris Peralatan 10 pilih/klik Luncuran θ , isi minimum 0° , maksimum 360° dan kenaikan 1° , Ulangi : $\Rightarrow$ Menaik (Sekali) klik Oke. Pada Baris Input ketik $\sin x + 3, -5 \leq x \leq 5$ (membuat fungsi $f(x)$) tekan Enter. Pada Baris Input berikutnya ketik Permukaan(f, θ , SumbuX). Hidupkan animasi θ dan buka Perfektif 3D, maka akan menghasilkan gambar benda putar berikut.



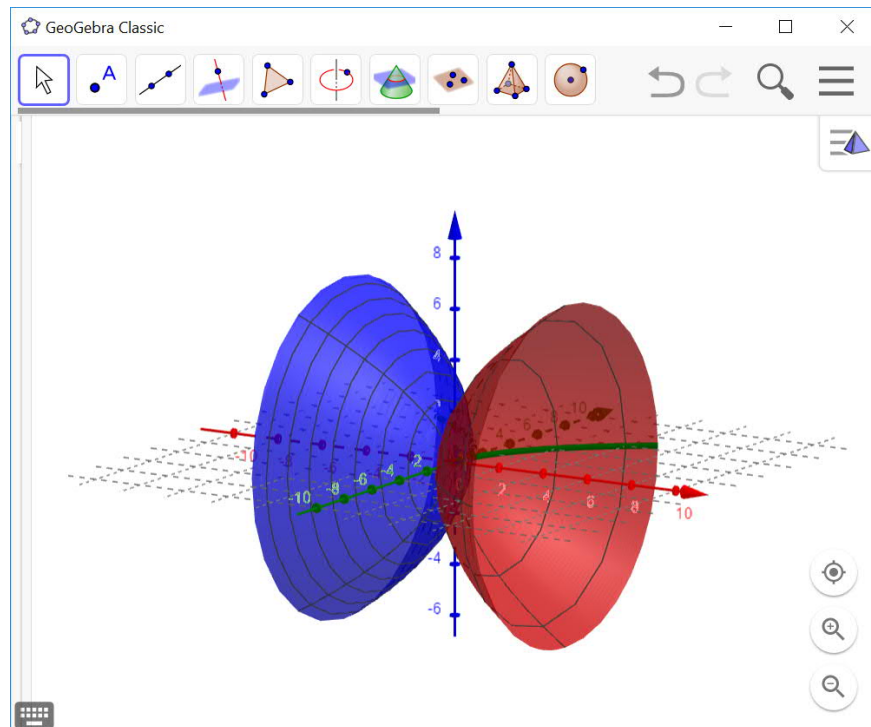
6. Buka Perpektif Graphing, pada Baris Peralatan 10 pilih/klik Luncuran θ , isi minimum 0° , maksimum 180° dan kenaikan 1° , Ulangi : $\Rightarrow$ Menaik (Sekali) klik Oke. Pada Baris Input ketik $2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 5$ (membuat fungsi $f(x)$) tekan Enter. Pada Baris Input berikutnya ketik $-2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 5$ (membuat fungsi $g(x)$) tekan Enter. Pada Baris Input berikutnya ketik Permukaan(f, θ , SumbuX). Pada Baris Input berikutnya ketik Permukaan(g, θ , SumbuX). Hidupkan animasi θ dan buka Perfektif 3D, maka akan menghasilkan gambar benda putar berikut.



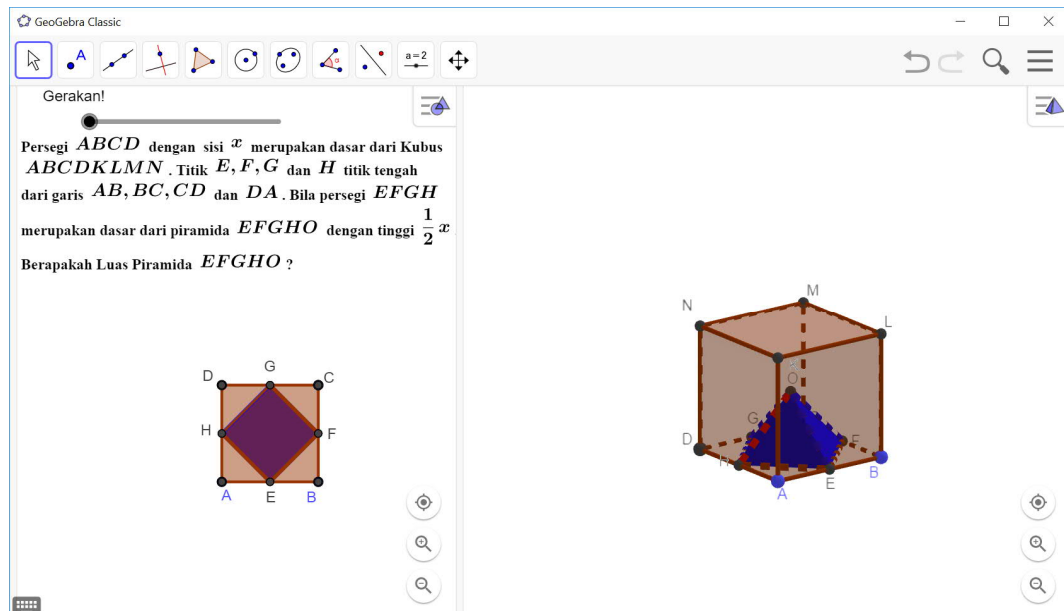
7. Buka Perpektif Graphing, pada Baris Peralatan 1 pilih/klik Bentuk Tulisan Tangan dengan alat ini gambar fungsi $f(x)$. Buat Luncuran θ , isi minimum 0° , maksimum 360° dan kenaikan 1° , Ulangi : $\Rightarrow$ Menaik (Sekali) klik Oke. Pada Baris Input ketik Permukaan(f, θ , SumbuX) tekan Enter. Hidupkan animasi θ dan buka Perfektif 3D, maka akan menghasilkan gambar benda putar berikut.



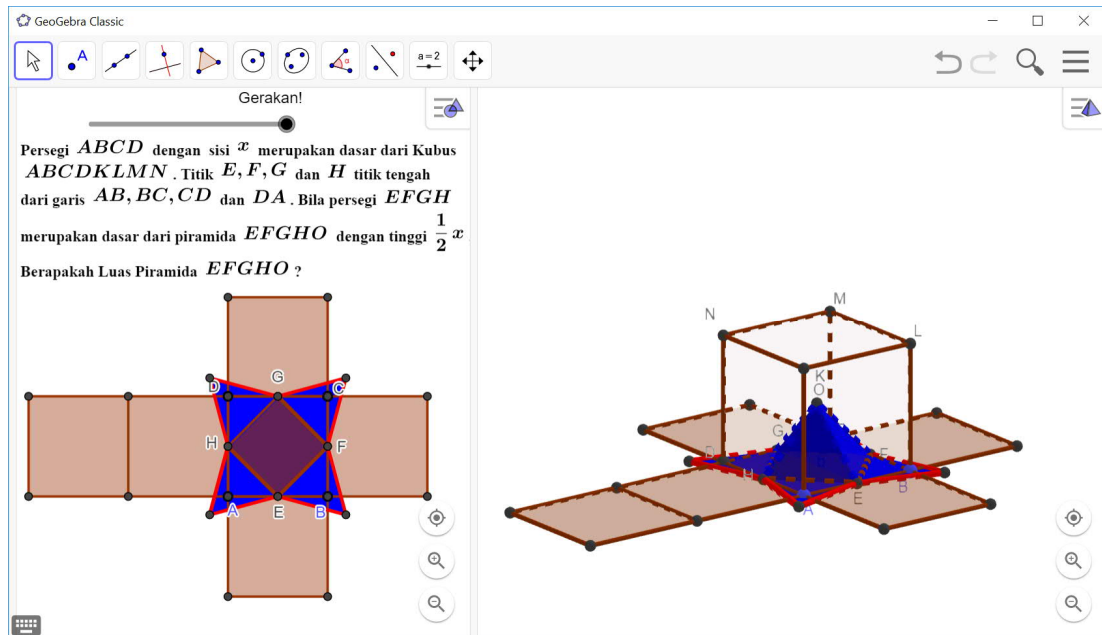
8. Buka Perpektif Graphing, pada Baris Peralatan 10 pilih/klik Luncuran θ , isi minimum 0° , maksimum 360° dan kenaikan 1° , Ulangi : $\Rightarrow$ Menaik (Sekali) klik Oke. Pada Baris Input ketik $3\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 5$ (membuat fungsi $f(x)$) tekan Enter. Pada Baris Peralatan 9 pilih/klik Refleksi Objek pada Garis, pada media Grafik klik obyek f dan garis sumbu- y . Akan menghaikan fungsi f_1 . Pada Baris Input ketik Permukaan(f, θ) tekan Enter. Pada Baris Input berikutnya ketik Permukaan(f_1, θ) tekan Enter. Hidupkan animasi θ dan buka Perfektif 3D, maka akan menghasilkan gambar benda putar berikut.



9. Buat aktifitas dengan menggunakan perintah fasilitas Net untuk membuat animasi membuka sisi-sisi kubus dan sisi-sisi piramida didalam kubus sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.

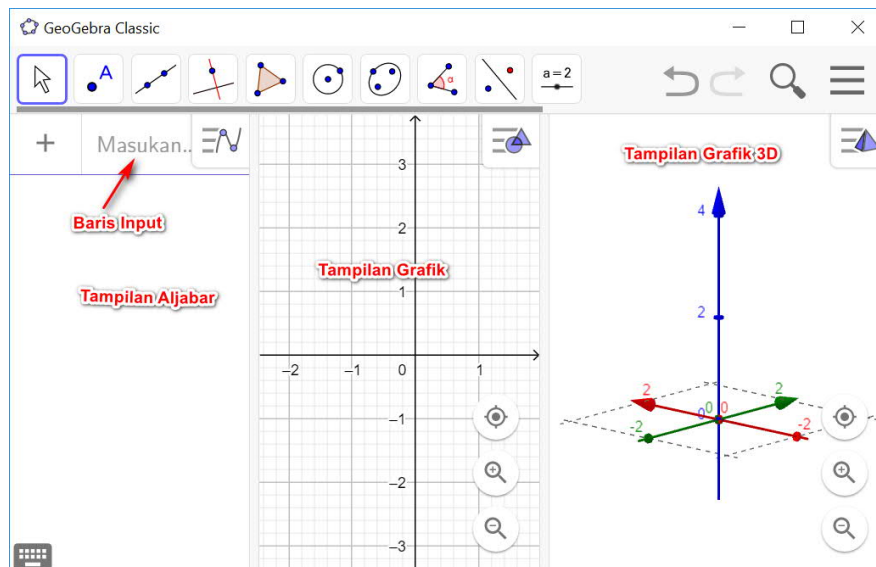


Selanjutnya dengan menggerakkan Luncuran Gerakan! didapat gambar berikut.



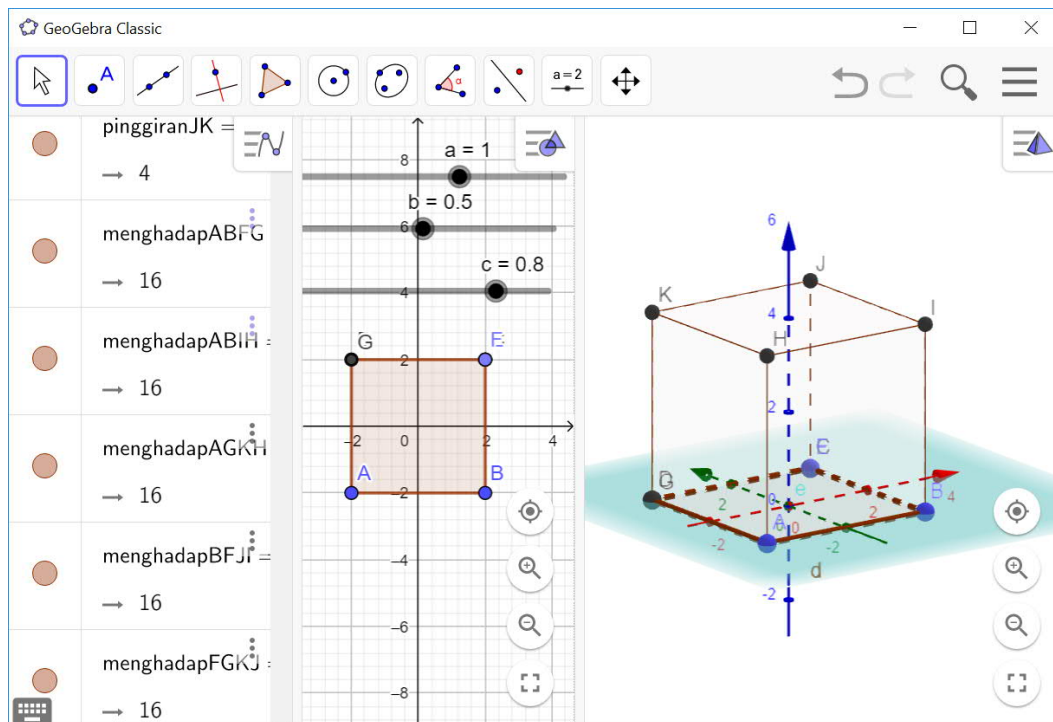
Hitung luas Piramida EFGHO melalui gambar bidang datar bagian sebelah kiri.

10. Ulangan lagi Aktifitas 9, tetapi obyek kubus diganti dengan obyek Piramida dan Prisma.
11. Buka Menu Utama, klik Tampilan lalu centang (✓) Tampilan Aljabar, Tampilan Grafik dan Tampilan Grafik 3D. Maka akan didapat tampilan Geogebra sebagaimana gambar berikut.

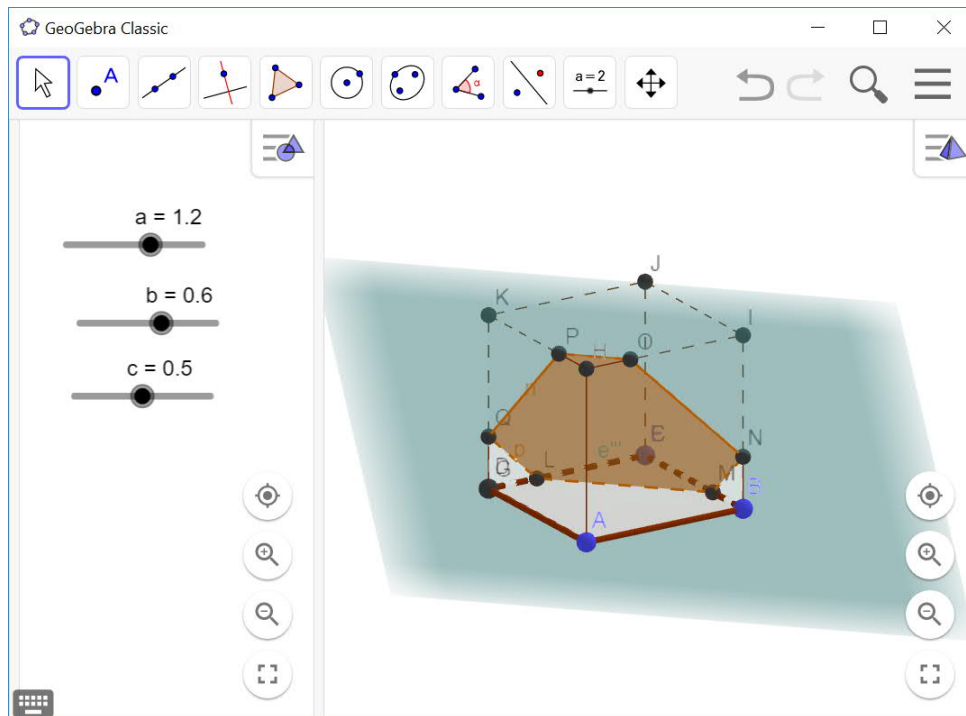


Klik Baris Peralatan 10, pilih/klik Luncuran untuk membuat Luncuran a letakkan kursor di Tampilan Grafik isi minimum dengan -3 dan maksimum dengan 5 kenaikan dengan 0.1 klik Oke. Ulangi hal ini berturut-turut untuk membuat Luncuran b dan c. Selanjutnya masing-masing luncuran isi minimum dengan 0 dan maksimum dengan 1 kenaikan dengan 0.1 klik Oke. Pada Tampilan 3D klik kanan lalu lepas tanda centang Kisi-Kisi dan Plane. Pada Tampilan Grafik buat poli1 : segi-4 beraturan dengan panjang sisi 4. Klik pada Tampilan Grafik 3D untuk membuat kubus dengan panjang rusuk 4. Pada Tampilan Grafik 3D klik Baris Peralatan 9 lalu pilih/klik Cube dan pada Tampilan

Grafik 3D klik Titik A dan B. Pada obyek kubus d klik kanan lalu pilih Pengaturan. Selanjutnya pilih Warna, opasitas jadikan nol dan pilih Format lalu jadikan Ketebalan Garis 1 dan Line Opacity 5. Pada Baris Input ketik $z=0$ untuk membuat bidang e, tekan Enter. Sehingga didapat gambar berikut.



Pada Baris Input Ketik Vektor((0,0,0),(0,0,a)) untuk membuat vector u, tekan Enter. Jangan tampilkan obyek vector u. Jangan tampilkan obyek bidang e. Pada Baris Input ketik Translasi(e,u) untuk membuat bidang translasi e', tekan Enter. Gerakan Luncuran a, maka bidang e' akan bergerak searah vector u dan memotong kubus d. Jangan tampilkan obyek e'. Pada Baris Input ketik Rotasi(e', $\frac{\pi}{2} * b$, (0,0,a), SumbuY) untuk menghasilkan rotasi bidang e'', tekan Enter. Jangan tampilkan obyek e''. Pada Baris Input ketik Rotasi(e'', $\frac{\pi}{2} * c$, (0,0,0), SumbuZ) untuk menghasilkan rotasi bidang e''', tekan Enter. Pada Baris Peralatan 3D pilih/klik Memotong dua Permukaan. Lalu berturut-turut klik Obyek kubus d dan obyek e''', maka akan menghasilkan irisan bidang e''' dengan kubus d dan gerakan Luncuran a, b dan c secara bergantian akan menghasilkan gambar berikut.



12. Buat aktifitas sebagaimana dalam Latihan 11, tetapi kubus diganti dengan Piramida, Prisma, Kerucut, Silinder dan Bola.

4.5 Kurva Parametrik 2D dan 3

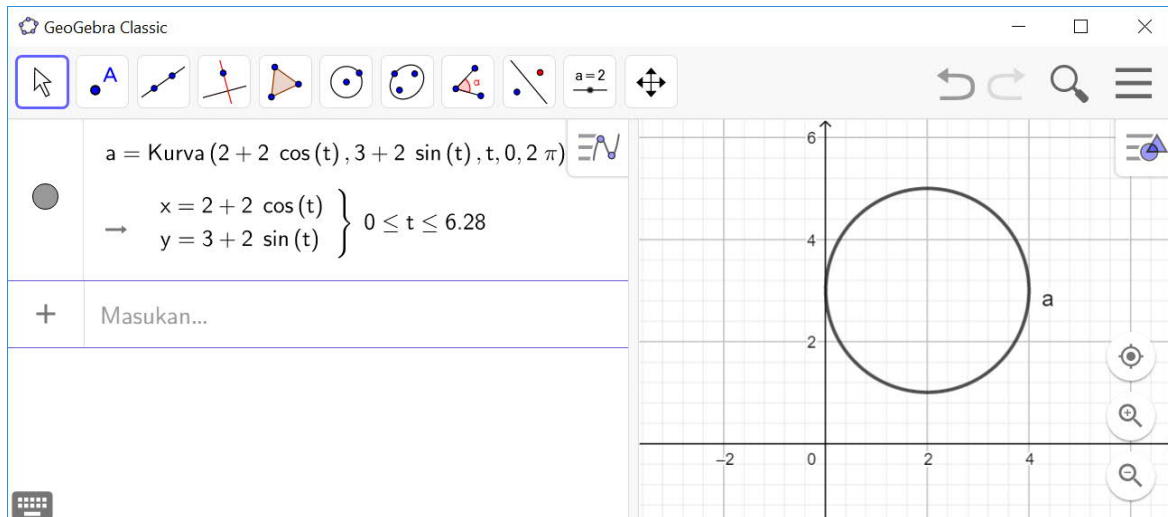
Pada bagian dibahas Kurva Parametrik dalam 2D dan 3D. Kurva Parametrik sangat penting untuk menggambarkan grafik baik dalam 2D ataupun 3D. Misalnya grafik lingkaran pusat di (2,3) dengan jari-jari 2 pada koordinat kertesian diberikan oleh persamaan

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2.$$

Grafik lingkaran tersebut dalam bentuk parametrik diberikan oleh persamaan

$$x(t) = 2 + 2 \cos(t), y(t) = 3 + 2 \sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Untuk menggambarkan kurva parametrik ini dalam Baris Input ketik Kurva(2+2cos(t),3+2sin(t),t,0, 2π) tekan Enter akan menghasilkan gambar berikut.



Secara umum persamaan lingkaran pusat (a,b) dan jari-jari r dalam bidang kartesius diberikan oleh persamaan berikut

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Bentuk persamaan lingkaran tersebut dalam parametrik adalah

$$x(t) = a + r \cos(t), \quad y(t) = b + r \sin(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sehingga untuk kurva parametrik lingkaran pusat (a,b) jari-jari r , dalam Baris Input ketik perintah

$$\text{Kurva}(a+r\cos(t), b+r\sin(t), t, 0, 2\pi),$$

lalu tekan Enter. Selanjutnya selidiki dan jelaskan bahwa bila pada Baris Input dimasukkan perintah

$$\text{Kurva}(\sin(e^t), \cos(e^t), t, \ln(\pi), \ln(3\pi)),$$

Menghasilkan gambar lingkaran pusat $(0,0)$ jari-jari 1 dalam hal ini sama dengan gambar grafik persamaan

$$x^2 + y^2 = 1.$$

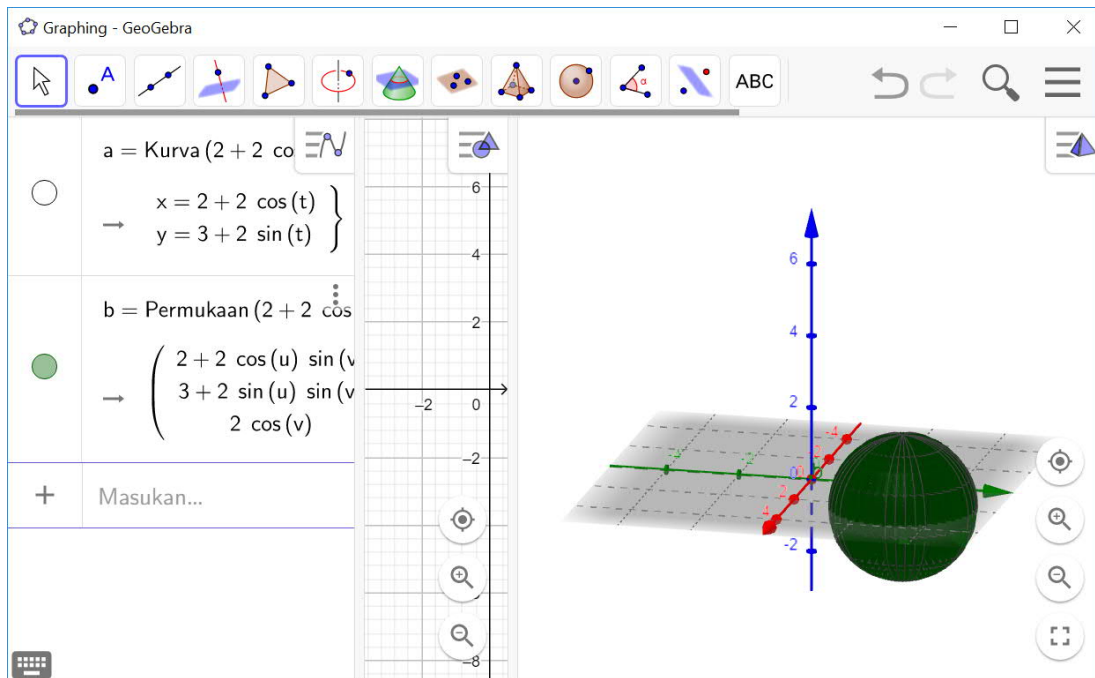
Untuk menampilkan permukaan bola dengan persamaan

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2^2$$

Menggunakan kurva parametrik dalam Geogebra ketik dalam Baris Input perintah berikut

$$\text{Permukaan}(2+2\cos(u)\sin(v), 3+2\sin(u)\sin(v), 2\cos(v), u, 0, 360, v, 0, 180)$$

lalu tekan Enter, akan menghasilkan gambar berikut.



Secara umum persamaan bola pusat (a,b,c) dan jari-jari r dalam koordinat kartesius diberikan oleh persamaan berikut

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Bentuk persamaan bola tersebut dalam parametrik adalah

$$x(u, v) = a + r \cos(u) \sin(v), y(u, v) = b + r \sin(u) \sin(v), z(v) = c + r \cos(v), 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi.$$

Sehingga untuk kurva parametrik bola pusat(a,b,c) jari-jari r, dalam Baris Input ketik perintah

$$\text{Permukaan}(a+r \cos(u)\sin(v), b+r \sin(u)\sin(v), c+r \cos(v), u, 0, 360, v, 0, 180),$$

lalu tekan Enter.

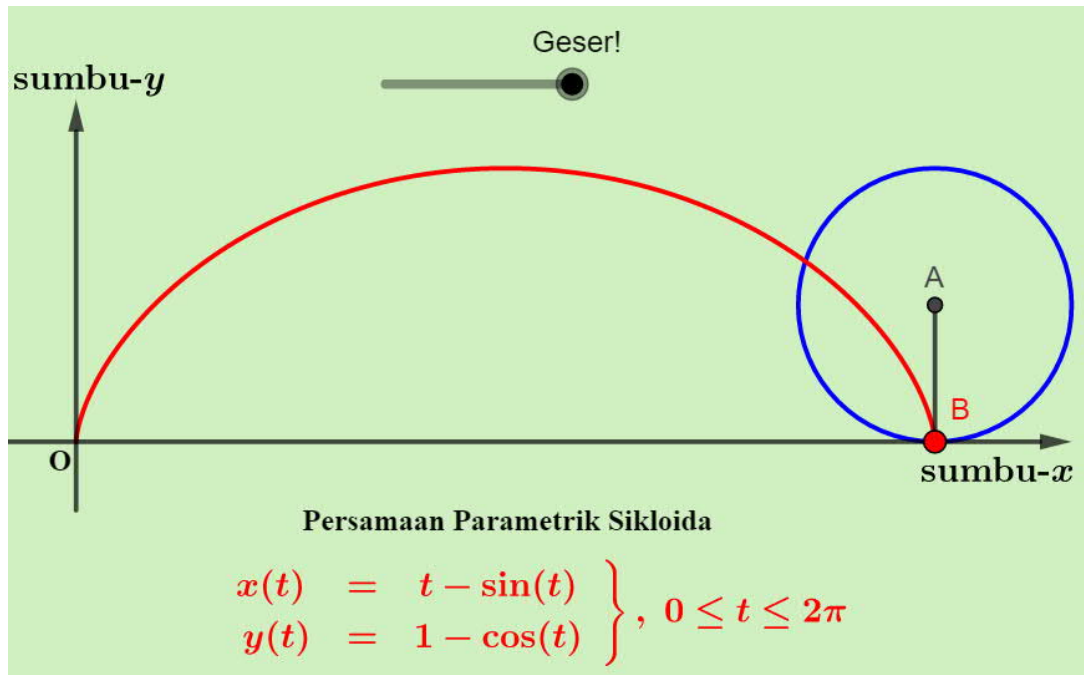
Kurva Parametrik Sikloida

Misalkan lingkaran pusat (0,1) dan jari-jari 1, bila B(0,0) titik pada lingkaran dan lingkaran diglindingkan sepanjang sumbu-x, maka lintasan dari pergerakan titik B dinamakan sikloida. Dalam hal ini persamaan parametrik dari sikloida adalah.

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t), t \in \mathbb{R}.$$

Untuk membuat kurva parametrik sikloida tersebut pada $0 \leq t \leq 2\pi$, buat Luncuran a, isi minimum 0, maksimum 1 dan kenaikan dengan 0.01 lalu klik Oke. Klik kanan obyek Luncuran a, klik Pengaturan, pilih Dasar. Ketik dalam Keterangan : Geser! Tekan Enter, klik kanan pada media grafik dan lepaskan tanda centang pada Sumbu-sumbu dan Kisi-kisi. Untuk merubah dasar warna tampilan grafik, lagi klik kanan tampilan grafik lalu pilih Tampilan Grafik.., klik Dasar lalu klik kotak pada Warna Latar Belakang pilih warna sesuai yang dikehendaki. Pada Baris Input ketik perintah Vektor((-0.5,0),(2π + 1,0)) lalu tekan Enter untuk

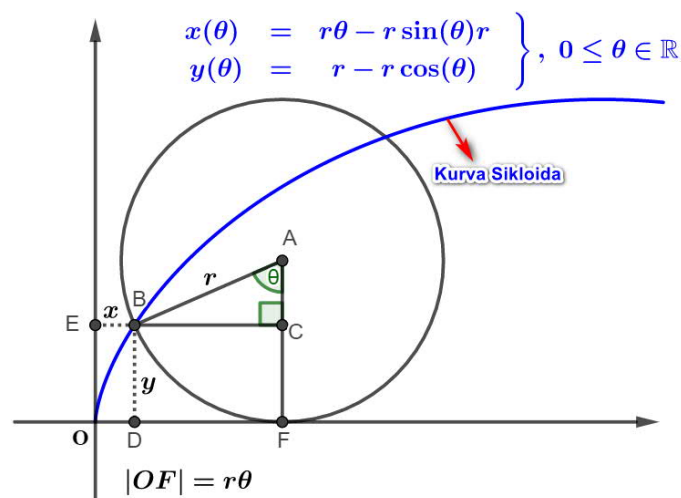
membuat vector u sebagai sumbu-x, pada Input Baris berikutnya ketik perintah `Vektor((0,-0.5),(0,2.5))` lalu tekan Enter untuk membuat vector v. Selanjutnya pada Baris Input buat titik A sebagai pusat lingkaran dengan mengetik `(2πa,1)` tekan Enter. Dengan cara yang sama buat titik B dengan mengetik perintah `(2πa-sin(2πa),1-cos(2πa))`. Selanjutnya membuat kurva sikloida, pada Baris Input ketik `Kurva(t-sin(t),1-cos(t),t,0, 2πa)` tekan Enter. Buat lingkaran pusat A jari-jari 1 dengan perintah `Lingkaran(A,1)`. Gerakan/geser Luncuran a, maka akan menghasilkan gambar berikut.



Secara umum bila lingkaran berjari-jari r , maka persamaan kurva sikloida diberikan oleh persamaan

$$x(\theta) = r\theta - r \sin(\theta), y(\theta) = r - r \cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}.$$

Untuk membuktikan kurva persamaan sikloida, perhatikan gambar berikut.



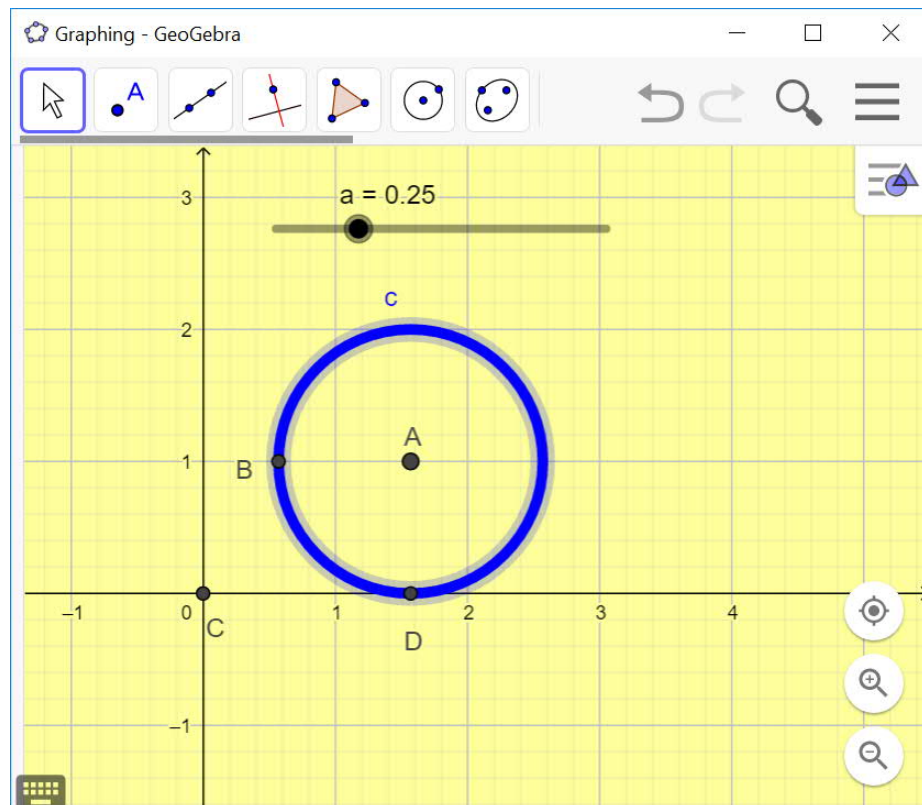
Titik sebarang titik $B(x, y)$ terletak pada kurva sikloida dan lingkaran pusat A jari-jari r . Dari gambar tampak bahwa

$$x = |OF| - |DF| = r\theta - |BC| = r\theta - r \sin(\theta)$$

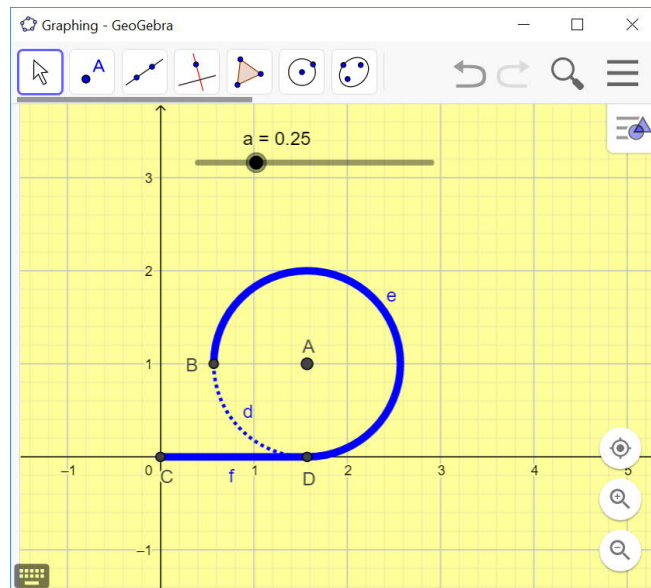
dan

$$y = |AF| - |AC| = r - |AC| = r\theta - r \cos(\theta).$$

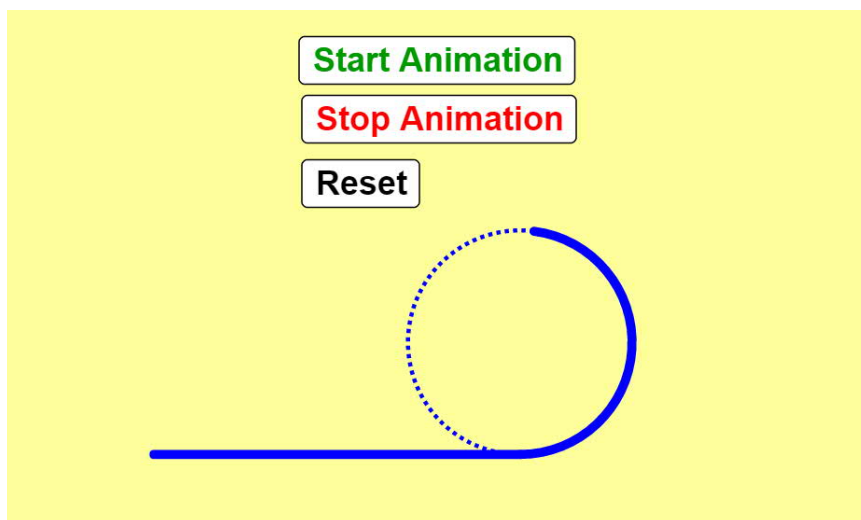
Pada pembahasan berikutnya akan dibuat animasi keliling lingkaran dan luas permukaan tabung tertutup menggunakan konsep kurva sikloida sebagaimana telah dibahas sebelumnya. Lakukan dengan membuat kurva sikloida sehingga didapat gambar berikut.



Luncuran a, nilai minimumnya 0 dan maksimumnya 1 serta kenaikan 0.01. Titik A adalah $(2\pi a, 1)$ sebagai pusat lingkaran c yaitu Lingkaran(A,1). Titik B adalah titik pada lintasan kurva sikloida yaitu $(2\pi a - \sin(2\pi a), 1 - \cos(2\pi a))$. Titik D adalah perpotongan lingkaran c dengan sumbu-x. Selanjutnya jangan tampilkan lingkaran c. Selanjutnya buat busur d melalui B dan D dengan pusat A dengan cara serupa buat busur e melalui D dan B dengan pusat A. Ubah format garis busur d dengan garis putus-putus. Buat segmen garis f melalui titik C dan D. Sehingga didapat gambar berikut.



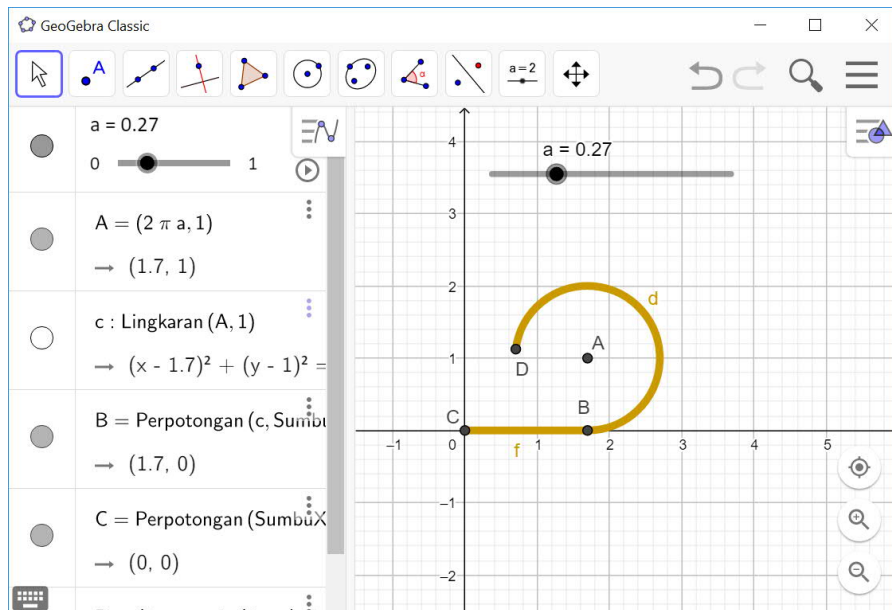
Gerakkan Luncuran a sampai maksimum, maka akan terjadi animasi dan Panjang garis CD bergerak kekanan dengan panjang sama dengan keliling lingkaran. Selanjutnya animasi yang telah dibahas ini bisa digunakan dengan membuat Tombol perintah Start Animation, Stop Animation dan Reset, bagaimana cara membuat tombol-tombol tersebut telah dibahas. Sehingga didapat hasil gambar berikut.



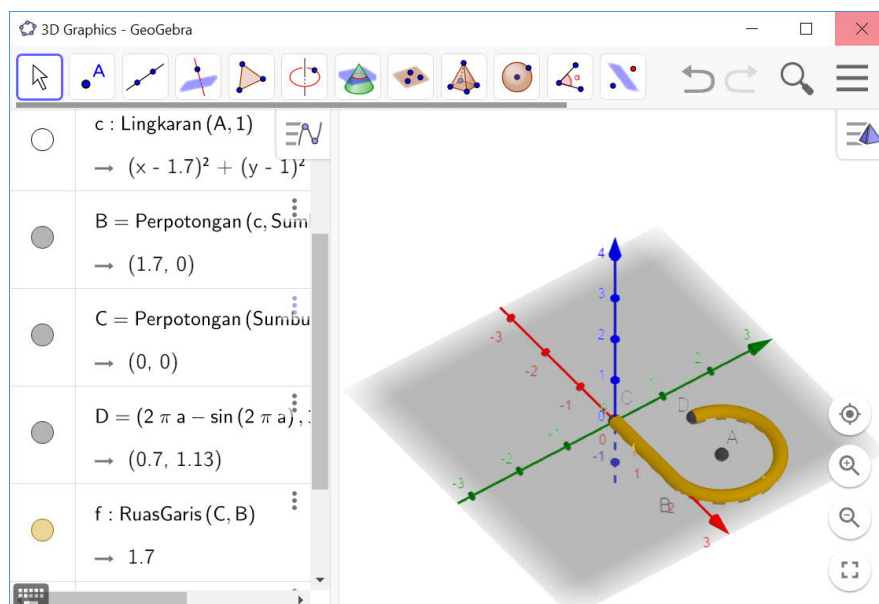
Pembahasan ini telah diupload dalam website <https://www.geogebra.org/u/Subiono>.

Pembahasan berikutnya membuat animasi net dari tabung tertutup dengan menggunakan konsep kurva sikloida. Kurva Sikloida, transformasi Translasi dan Rotasi memudahkan untuk menjadikan Obyek 2D menjadi 3D. Untuk melakukan hal ini buat Luncuran a , isi minimum 0, maksimum 1 dan kenaikan 0.01. Buat titik A dengan perintah $(2\pi a, 1)$ dan lingkaran c yaitu Lingkaran(A,1). Selanjutnya buat titik potong B yang merupakan perpotongan lingkaran c dengan sumbu-x dan titik C yang merupakan perpotongan sumbu-x dengan sumbu-y. Berikutnya buat titik D yaitu $(2\pi a - \sin(2\pi a), 1 - \cos(2\pi a))$ dan ruas garis f yaitu RuasGaris(C,D). Jangan tampilkan obyek lingkaran c dan buat Busur Sirkular dengan pusat A

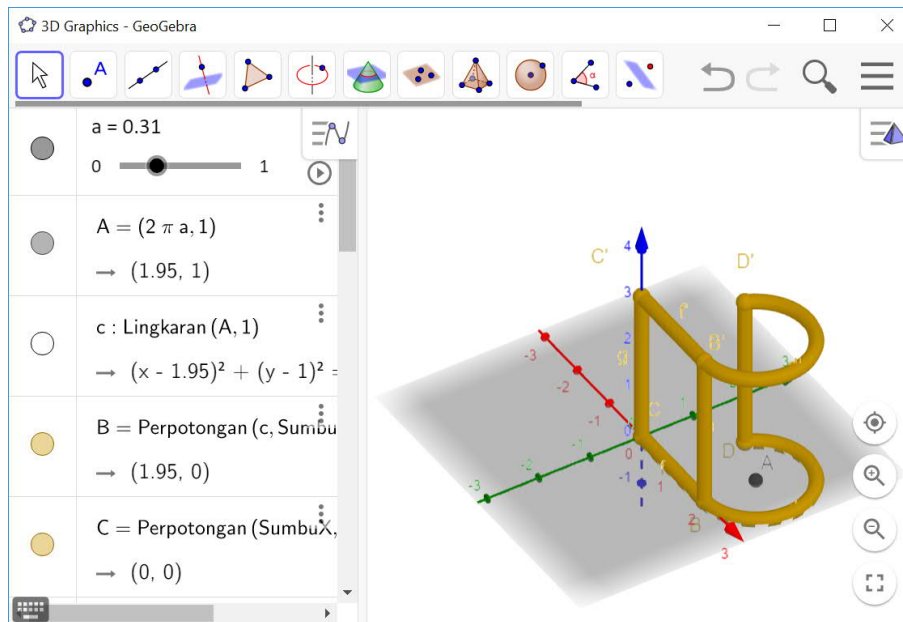
dan melalui dua titik B dan D. Tebalkan format garis f dan busur d serta beri warna dengan pilihan kuning, ha akan menghasilkan gambar berikut.



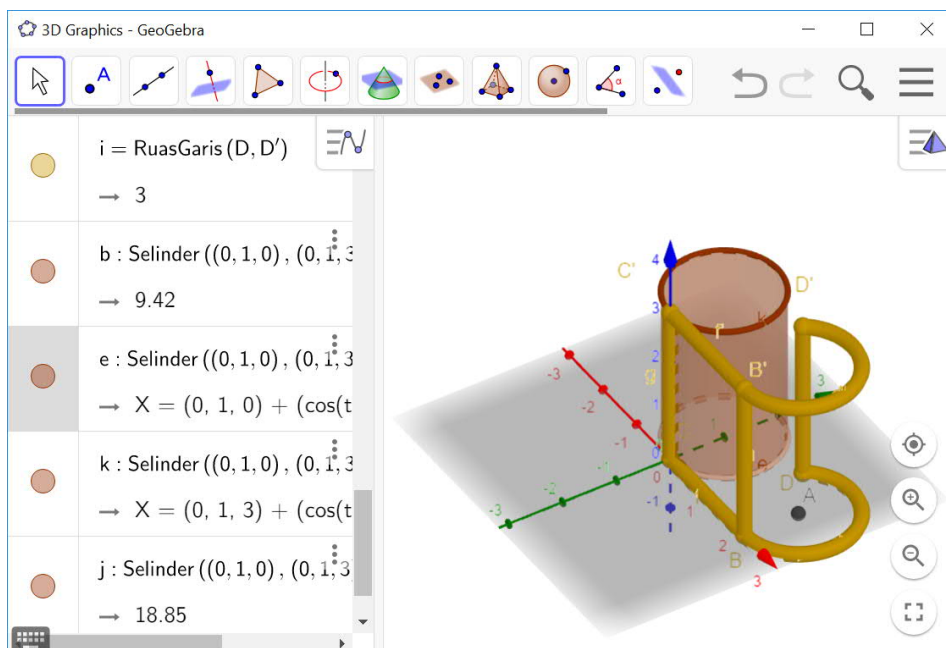
Selanjutnya lihat hasil ini pada Tampilan 3D yang diberikan oleh gambar berikut.



Langkah berikutnya obyek ruas garis f, busur d dan titik D akan ditranslasi sepag arah suatu vector. Untuk ini buat vector u dengan perintah $\text{Vektor}((0,0,0),(0,0,3))$ nilai 3 merupakan panjang vector u juga merupakan tinggi selinder, jangan tampilkan obyek vector u. Secara berturut-turut buat translasi garis f', busur d' dan titik D' masing-masing dengan perintah $\text{Translasi}(f,u)$, $\text{Translasi}(d,u)$ dan $\text{Translasi}(D,u)$ diikuti dengan menekan Enter. Selanjutnya buat ruas garis. Selanjutnya berturut-turut buat ruas garis g, h dan i masing-masing dengan perintah $\text{RuasGaris}(C,C')$, $\text{RuasGaris}(B,B')$ dan $\text{RuasGaris}(D,D')$. Pertebal masing-masing garis dan beri pilihan warna sebagaimana yang telah dilakukan sebelumnya. Hal ini akan menghasilkan gambar berikut.

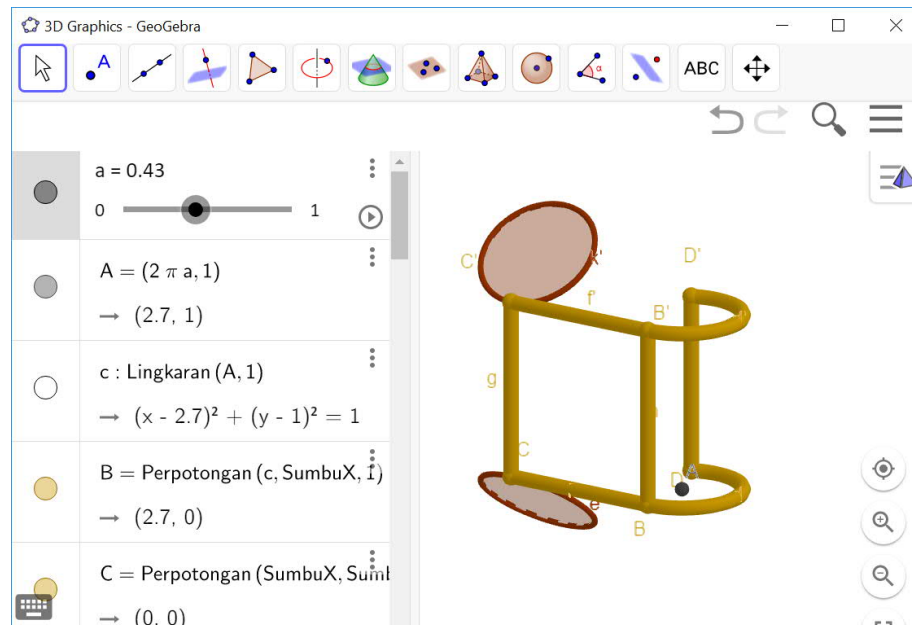


Selanjutnya membuat selinder tertutup b dengan perintah $\text{Selinder}((0,1,0),(0,1,3),1)$ tekan Enter akan menghasilkan gambar berikut.

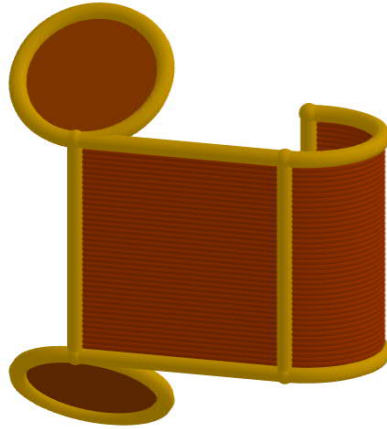


Catatan perintah selinder yang telah dilakukan menghasilkan tiga permukaan yaitu lingkaran e, lingkaran k sebagai permukaan dasar dan permukaan atas selinder dan selinder j sebagai permukaan selinder. Klik kanan obyek selinder tutup b, pilih Pengaturan, klik Lanjutan lalu isi Kondisi menampilkan obyek dengan $a=0$ lalu tekan Enter. Kondisi ini menyatakan bahwa obyek b akan tampil bila $a=0$ untuk nilai a yang lain obyek b tidak tampil. Selanjutnya akan dibuat animasi untuk membuka dan menutup obyek k dan e. Untuk hal ini dibuat dulu garis l yang melauai B' sejajar sumbu-x dengan perintah $\text{Garis}(B', \text{SumbuX})$ tekan enter. Berikutnya berturut-turut ketik perintah $\text{Rotasi}(k, \frac{\pi}{2}, a, B', l)$ dan $\text{Rotasi}(e, \frac{\pi}{2}, a, C, \text{SumbuX})$ akan menghasilkan obyek rotasi k' dan e'. Jangan tampilkan obyek garis l dan gerakan Luncuran a,

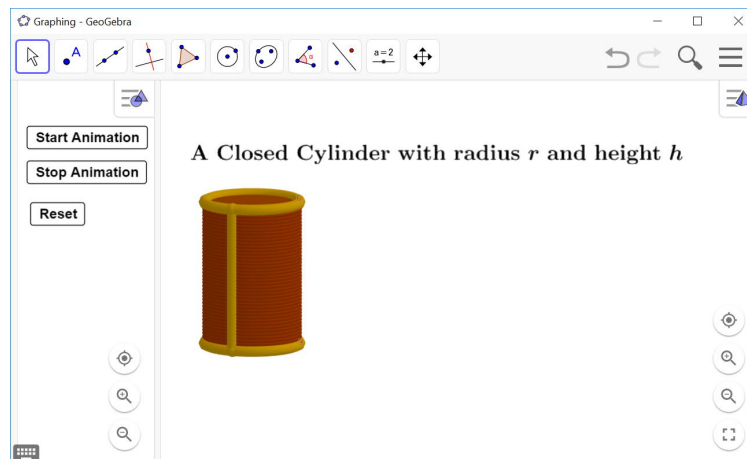
maka obyek lingkaran dasar dan atas serta permukaan selinder akan bergerak membuka sepanjang gerakan nilai a , gambarnya sebagai berikut.



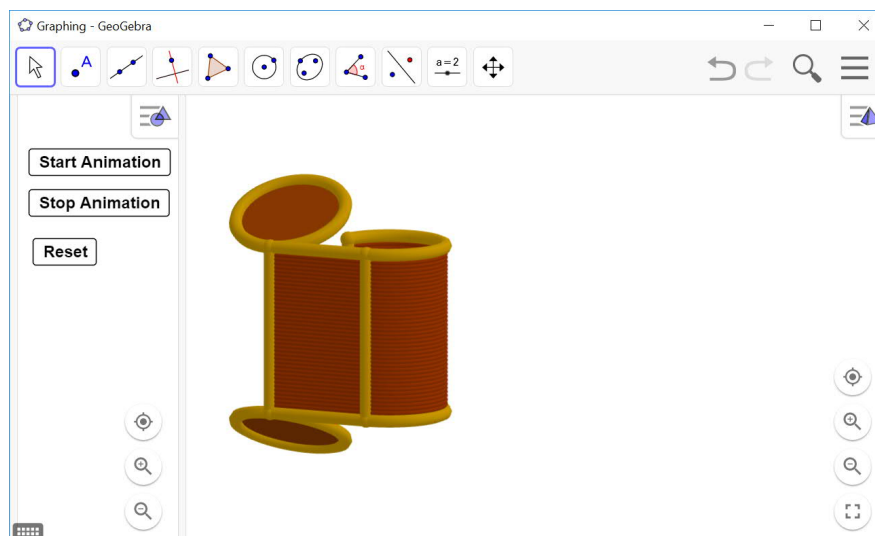
Dari gambar tampak bahwa bagian kulit selinder yang terbuka masih berwarna putih. Untuk memberi warna supaya lebih terlihat sebagai permukaan selinder maka ruas garis f dan busur d ditranslasi sepanjang vektor dari 0 sampai 3. Untuk hal ini kita buat perintah barisan sebagai berikut. Untuk translasi obyek f adalah `Barisan(Translasi(f,Vektor((0,0,0),(0,0, $\frac{n}{14}$ ))),n,0,42)` tekan Enter. Perhatikan bahwa bila nilai $n=42$ bila dibagi 14 adalah 3, nilai ini berkaitan dengan vektor yang panjangnya 3. Selanjutnya untuk translasi obyek busur d lakukan perintah `Barisan(Translasi(f,Vektor((0,0,0),(0,0, $\frac{n}{14}$ ))),n,0,42)` tekan Enter. Perintah Barisan yang pertama menghasilkan obyek `daftar1` sedangkan yang kedua `daftar2`. Lalu ubah warna obyek `daftar1` dan obyek `daftar2` sesuai dengan warna obyek tabung b . Dengan cara yang sama Translasikan obyek e yang merupakan lingkaran dasar dari tabung b sebagaimana dilakukan dengan perintah barisan yaitu `Barisan(Translasi(e,Vektor((0,0,0),(0,0, $\frac{n}{14}$ ))),n,0,42)` tekan Enter akan menghasilkan obyek dengan nama `daftar3`. Pada obyek `daftar3` lakukan hal yang sama sebagaimana pada obyek tabung b yaitu hanya tampil untuk nilai $a=0$. Untuk menebalkan garis lingkaran dasar dan atas serta berwarna seperti garis f dan busur d lakukan perintah berikut `Rotasi( $k_1, \frac{\pi}{2}, a, B', I$ )` dan `Rotasi( $e, -\frac{\pi}{2}, a, C, SumbuX$ )`. Hasil kedua rotasi tersebut adalah obyek k'_1 dan e'_1 . Klik kanan masing-masing obyek k'_1 dan e'_1 lalu pilih Pengaturan, berikutnya klik Warna untuk memberikan warna yang sesuai dan klik Format untuk menebalkan garis. Jangan tampilkan obyek titik A dan semua Label obyek gambar serta gerakan Luncuran a , sehingga menghasilkan gambar berikut.



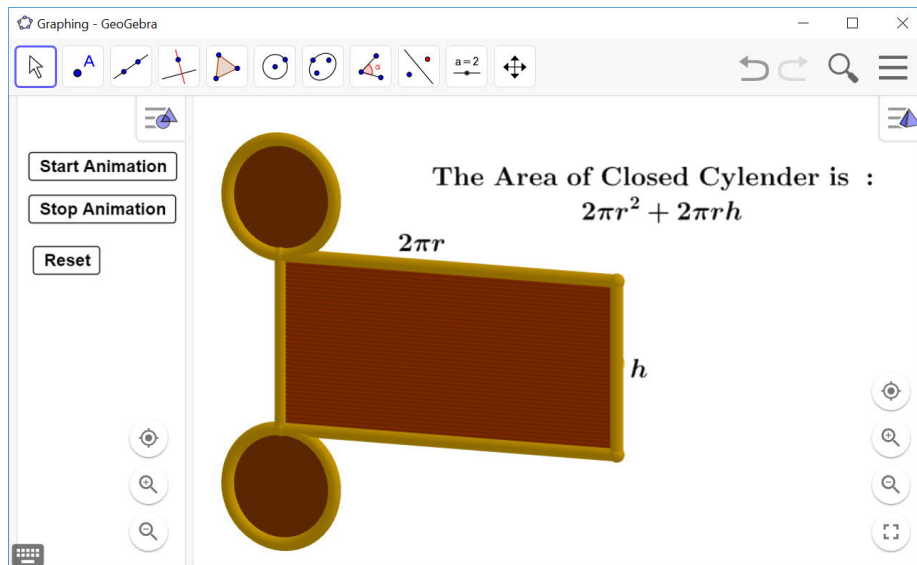
Untuk mengganti gerakan Luncuran a lebih interaktif bisa digunakan Tombol-tombol yang berisi Start Animation, Stop Animation dan Reset. Cara membuat perintah tombol tersebut telah dibahas pada pembahasan membuat Kubus Terbuka. Lakukan hal tersebut sehingga sehingga selinder tertutup dalam keadaan awal diberikan oleh gambar berikut.



Untuk melakukan animasi membuka selinder tertutup b (tabung tertutup), klik Tombol Start Animation biarkan sesaat, terjadi gerakan tabung tertutup mulai membuka lalu klik Tombol Stop Animation akan menghasilkan gambar berikut.



Klik lagi Tombol Start Animation, biarkan gerakan tabung membuka sampai berhenti sehingga didapat gambar berikut.



Untuk kembali ke bentuk semula tabung tertutup klik Tombol Reset. Hasi pembahasannya ini telah diupload di website <https://www.geogebra.org/m/hfbppuyn>.

Suatu pertanyaan muncul, mengapa apa yang telah dibahas mengenai animasi selinder tertutup tidak menggunakan perintah Net sebagaimana pembahasan Kubus terbuka untuk semua permukaannya? Jawabannya adalah perintah Net dalam GeoGebra Klasik versi terbaru 6.0.481.0 belum bisa digunakan untuk Perintah Net dengan benda 3D yang mempunyai dasar lingkaran (segi takberhingga). Misalnya, tabung, kerucut dan bola. Sedangkan untuk benda 3D dengan dasar segi-n dengan n berhingga, misalnya kubus, prisma dan piramida perintah Net bisa digunakan. Pembaca dengan mengikuti pembahasan animasi tabung tertutup bisa mencoba membuat animasi untuk obyek 3D kerucut.

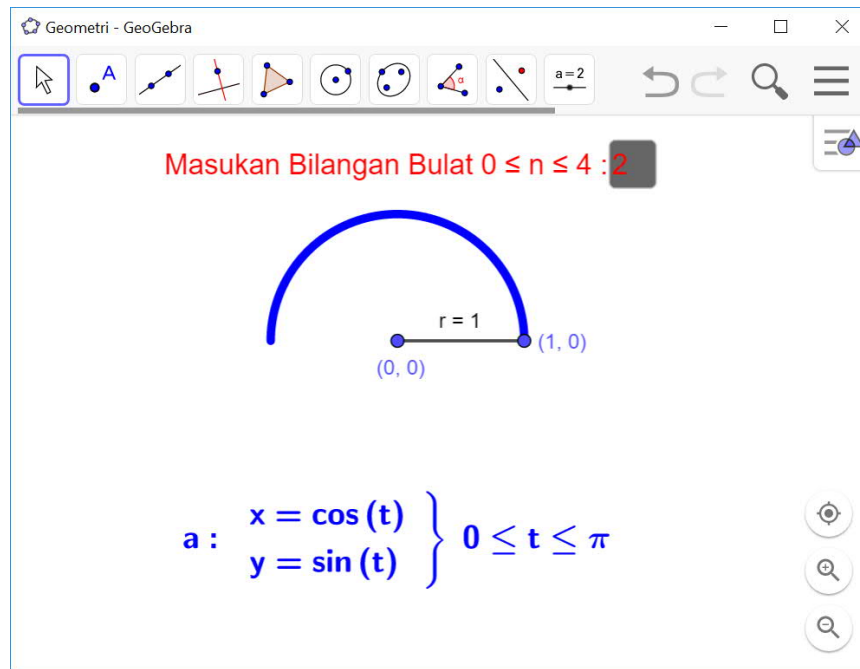
Latihan

- 1) Buat Luncuran a, isi minimum 0, maksimum 1 dan kenaikan 0.01. Buat titik A, B, C dan D masing-masing adalah $(2\pi a, 1)$, $(x(A), 0)$, $(0, 0)$ dan $(x(A) - \sin(x(A)), y(A) - \cos(x(A)))$. Buat ruas garis f yaitu RuasGaris(C, B) dan kurva b yaitu Kurva($x(A) + \sin(t)$, $y(A) - \cos(t)$, $t, 0, 2\pi(1 - a)$). Tampilkan secara bersama Tampilan Aljabar, Tampilan Grafik dan Tampilan Grafik 3D. Gerakan Luncuran a, amati dan simpulkan dari aktifitas yang telah dibuat ini.
- 2) Lanjutkan aktifitas 1) dengan membuat vektor u, yaitu $((0, 0, 0), (0, 0, 3))$ dan jangan tampilkan obyek vektor u. Translasikan obyek f, b dan D, masing-masing dengan perintah Translasi(f, u), Translasi(b, u) dan Translasi(D, u). Masing-masing hasil translasi adalah obyek f', b' dan D'. Selanjutnya buat ruas garis RuasGaris(C, C'), RuasGaris(B, B') dan RuasGaris(D, D'). Selanjutnya buat dua permukaan masing-masing c dan d yaitu Permukaan($u, 0, v, u, 0, 2\pi(1 - a), v, 0, 3$) dan Permukaan($x(A) + \sin(u), y(A) - \cos(u), v, u, 0, 2\pi(1 - a), v, 0, 3$). Bila obyek permukaan

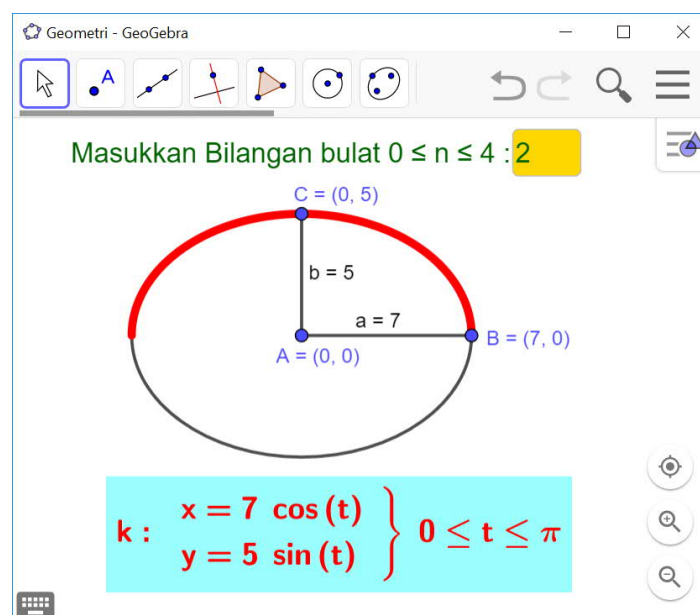
c dan d mempunyai tampilan warna berbeda samakan warnanya. Gerakan Luncuran a, amati dan simpulkan dari aktifitas yang telah dibuat ini.

- 3) Lengkapi aktifitas 1) dan 2) sehingga menjadi animasi dari Selinder Tertutup sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya.
- 4) Buat fungsi f, dalam Baris Input ketik perintah $x^2, -2 \leq x \leq 2$ tekan Enter. Buat Luncuran a, isi minimum dengan -2, maksimum dengan 2 dan kenaikan dengan 0.01. Selanjutnya buat titik A dan B yaitu (a,f(a)) dan (a,0). Buat Lingkaran c yaitu Lingkaran(SumbuX,A). Klik kanan obyek Lingkaran c lalu centang Tampilkan Jejak. Tampilkan secara bersama Tampilan Aljabar, Tampilan Grafik dan Tampilan Grafik 3D. Gerakan Luncuran a, amati dan simpulkan dari aktifitas yang telah dibuat ini.
- 5) Buat Luncuran a, isi minimum dengan 0, maksimum dengan 1, kenaikan dengan 0.01 dan Ulangi isi dengan Menaik (Sekali). Buat tiga kurva b, c dan d masing-masing adalah Kurva(cos(u),sin(u),u,0, 2π a), Kurva(cos(u),0,sin(u), u,0, 2π a) dan Kurva(0,cos(u),sin(u),u,0, 2π a). Buat Bola e, yaitu Bola((0,0,0),1). Klik kanan obyek lingkaran e pilih/klik Pengaturan, klik Lanjutan dan isi Kondisi menampilkan Objek dengan a==1 tekan Enter. Tampilkan secara bersama Tampilan Aljabar, Tampilan Grafik dan Tampilan Grafik 3D. Gerakan Luncuran a, amati dan simpulkan dari aktifitas yang telah dibuat ini.
- 6) Klik fasilitas Luncuran untuk membuat Luncuran n, klik pilihan Bilangan Bulat, isi minimum dengan 0, maksimum dengan 4 dan kenaikan dengan 1 klik Oke. Buat titik A dan B masing-masing adalah (0,0) dan (1,0). Buat ruas garis r yaitu r=RuasGaris(A,B). Untuk masing-masing obyek A, B dan r klik kanan pilih Pengaturan lalu klik Lanjutan dan isi Kondisi menampilkan Objek dengan n!=0

tekan Enter. Pada Baris Peralatan 10 yaitu  pilih Sisipkan Bilah Masukan isi Keterangan dengan Masukan Bilangan Bulat $0 \leq n \leq 4$, klik Objek tertaut dengan n=2 klik Oke. Buat kurva parametrik a, yaitu Kurva(cos(t),sin(t),t,0, $\pi n/2$) tekan Enter. Drag kurva a pada Tampilan Grafik dan isi kotak isian dengan angka 0 tekan Enter jelaskan apa yang terjadi. Selanjutnya isi kotak isian dengan 2 lalu tekan Enter akan menghasilkan gambar berikut.

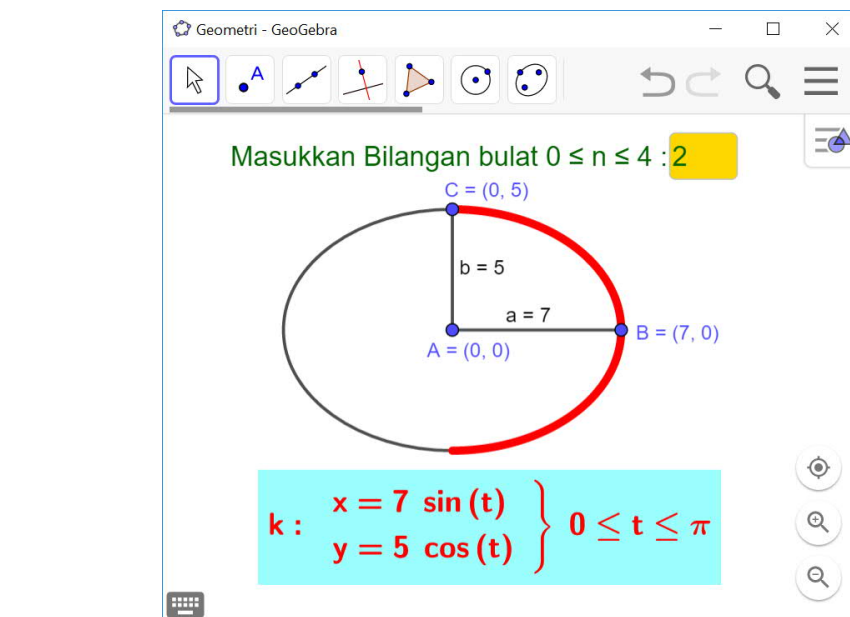


- Beri kesimpulan dari aktifitas ini bila kotak isian diisi dengan angka 0,1,2,3 dan 4.
- 7) Buat aktifitas seperti 6) tetapi kurva a diganti dengan Kurva($\sin(t), \cos(t), t, 0, \pi n/2$). Jelaskan titik awal $(1,0)$ berubah menjadi titik awal apa? Beri kesimpulan apa kesamaan hasil 6) dengan 7) dan apa perbedaannya.
- 8) Buat aktifitas seperti 6) tetapi kurva a diganti dengan Kurva($7\cos(t), 5\sin(t), t, 0, \pi n/2$) dan pada Baris Input buat ellpis c yaitu $x^2/49 + y^2/25 = 1$ tekan Enter. Jelaskan titik awal $(1,0)$ berubah menjadi titik awal apa? Hasil gambar aktifitas ini sebagai berikut.



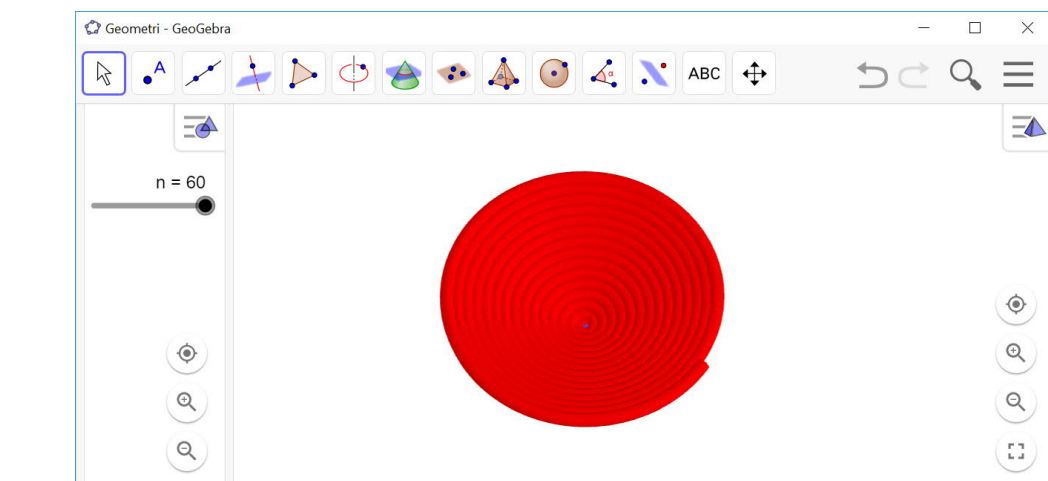
Beri kesimpulan dari aktifitas ini mengenai gambar yang dihasilkan

- 9) Buat aktifitas seperti 8) tetapi kurva k diganti dengan Kurva $(7\sin(t), 5\cos(t), t, 0, \pi/2)$. Jelaskan titik awal $(7,0)$ berubah menjadi titik awal apa? Hasil gambar aktifitas ini sebagai berikut.



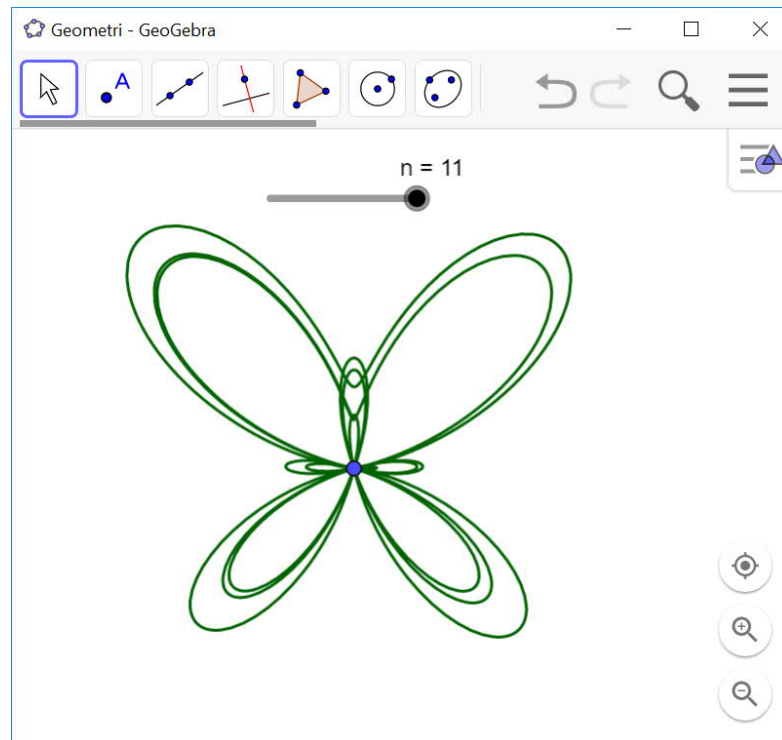
Beri kesimpulan apa kesamaan hasil 9) dengan 8) dan apa perbedaannya.

- 10) Pada aktifitas ini dibuat kurva parametrik berbentuk spiral dalam 3D. Untuk hal ini lakukan hal berikut. Klik fasilitas Luncuran untuk membuat Luncuran n, klik pilihan Bilangan Bulat, isi minimum dengan 0, maksimum dengan 60 dan kenaikan dengan 1 klik Oke. Buat kurva parametrik a, yaitu Kurva $(t \cos(t), t \sin(t), t/2, t, 0, \pi/2)$ tekan Enter. Tampilkan secara Bersama tampilan Grafik dan Grafik 3D dan gerakkan Luncuran n, sehingga didapat gambar berikut.

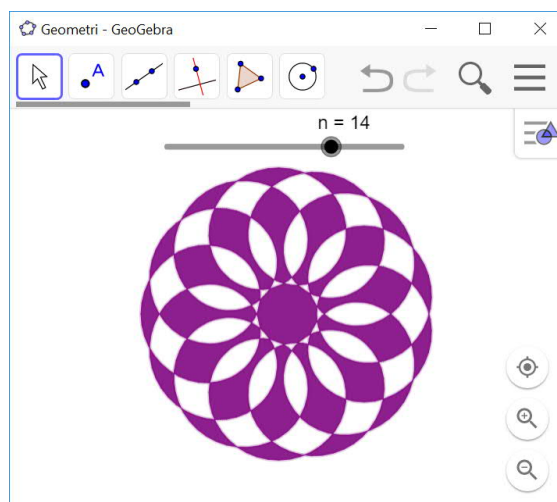


- 11) Pada aktifitas ini dibuat gambar kupu-kupu menggunakan kurva parametrik. Untuk hal ini lakukan hal berikut. Klik fasilitas Luncuran untuk membuat Luncuran n, klik pilihan Bilangan Bulat, isi minimum dengan 0, maksimum dengan 11 dan kenaikan dengan 1 klik Oke. Buat kurva parametrik a, yaitu :

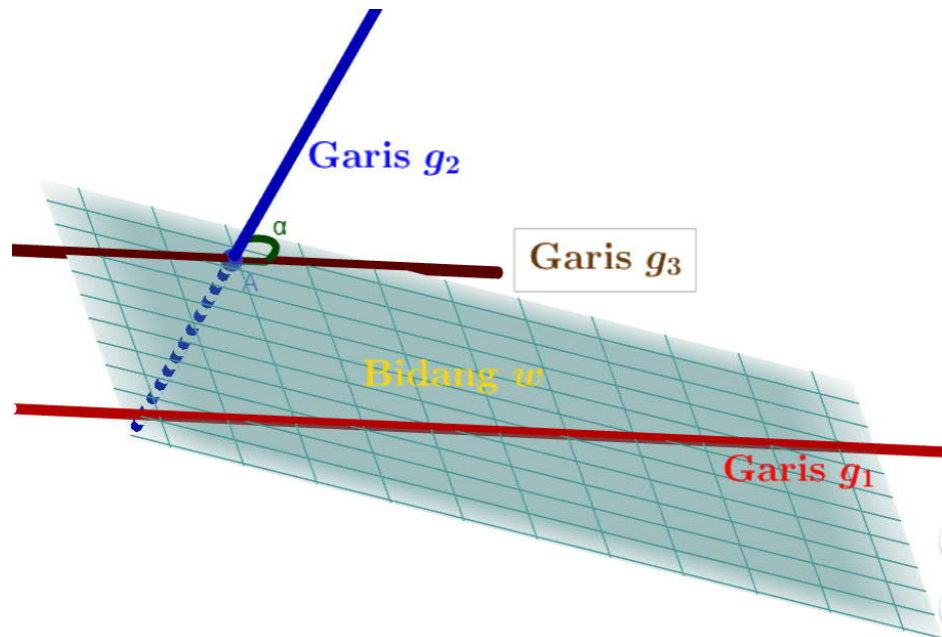
Kurva($t - \sin(t)(e^{\cos(t)} 2\cos(4t) + \sin^5(t/12))$, $\cos(t)(e^{\cos(t)} 2\cos(4t) + \sin^5(t/12))$, $t, 0, \pi n/2$).
 tekan Enter. Gerakkan Luncuran n, sehingga didapat gambar berikut.



- 12) Klik fasilitas Luncuran untuk membuat Luncuran n, klik pilihan Bilangan Bulat, isi minimum dengan 0, maksimum dengan 20 dan kenaikan dengan 1 klik Oke. Buat kurva parametrik a, yaitu : Kurva($1,5\cos(t) - \cos(nt)$, $1,5\sin(t) - \sin(nt)$, $t, 0, 2\pi$) tekan Enter. Klik kanan obyek a, pilih Pengaturan, klik Warna lalu pilih warna yang diinginkan dan geser Opasitas kekanan menghasilkan kecerahan isian warna yang diinginkan. Berikut hasil gambarnya.

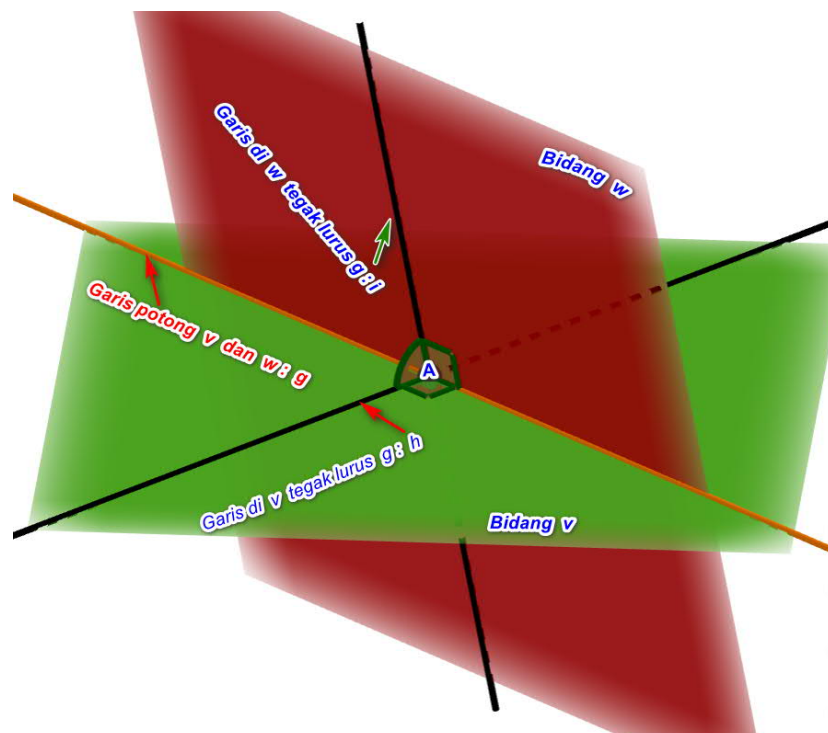


- 13) Buat suatu aktifitas dua garis g_1 dan g_2 yang bersilangan dalam ruang 3D sebagaimana dalam gambar berikut.



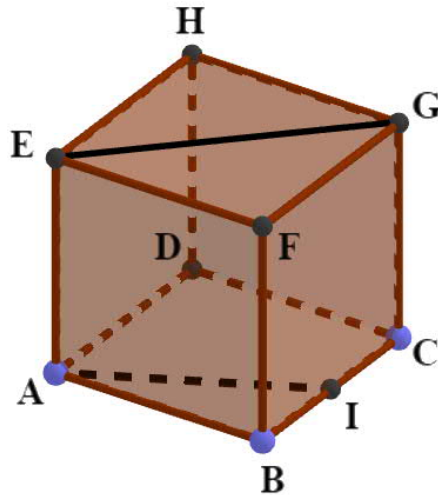
Garis g_1 terletak pada bidang w dan garis g_2 menembus bidang w di titik A. Garis g_3 melalui A dan sejajar garis g_1 . Maka sudut antara g_1 dan g_2 adalah sudut α yaitu sudut antara garis g_2 dan g_3 . Dalam hal yang demikian hitung berapa besar sudut α

- 14) Buat dua bidang v dan w yang berpotongan di garis g sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



Garis h terletak pada bidang v dan tegak lurus dengan garis g . Garis i terletak pada bidang w dan tegak lurus dengan garis g . Ketiga garis g , h dan i berpotongan di titik A. Maka sudut antara bidang v dan w adalah sudut antara garis h dan garis i . Bila sudut ini adalah α , maka hitung berapa besar sudut α .

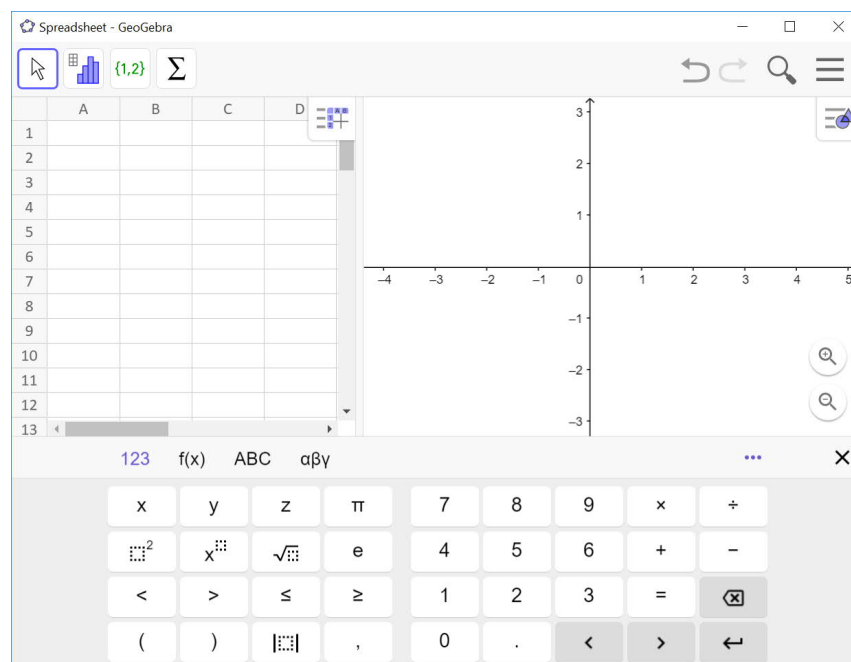
- 15) Buat suatu kubus $ABCD EFGH$ sebagaimana gambar berikut:



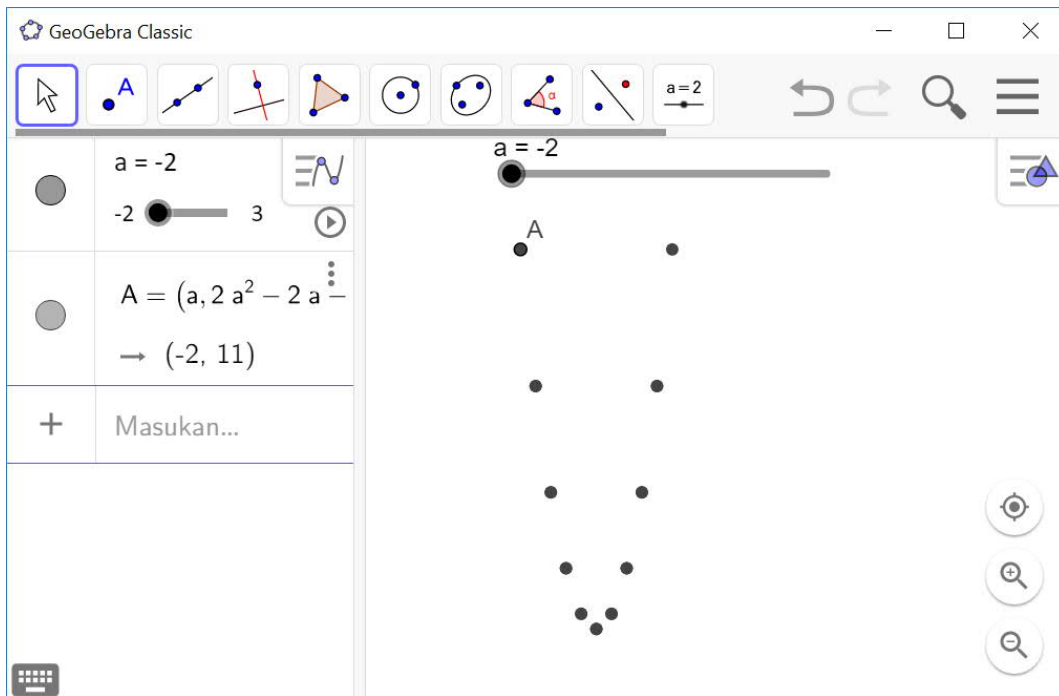
Bila I adalah titik tengah garis BC , maka hitung berapa besar sudut antara garis EG dan garis AI .

4.6 Perfektif Spreadsheet

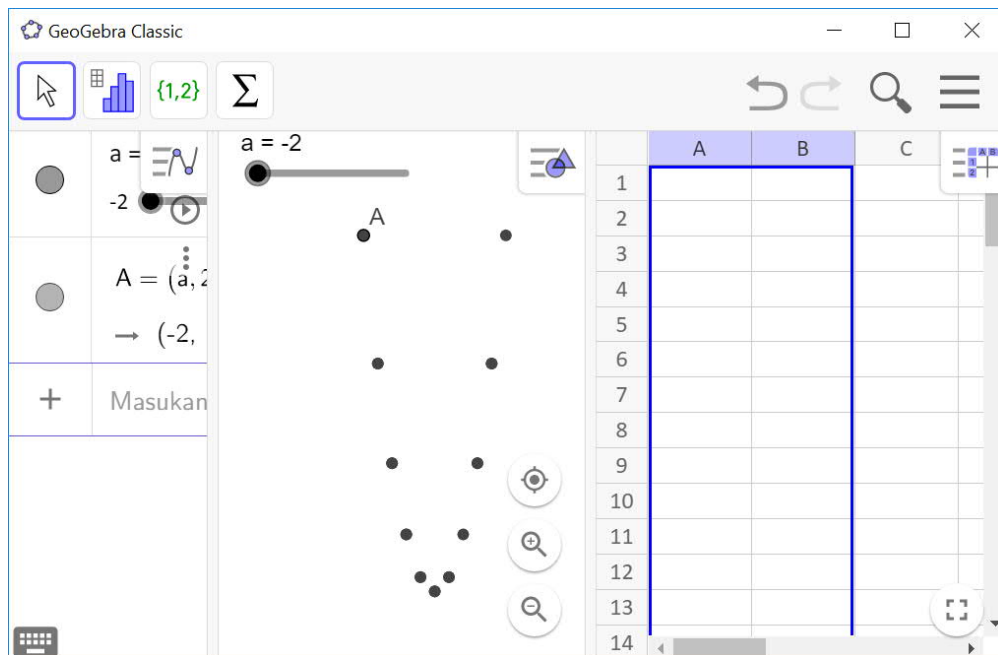
Pada bagian ini dibahas Perfektif Spreadsheet juga Analisis Statistik dari daftar suatu Data. Untuk menampilkan Perfektif Spreadsheet dalam Menu Utama klik Perfektif lalu pilih/klik Spreadsheet akan muncul gambar berikut.



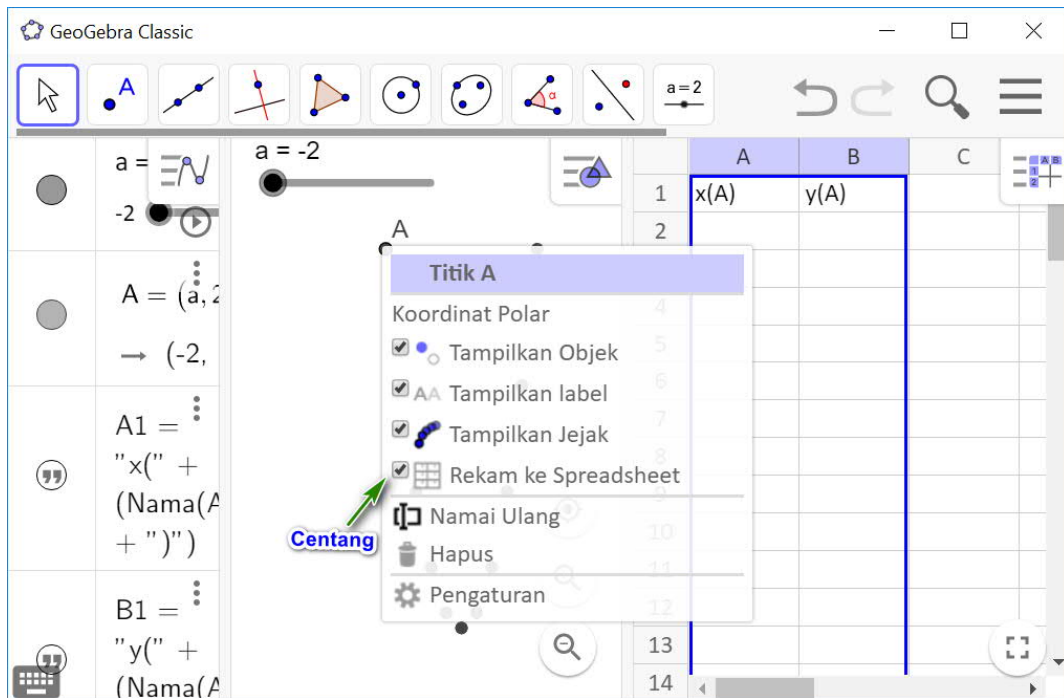
Buat Luncuran a, isi minimum dengan -2, maksimum 3 dan kenaikan dengan 0.5 klik Oke. Pada Baris Input ketik $A=(a, 2a^2-2a-1)$ tekan Enter. Klik kanan obyek titik A dan centang Tampilkan Jejak. Gerakkan Luncuran a, maka didapat gambar berikut.



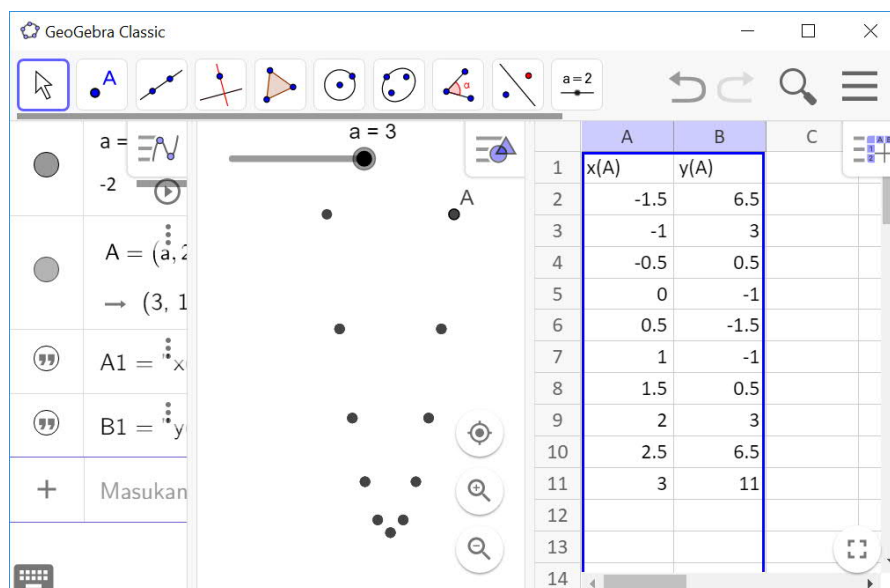
Tampilkan secara Bersama Tampilan Aljabar, Grafik dan Spreadsheet, sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



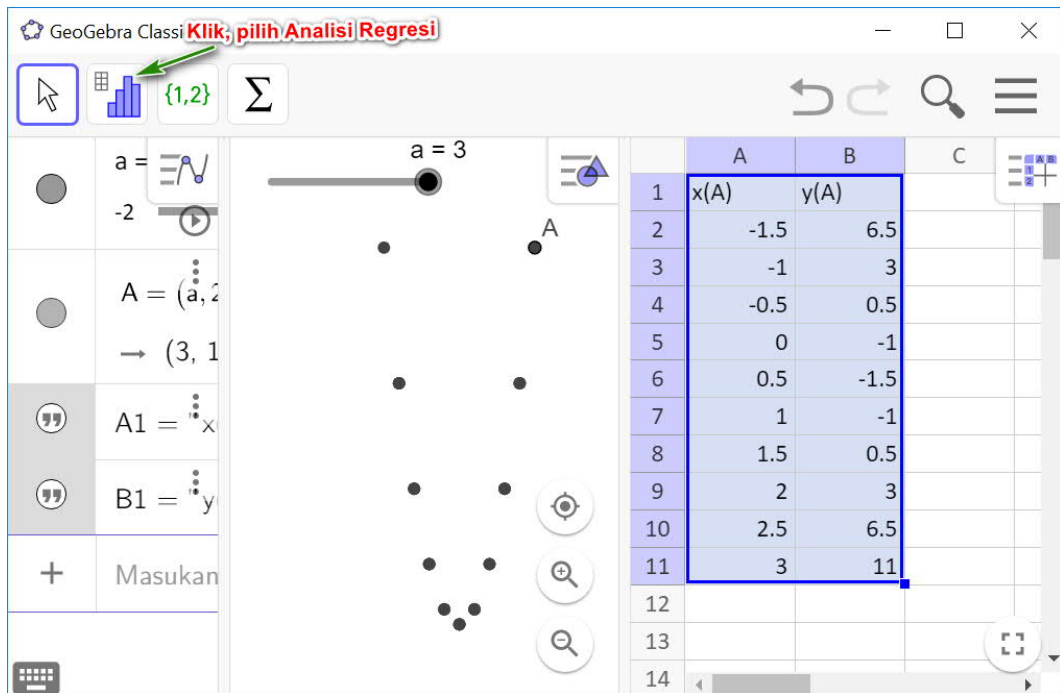
Pada Luncuran a gerakan pada nilai $a=-2$ (minimum) lalu klik kanan obyek titik A dan centang Rekam ke Spreadsheet sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



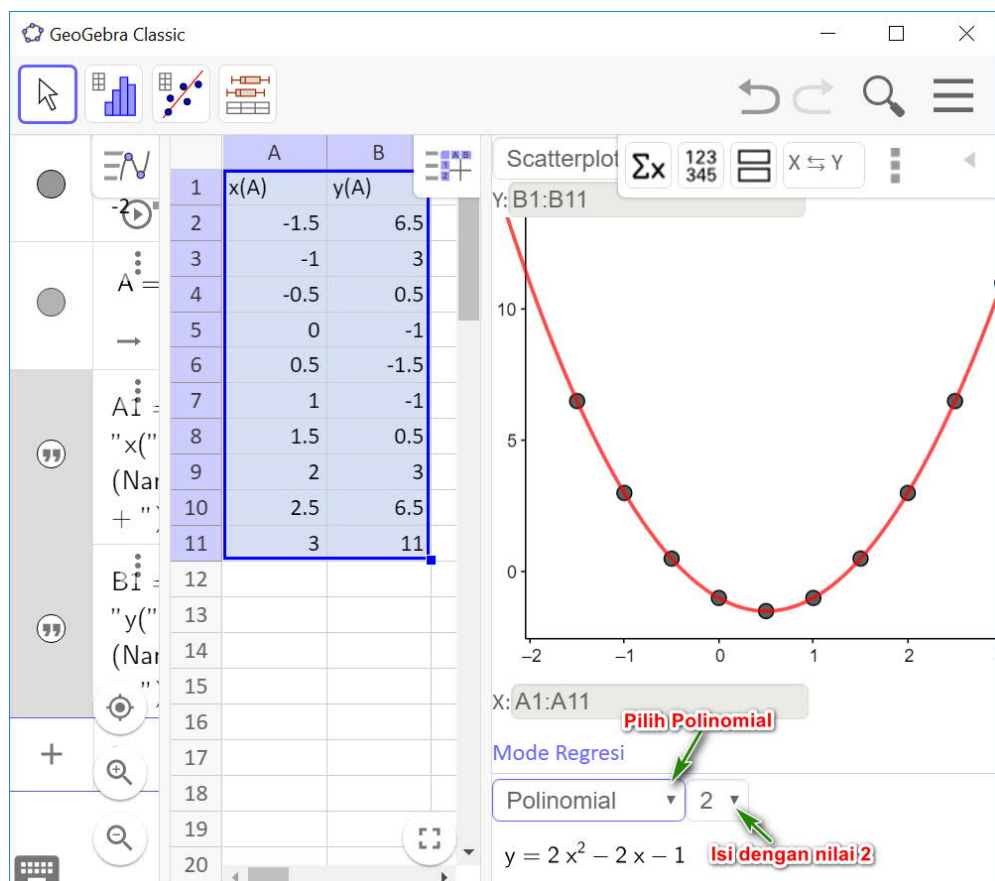
Gerakkan Luncuran a , maka Spreadsheet sel kolom A dan B akan berisi nilai-nilai yang sesuai sebagaimana gambar berikut.



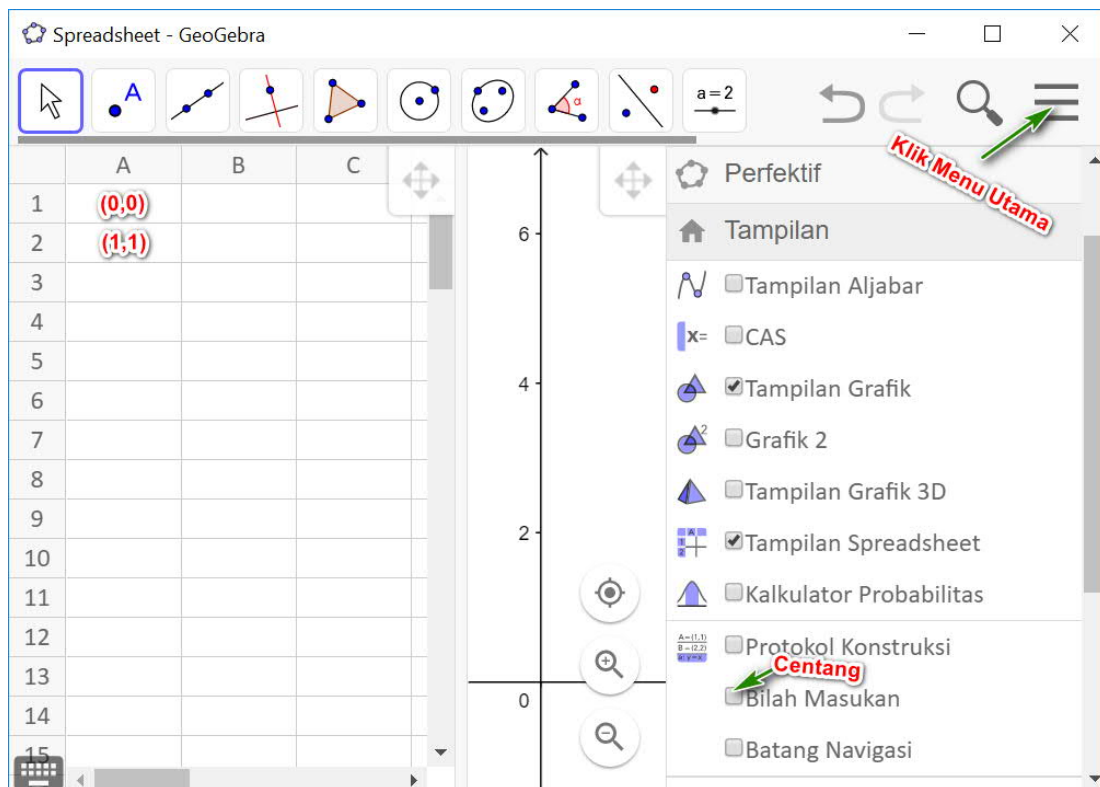
Sorot sel A dan B sampai ke baris 11 sehingga didapat gambar berikut.



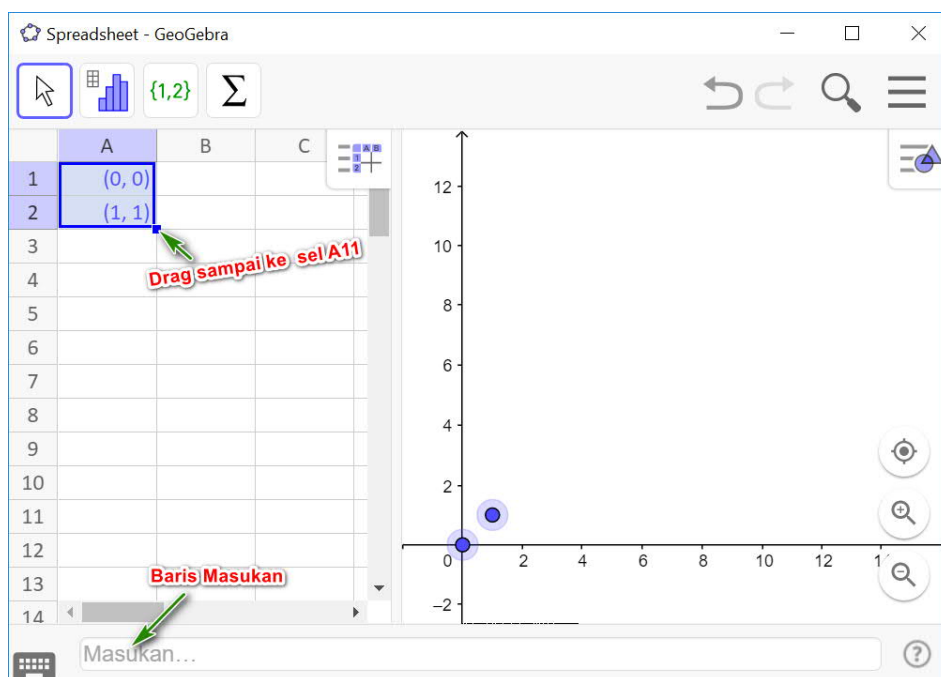
Lakukan sebagaimana diperintahkan dalam gambar sehingga didapat gambar berikut.



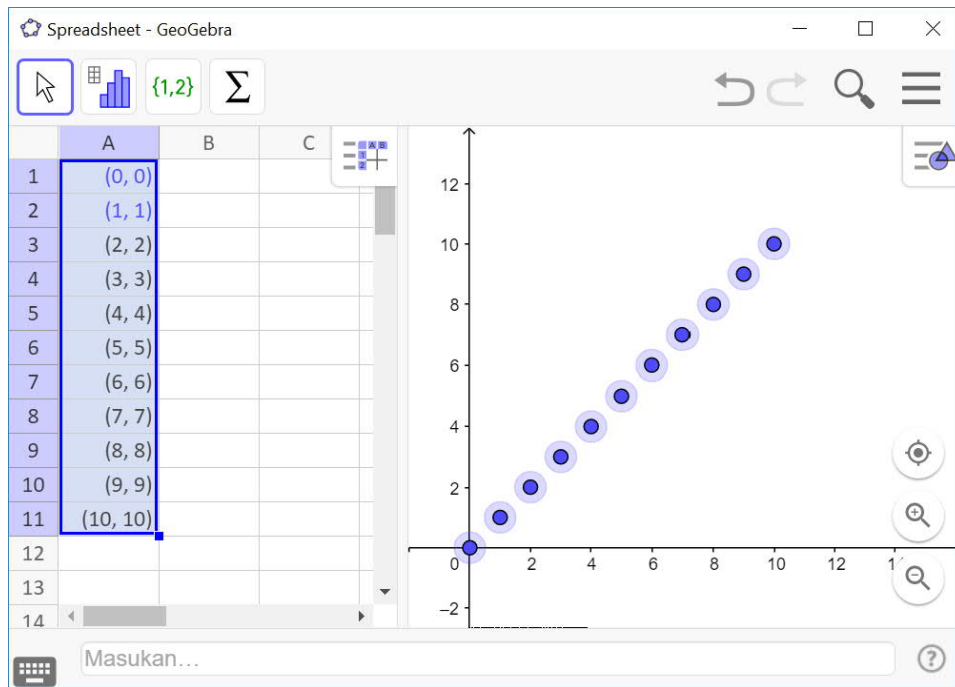
Buka Geogebra, pilih Perspektif Spreadsheet klik Menu Utama dan lakukan sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.



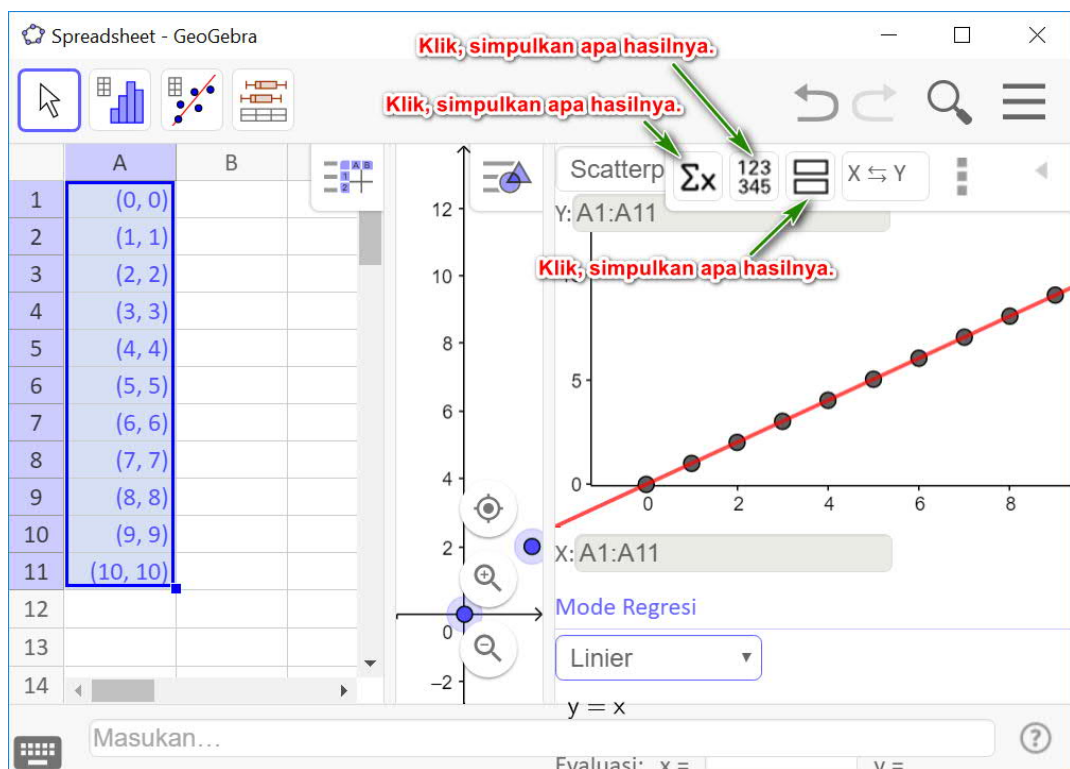
Isi sel A1 dan A2 dengan (0,0) dan (1,1) sehingga didapat gambar berikut.



Sorot Sel A1 sampai A2 dan Drag tanda kotak kecil biru sampai ke Sel A11 sehingga didapat gambar berikut.



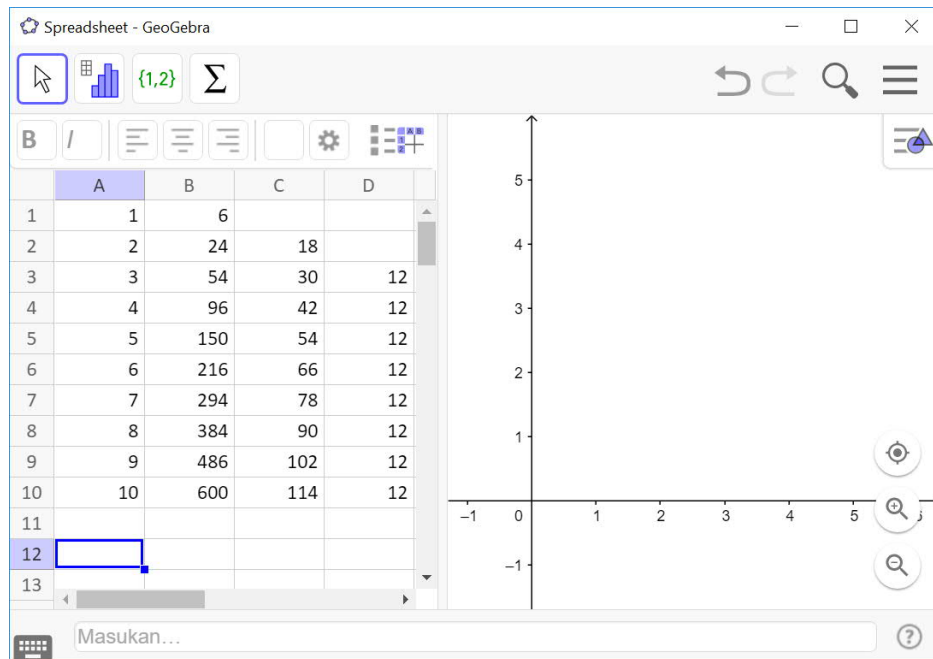
Klik fasilitas Analisis Satu Variable, lalu pilih Analisis Regresi Dua Variabel sehingga tampil gambar berikut.



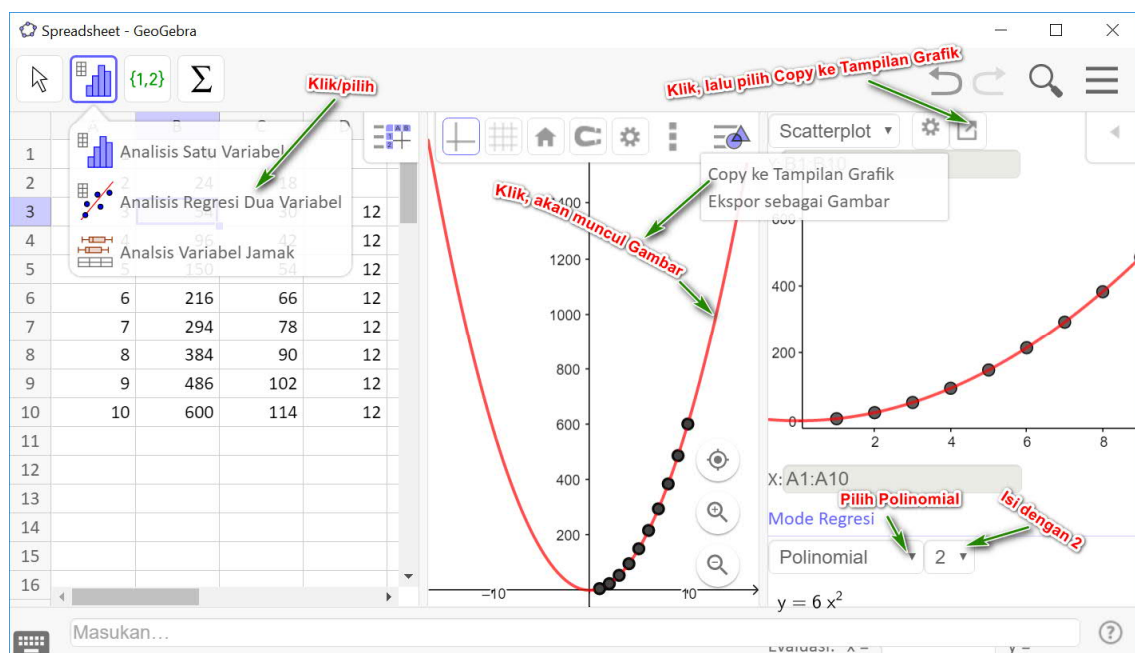
Lakukan sebagaimana dalam gambar diskusikan dan buat kesimpulan.

Buka Geogebra, pilih Perspektif Spreadsheet klik Menu Utama, klik Tampilan lalu centang Bilah Masukan. Berturut-turut pada Sel A1 dan A2 ketik nilai 1 dan 2, lalu sorot A1 dan A2. Selanjutnya pada kotak kecil biru drag sampai ke Sel A10. Pada Sel B1 ketik $=6 \cdot A1^2$ tekan Enter. Drag sel B1 sampai ke Sel B10, pada Sel C2 ketik $=B2-B1$ tekan Enter, drag Sel C2

sampai ke Sel C10. Pada Sel D3 ketik $=C3-C2$ lalu drag Sel D3 sampai Sel D10. Sehingga didapat gambar berikut.



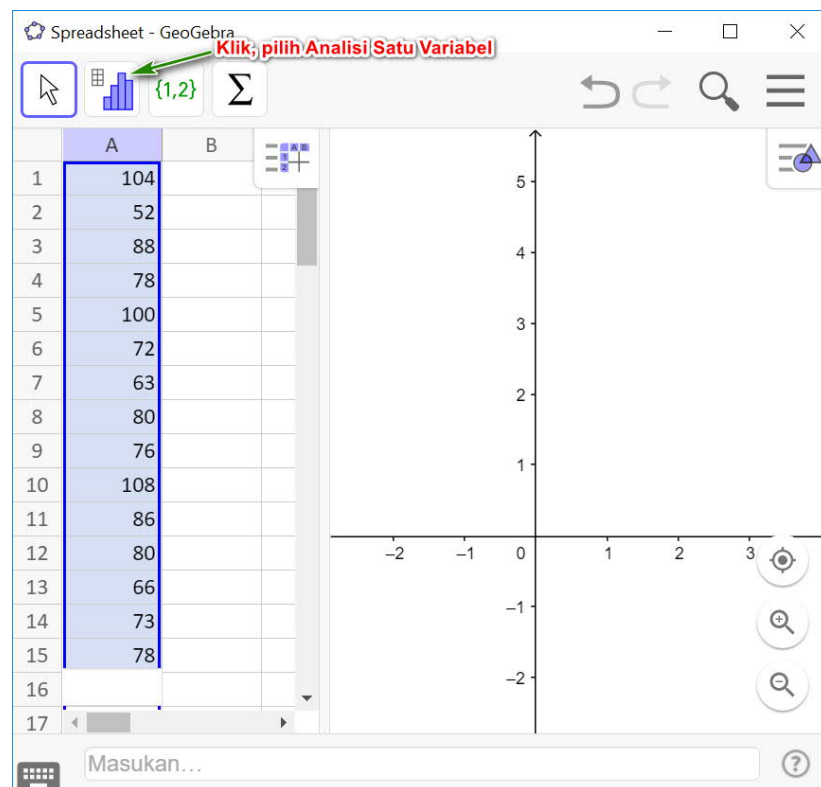
Sorot baris A1 dan B1 sampai baris A10 dan B10 lalu klik Analis Satu Variabel dan pilih Analisis Regresi Dua Variabel dan lakukan sebagaimana perintah dalam gambar berikut.



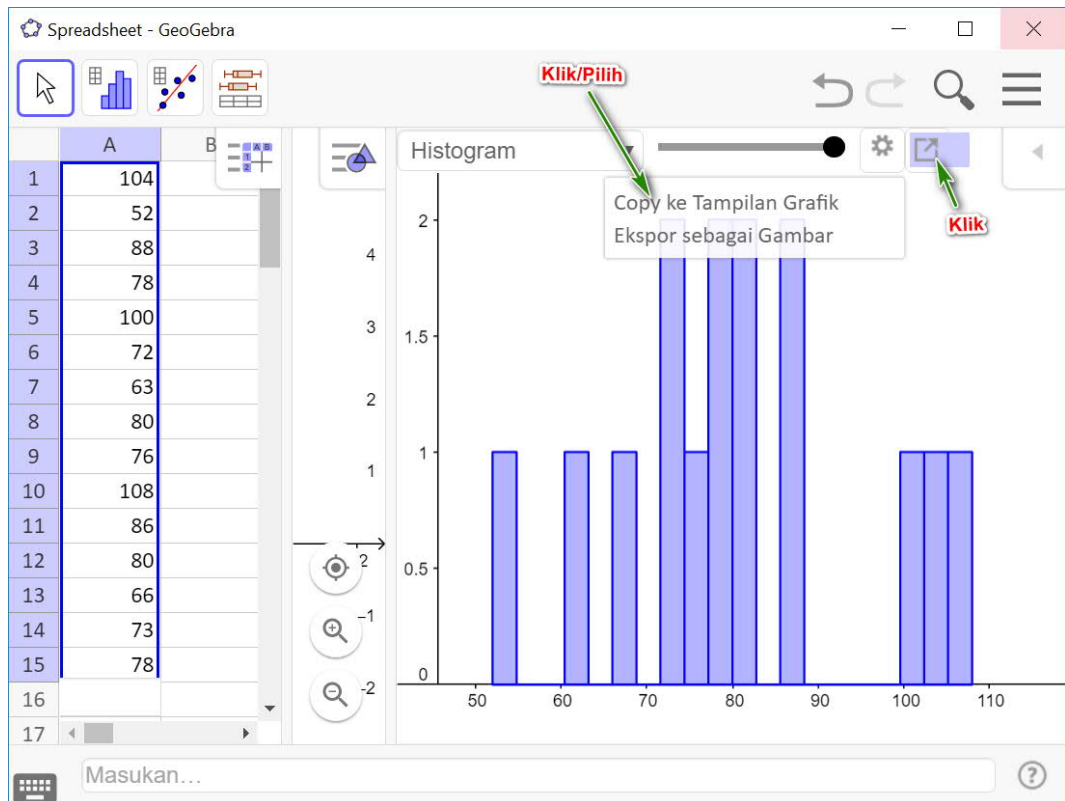
Selidiki nilai-nilai pada kolom C dan D, merupakan suatu barisan. Tentukan rumus umum suku barisan pada kolom C. Jelaskan membentuk barisan apa kolom C? Perhatikan bahwa nilai-nilai kolom B merupakan luas dari Kubus yang nilai sisi-sisinya diberikan oleh kolom A. Bila kolom A dan B direpresentasikan sebagai titik, maka semua titik tersebut terletak pada suatu polinomial berderajat dua sebagaimana terlihat dalam gambar, tuliskan polinomial ini. Bila polinimoal ini adalah $p(x)$, dimana x menyatakan sisi dari kubus, maka $p(x)$ adalah luas kubus. Apakah hal ini berlaku umum untuk semua kubus yang sisinya sama

dengan a ? Apakah mungkin menentukan derajat dari polinomial $p(x)$ dengan menyelidiki beda dari barisan dalam kolom C dan D? Bila mungkin jelaskan alasannya. Apakah mungkin menentukan koefisien dari polinomial $p(x)$ dengan menyelidiki beda dari barisan dalam kolom C dan D? Jelaskan jawabannya.

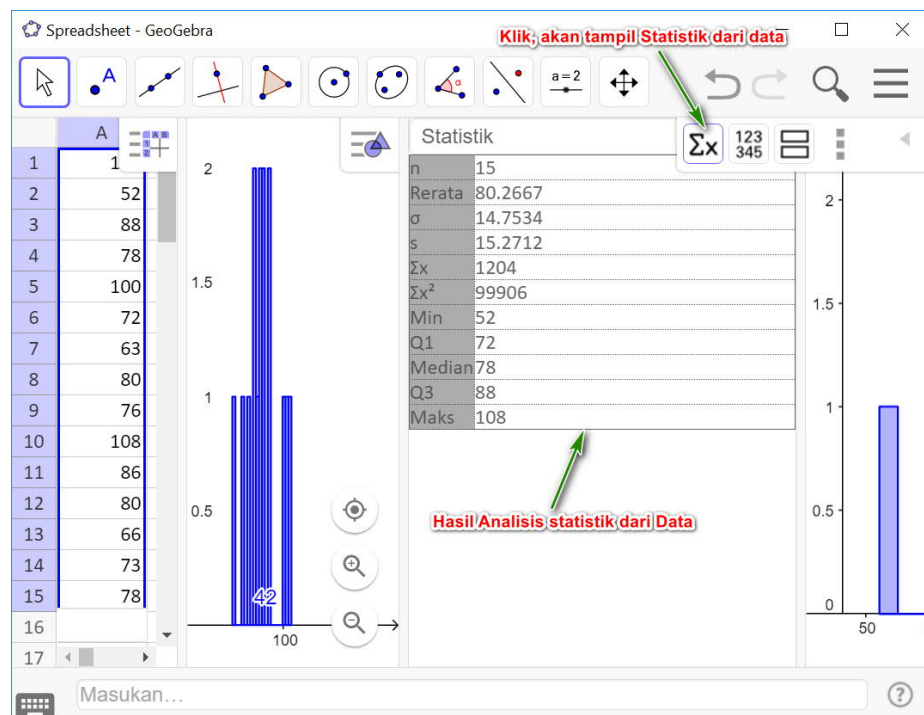
Pada pembahasan berikut ini dianalisis statistika perilaku data. Buka Geogebra, pilih Perspektif Spreadsheet klik Menu Utama, klik Tampilan lalu centang Bilah Masukan. Isi kolom Sel A dan sorot sebagai mana gambar berikut.



Pilih Analisis Satu Variabel didapat gambar berikut.



Ikuti perintah dalam gambar diatas dapat gambar berikut.

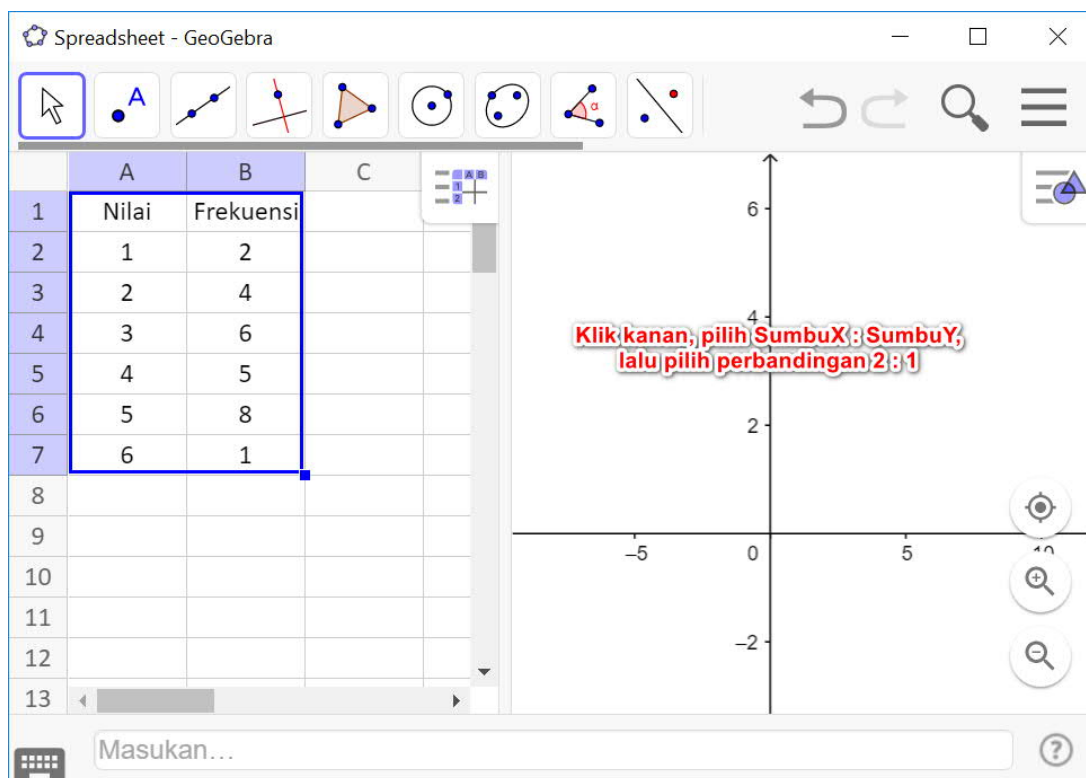


Hasil Analisis Statistik Data adalah : banyaknya data 15, rerata data 80.2667, simpangan baku 14.7534, simpangan baku sampel 15.2712, jumlah seluruh data 1204, data minimum 52, data maksimum 108 kuartil bawah data 72, median 78 dan kuartil atas data 108.

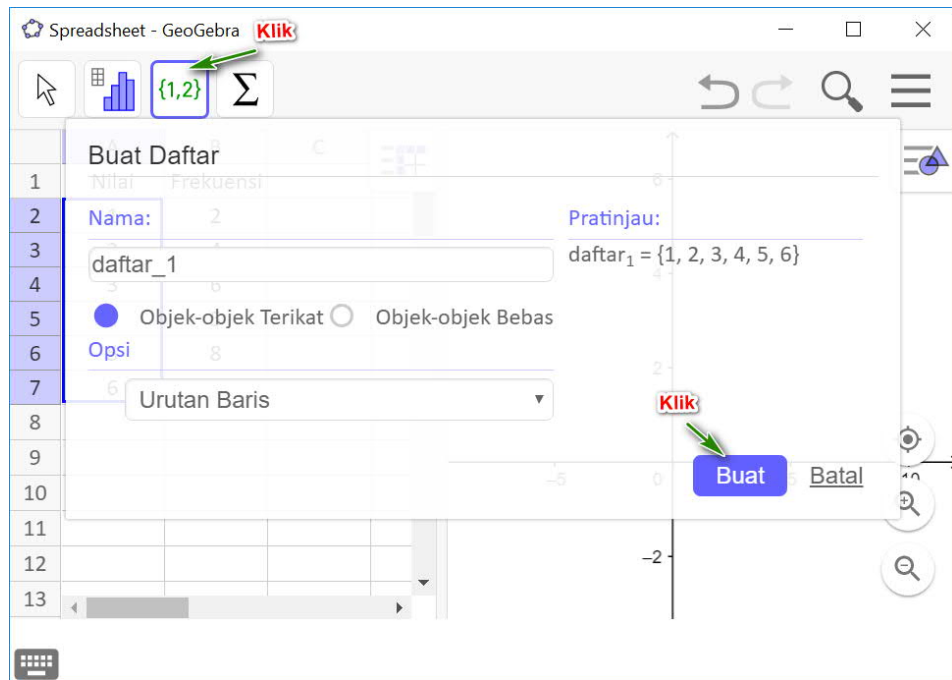
Pada pembahasan berikut ini dibuat table grafik batang dari suatu data frukuensi sebagai berikut.

Nilai	Frekuensi
1	2
2	4
3	6
4	5
5	8
6	1

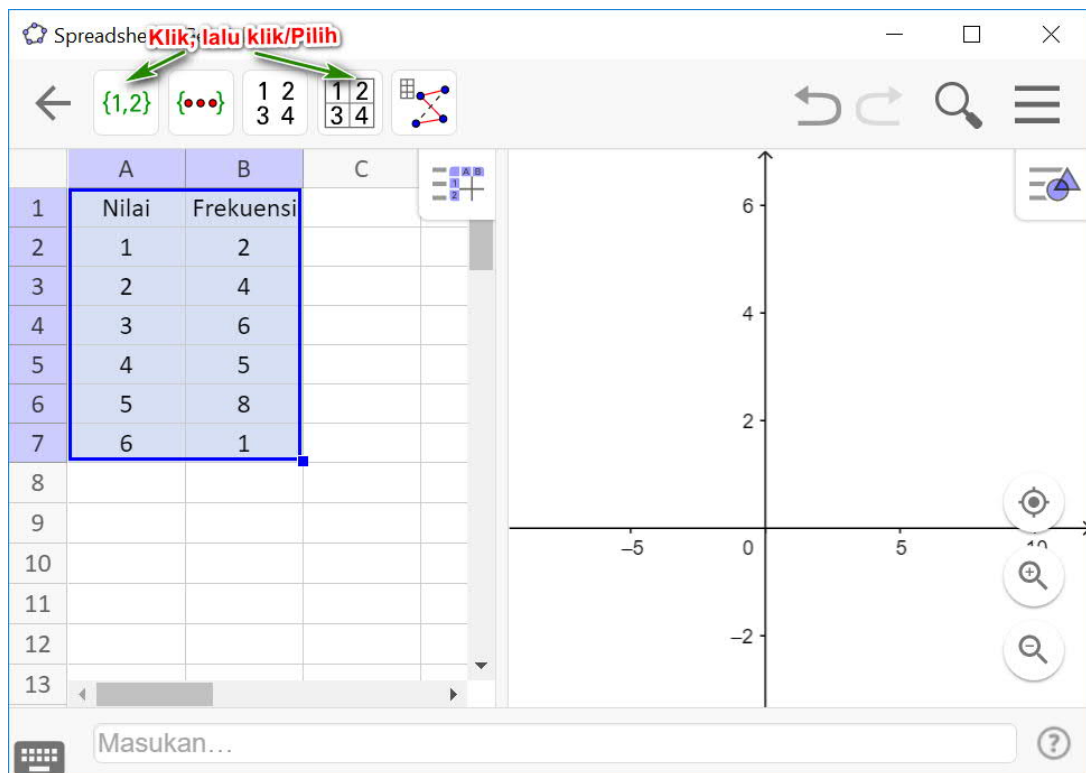
Selanjutnya data ini dianalisis secara statistika. Untuk hal ini buka Geogebra, pilih Perfektif Spreadsheet klik Menu Utama, klik Tampilan lalu centang Bilah Masukan. Isi kolom Sel A dan B sebagaimana gambar berikut.



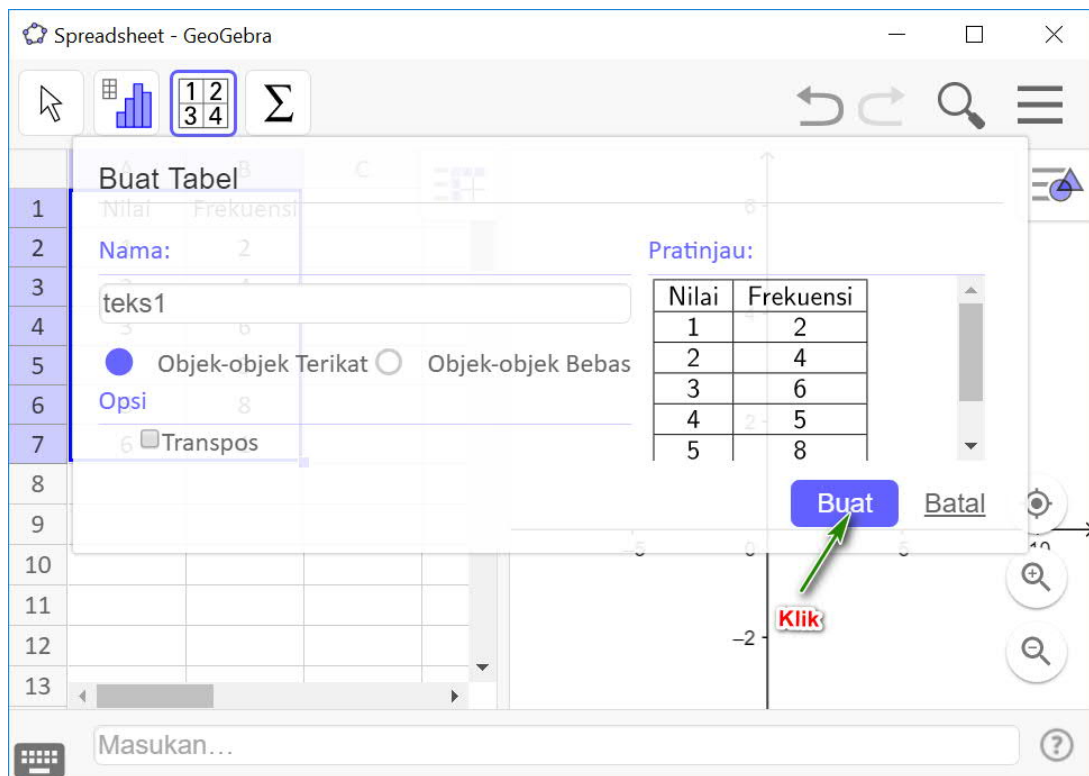
Lakukan perintah dalam gambar diatas. Sorot Sel A1 sampai Sel A7 dan lakukan sebagaimana gambar berikut.



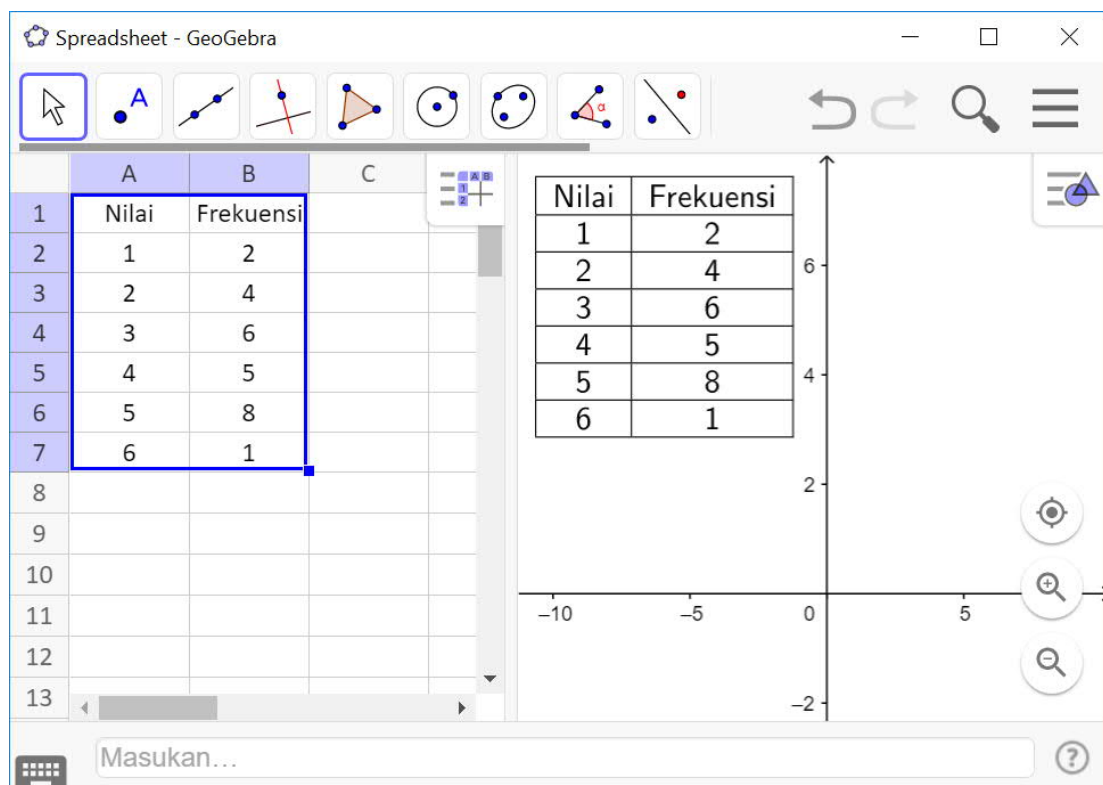
Lakukan hal yang sama tetapi untuk Sel B1 sampai Sel B7. Selanjutnya Sorot



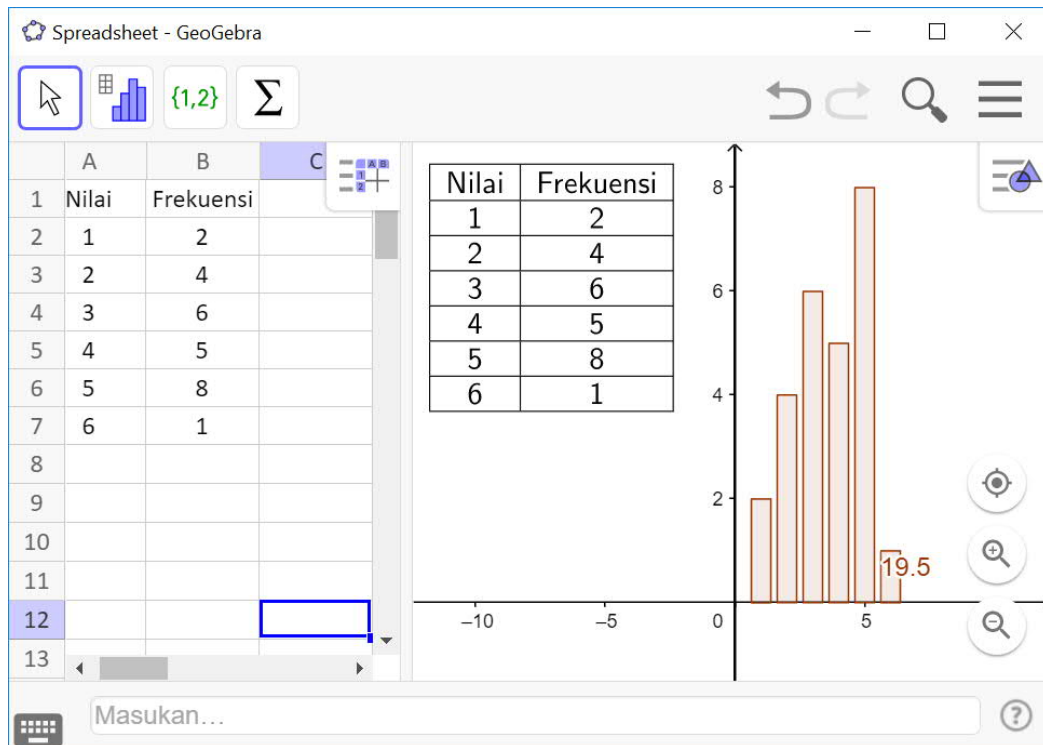
Lakukan sebagaimana dalam gambar diatas didapat gambar berikut.



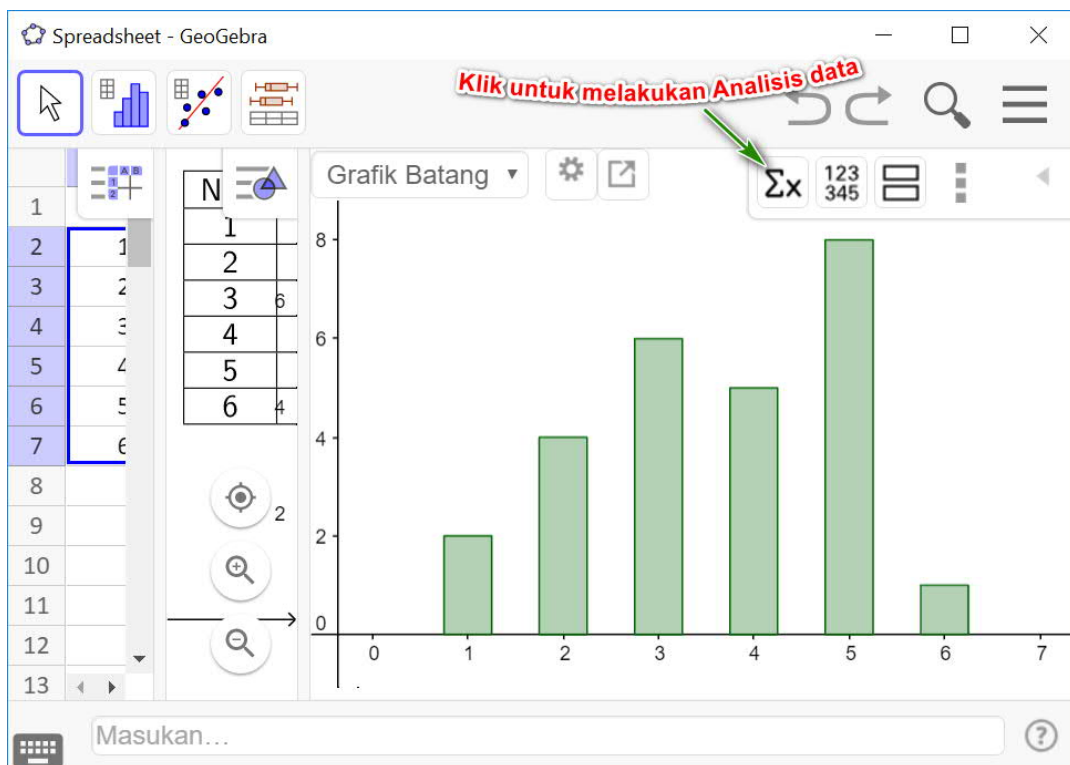
Ikuti perintah dalam gaambar diatas didapat gambar berikut.



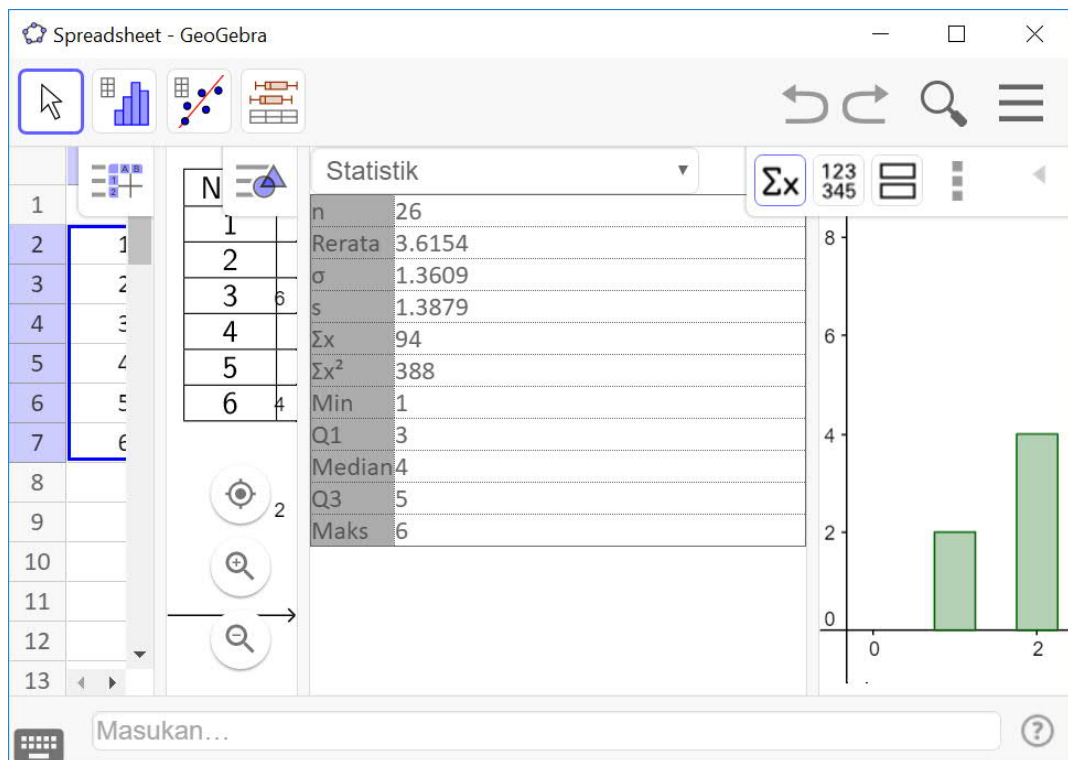
Pada baris masukan ketik : GrafikBatang(daftar_1,daftar_2,0.75) tekan Enter didapat gambar berikut.



Dari hasil gambar tampak bahwa table data dengan frekuensi dan gambar grafik batang dari data. Selanjutnya untuk melakukan analisis statistik dari data lakukan hal berikut. Sorot Sel A2 dan B2 sampai Sel A7 dan B7. Klik Analisis Satu Variabel sehingga didapat gambar berikut.



Ikuti perintah dalam gambar didapat gambar berikut

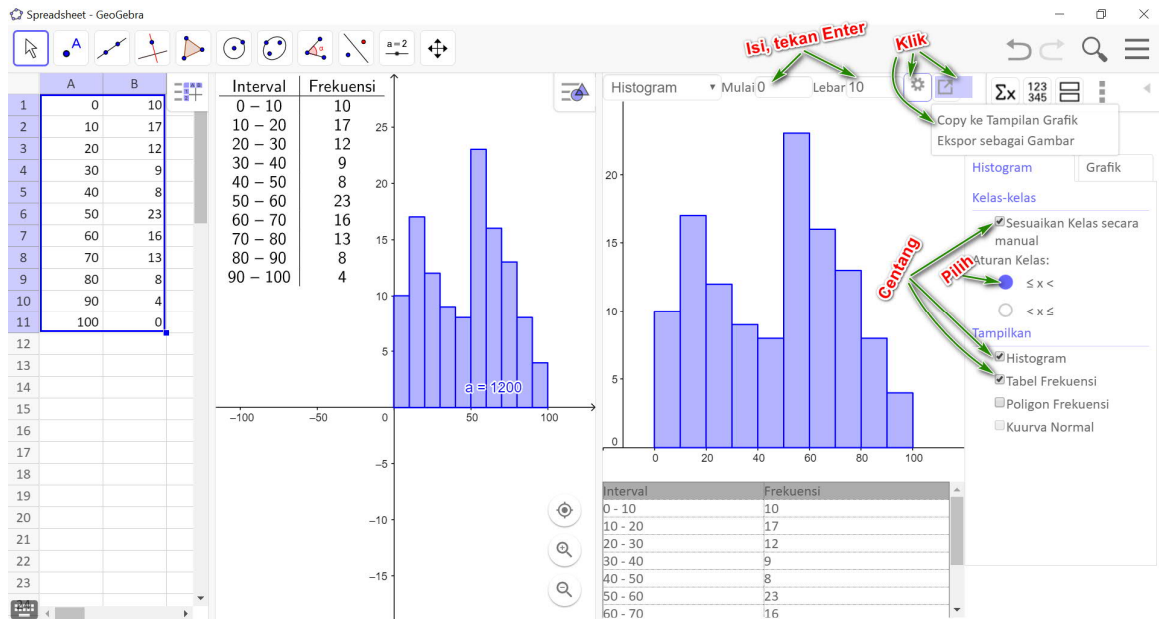


Terlihat hasil analisis data secara statistika adalah : banyaknya data 26, rerata 3.6154, simpangan baku 1.3609, simpangan sampel 1.3879, jumlah seluruh data 388, data minimum 1, data maksimum 6, kuartil bawah 3, median 4 dan kuartil atas 5.

Berikut ini dibahas Histogram dari data dalam suatu interval dari tabel berikut.

Nilai	Rekuensi
'0 – 10	10
'10 – 20	17
'20 – 30	12
'30 – 40	9
'40 – 50	8
'50 – 60	23
'60 – 70	16
'70 – 80	13
'80 – 90	8
'90 – 100	4

Selanjutnya data ini dianalisis secara statistika. Untuk hal ini buka Geogebra, pilih Perfektif Spreadsheet Isi kolom Sel A dan B sebagi mana gambar berikut.

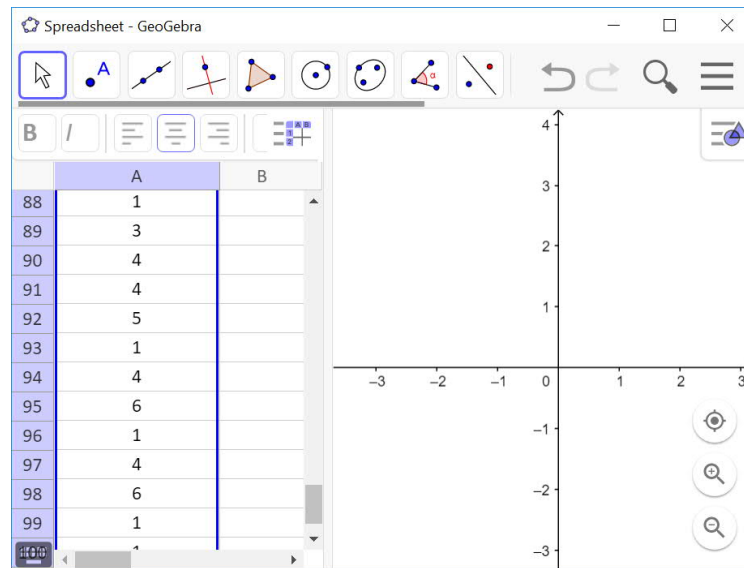


Lakukan seperti gambar diatas dan klik tanda Σx untuk menganalisis data didapat hasil anlisis data sebagaimana diberikan oleh gambar berikut.

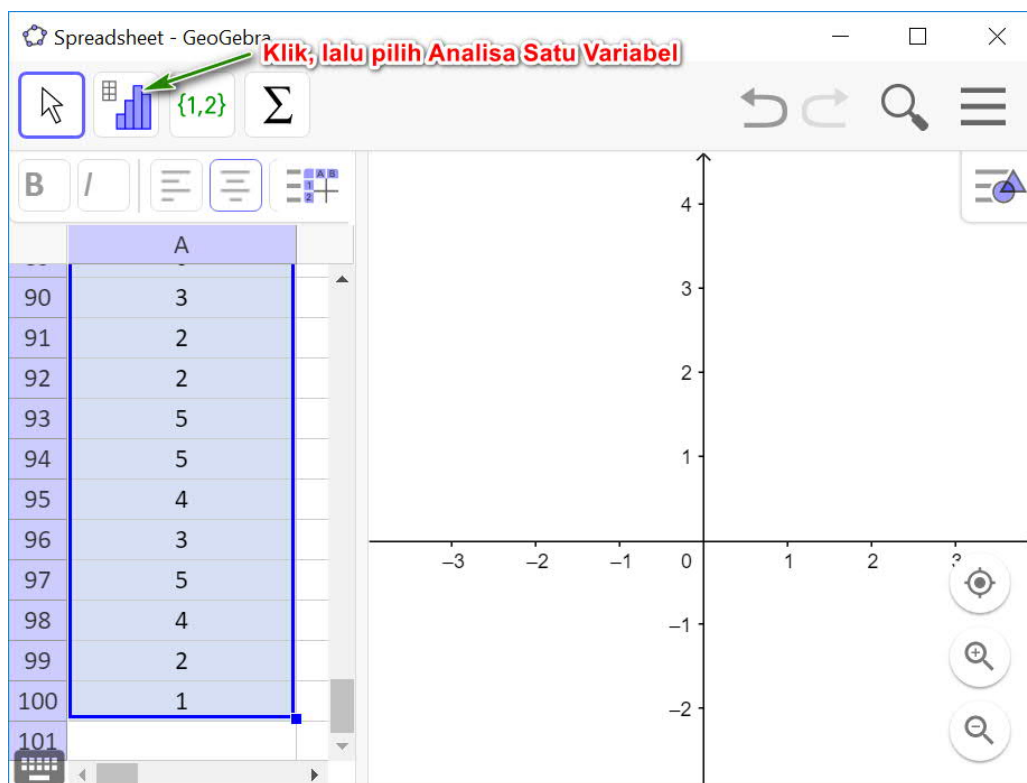
Statistik	
n	120
Rerata	41.8333
σ	25.7871
s	25.8952
Σx	5020
Σx^2	289800
Min	0
Q1	20
Median	50
Q3	60
Maks	90

Catatan untuk tabel nilai interval , batas atas tidak termasuk hal ini dilakukan dengan menandai pilihan $\leq x <$ sebagaimana telah dilakukan dalam gambar sebelumnya. Juga hasil-hasil analisis data perlu dihitung ulang apakah sesuai dengan pengertian-pengertian yang telah dipahaminya.

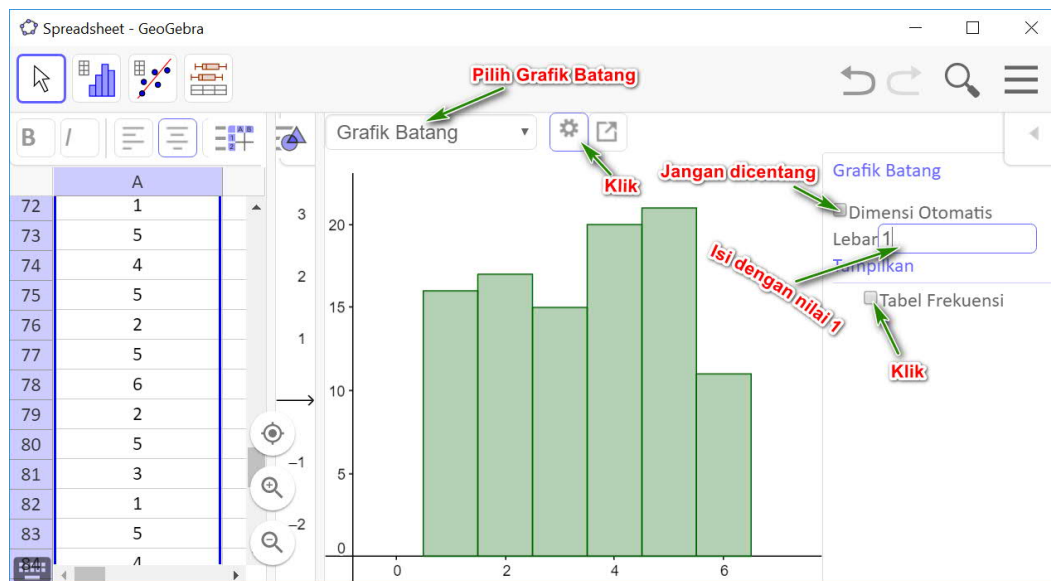
Berikut ini dibuat data hasil dari pelemparan dadu sebanyak 100 kali. Untuk membuat data ini secara acak, buka Geogebra, pilih Perfektif Spreadsheet. Pada sel A1 ketik AcakDiantara(1,6). Hal ini pada sel A1 akan memberikan nilai acak diantara 1 s/d 6 sebagaimana bila suatu dadu dilemparkan nilai sisi muka dadu kemungkinan adalah nilai diantara 1 s/d 6. Selanjutnya drag nilai di sel A1 sampai pada sel A100. Akan didapat gambar berikut.



Selanjutnya sorot sel A1 sampai sel A100 dan lakukan sebagaimana dalam gambar berikut.



Didapat gambar berikut.



Ikuti perintah gambar diatas didapat gambar berikut.

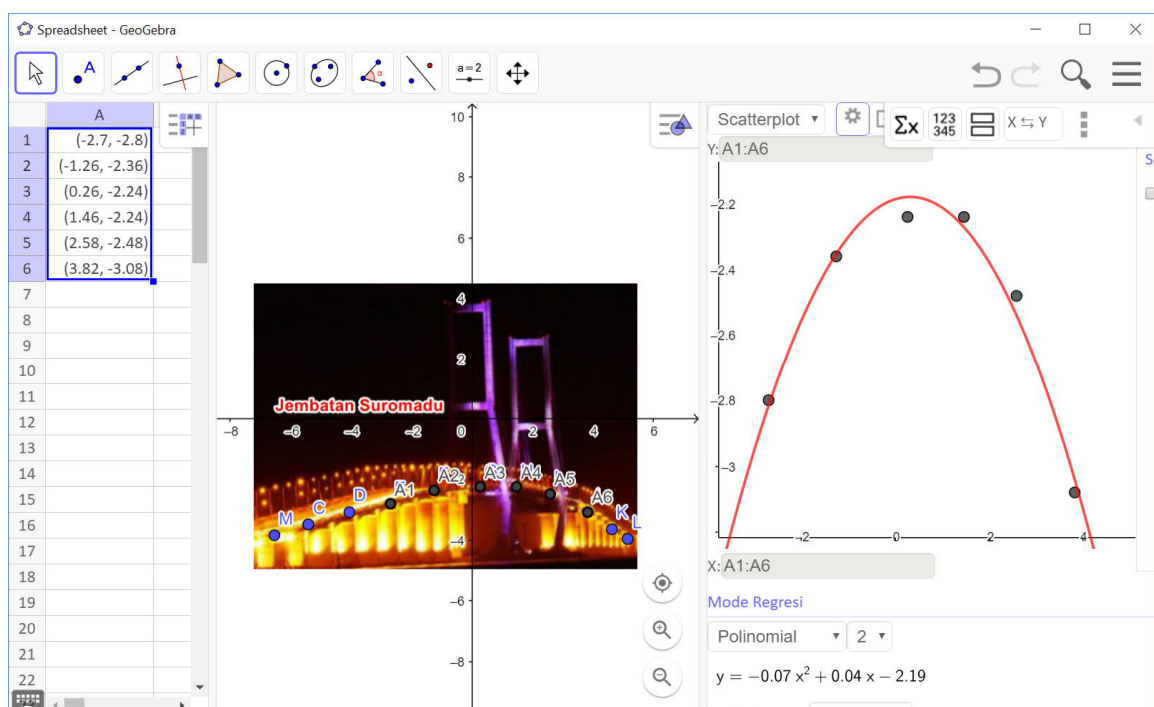


Dari gambar diatas, simpulkan dan diskusikan mengenai probabilitas dari nilai muka adalah 1,2,3,4,5 dan 6.

Pada pembahasan berikut cari gambar jembatan Suromadu dengan menggunakan mesin pencari Google dan masukkan dalam Geogebra. Lalu buat beberapa titik sebagaimana dalam gambar berikut.



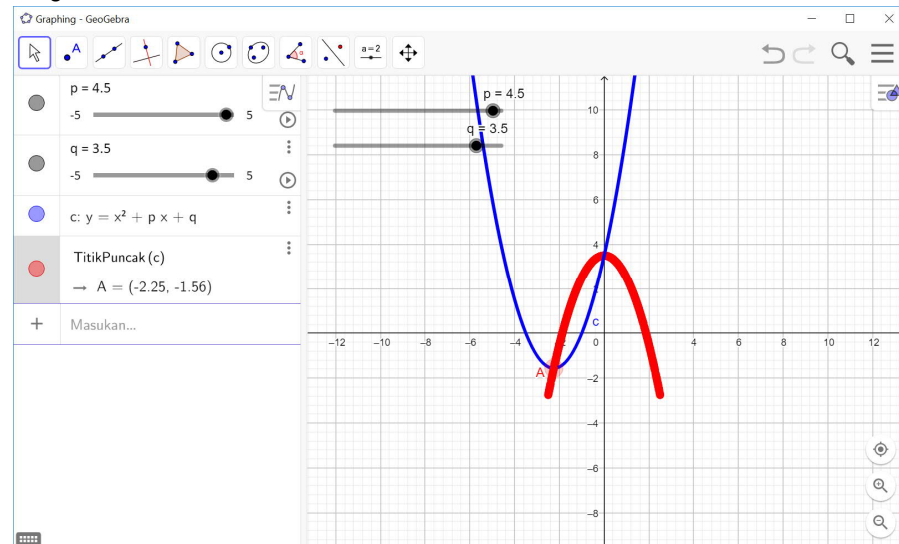
Tentukan persamaan kurva yang mendekati titik : E, F, G, H, I dan J. Untuk menjawab hal ini buka Perspektif Spreadsheet, pada sel A1 sampai A6 ketik titik E,F, G, H, I dan J. Lalu klik Analisis Regresi dua Variabel dan lakukan sebagai gambar berikut.



Terlihat bahwa Jembatan Suromadu berbentuk parabola $y = -0.07x^2 + 0.04x - 2.19$. Dari hasil ini perkiraan berapa tinggi jembatan Suromadu dari permukaan laut.

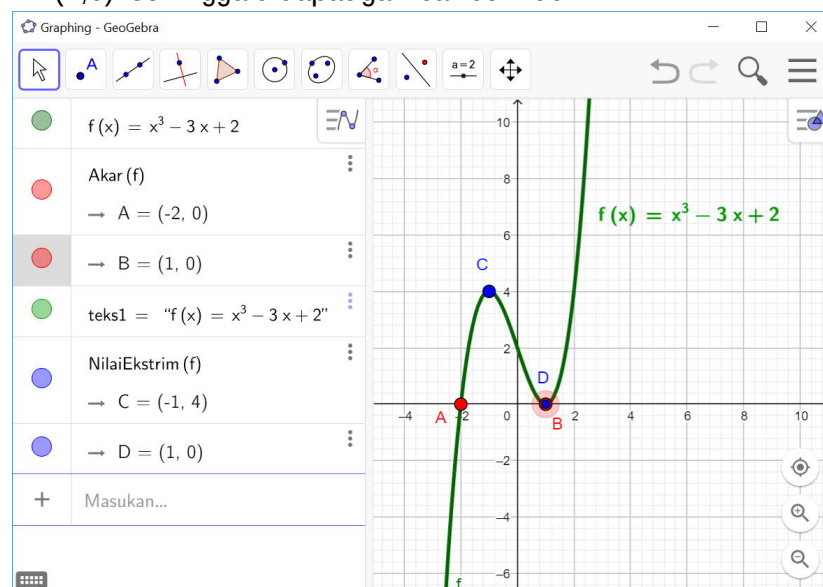
Aktifitas dan Diskusi

1. Pada Perangkat graphing buat Luncuran p dan q. Selanjutnya pada Baris Input ketik $y = x^2 + px + q$ tekan Enter untuk membuat parabola c. Berikutnya pada Baris Input ketik TitikPuncak(c) tekan Enter untuk membuat titik A. Klik kanan obyek titik A dan centang Tampilkan Jejak. Selanjutnya hidupkan animasi Luncuran p sehingga menghasilkan gambar berikut.



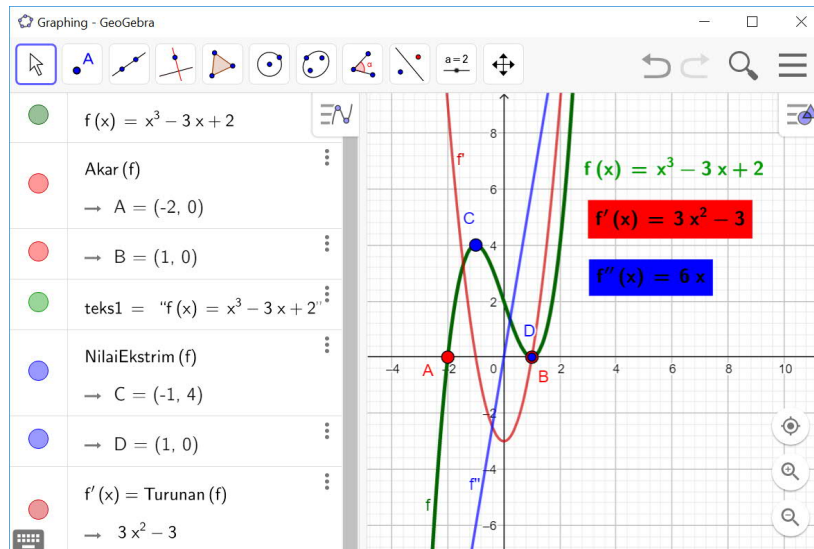
Grafik warna merah adalah hasil pergerakan titik puncak A. Buat suatu dugaan apa bentuk persamaan lintasan titik puncak A. Selanjutnya matikan animasi Luncuran p dan hidupkan animasi Luncuran q. Apa hasil lintasan dari titik puncak A. Diskusikan hasil ini dan beri kesimpulan.

2. Pada Baris Input ketik $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tekan Enter untuk membuat polinomial f. Pada Baris Input berikutnya ketik Akar(f) tekan Enter untuk menghasilkan dua titik A=(-2,0) dan B=(1,0). Lalu pada Baris Input ketik NilaiEkstrim(f) untuk menghasilkan titik C=(-1,4) dan D=(1,0). Sehingga didapat gambar berikut.



Dari hasil gambar ini diskusikan jenis ekstrim dari f dan tentukan nilai nilai dari x dimana f adalah fungsi naik dan f merupakan fungsi turun. Lakukan analisis perubahan dari keadaan naik menuju turun menghasilkan titik ekstrim apa, begitu

sebaliknya dari kondisi turun berubah ke naik menghasilkan titik ekstrim apa ? Jelaskan juga hubungannya dengan pengertian turunan pertama dan turunan kedua terhadap x pada $f(x)$. Gambar juga hasil turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ terhadap x dan lakukan obsevasi dari hasil gambar. Berikut ini hasil gambar lengkap apa yang dibahas.



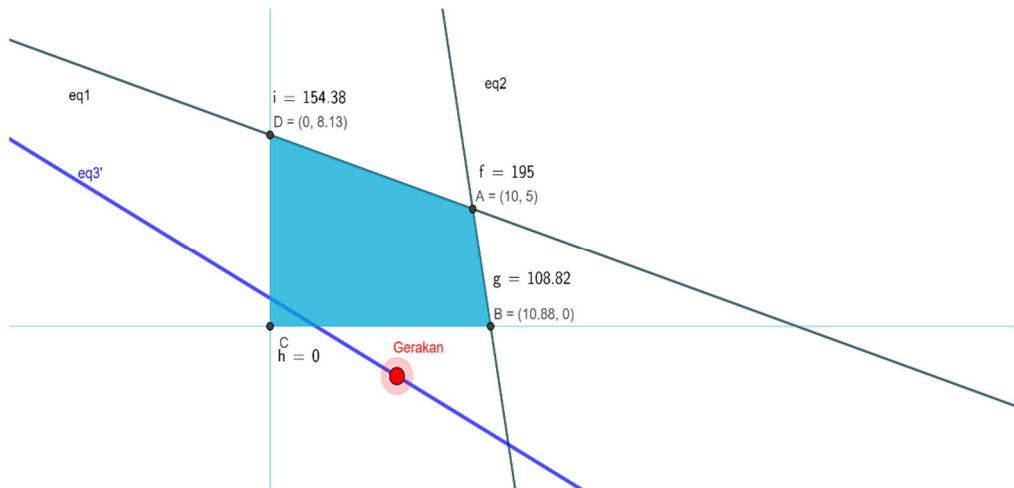
BAB V: GeoGebra Lanjut

Dalam Bab ini dibahas GeoGebra tingkat lanjut (advanced) yang akan memudahkan pengguna untuk lebih interaktif dengan media yang lainnya.

5.1 Mengeksport File Geogebra ke Lembar kerja HTML Dinamis

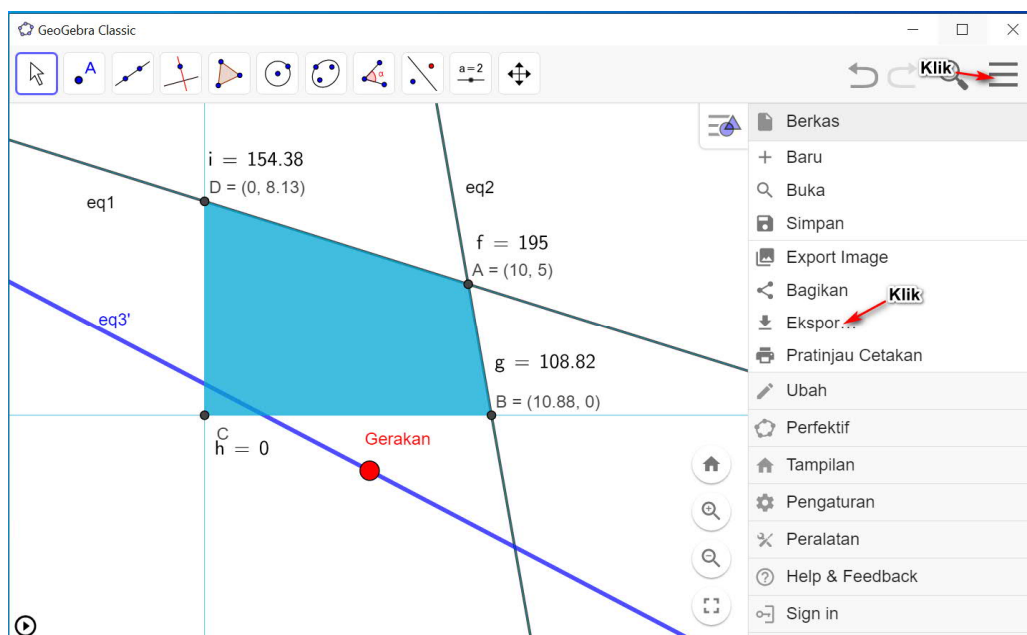
Ketika kita menyimpan konstruksi GeoGebra yang telah dibuat, hal yang telah dilakukan ini disimpan sebagai file GeoGebra dan diberi nama ekstensi ggb. Pembaca bisa melihat lagi bagaimana cara menyimpan hasil kontruksi Geogebra yang telah dibuat pada Bagian 2.1. Selanjutnya, kita akan memanggil file-file ini sebagai "file GGB." GeoGebra memungkinkan kita untuk mengeksport file GGB ini sebagai lembar kerja html dinamis, sebagai Mediawiki, atau sebagai gadget Google. Ini memungkinkan kita untuk menyematkan file kita di halaman web, blog, dan wiki.

Sebelum kita mengeksport suatu file GGB, kita buat dulu filenya, Sebagai contoh kita buat maslah program linear yang telah dibahas pada Bagian 3.3 soal Latihan 11. Untuk hal ini lakukan dulu Masalah Program Linier. Ketik berturut turut dalam Baris Input sebagai konstrain/ pembatas $5x + 16y \leq 130$, $17x + 3y \leq 185$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Pada Baris Input berikutnya ketik $a \& \& b \& \& c \& \& d$. Klik bagian baris input untuk tidak menampilkan gambar konstrain. Maka akan tergambar daerah fisibel dari konstrain. Selanjutnya berturut-turut dalam Baris Input ketik $5x + 16y = 130$, $17x + 3y = 185$. Selanjutnya tentukan titik potong dua grafik tersebut hasilnya adalah titik $A(10,5)$. Selanjutnya berturut-turut tentukan titik potong $5x + 16y = 130$ dengan sumbu- x , sumbu- x dengan sumbu- y dan $17x + 3y = 185$ dengan sumbu- y . Titik potong tersebut adalah titik B , C dan D . Titik potong A , B , C dan D adalah titik ekstrim pada daerah fisibel. Berikutnya, pada baris input ketik fungsi obyektif $P(x, y) = 10x + 19y$. Selanjutnya berturut-turut dalam Baris Input ketik : $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ dan $P(D)$. Dari hasil ini, simpulkan dan diskusikan berapa nilai maksimum dari fungsi obyektif $P(x, y) = 10x + 19y$. Nilai $P(A) = 195$ adalah nilai maksimum dengan demikian titik ekstrim $A(10,5)$ merupakan titik ekstrim maksimum. Selanjutnya kita buat animasi pergerakan fungsi obyektif dari nilai terendah $P(C) = 0$ sampai nilai yang maksimum $P(A) = 195$. Pada baris input ketik $10x + 19y = 0$ dan melalui titik A buat garis tegak lurus dengan garis $10x + 19y = 0$ tentukan titik potong di titik E . Buat segmen garis dari titik A ke titik E . Gunakan ikon Titik pada Obyek dalam Baris Peralatan 2 dan klik pada obyek ruas garis EA sehingga menghasilkan titik F . Pada baris Peralatan 3 pilih ikon Vektor diantara Dua Titik, klik titik E dan titik F , sehingga terbentuk vector u . Selanjutnya pada Baris Peralatan 9 pilih ikon Translasi Obyek oleh Vektor. Berikutnya klik obyek garis $10x + 19y = 0$ dan vektor u . Selanjutnya jangan tampilkan obyek garis $10x + 19y = 0$ dalam media gambar. Maka dengan menggerakkan titik F sepanjang segmen garis EA terjadi animasi dari garis $10x + 19y = 0$. Hasil konstruksi yang kita buat ini ditampilkan oleh gambar berikut:

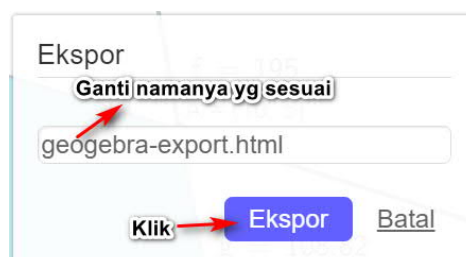


Langkah selanjutnya menyimpan konstruksi yang telah dibuat ini kedalam file GGB, namakan filenya menjadi programlinear2020.ggb, lalu tutup media GeoGebra.

Langkah berikutnya aktifkan media GeoGebra, lalu buka file programlinear2020.ggb sesuai dengan letak folder file tsb dan lakukan sebagai mana gambar berikut:

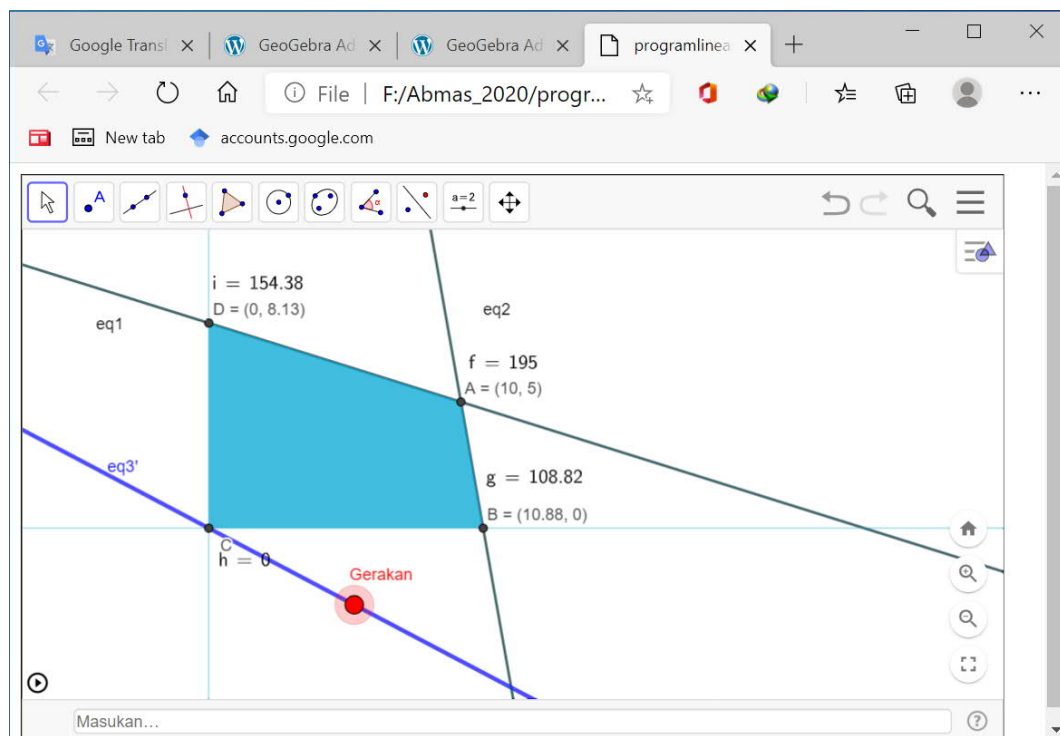


Selanjutnya pilih/klik: Lembar Kerja Dinamis Sebagai Halaman Web (html), sehingga akan muncul gambar berikut dan ikuti langkahnya:



Misalkan nama yang diberikan adalah programlinear2020.html, maka hasil file html ini bila dilakukan double klik otomatis akan dirunning dalam browser yang telah tersedia didalam laptop anda. File ini juga bisa dirunning dalam HP android. Silahkan dicoba.

Walaupun file hasil html yang terbentuk tidak terhubung langsung dengan media GeoGebra, tetapi file ini bisa merunning perintah-perintah yang ada dalam Geogebra. Ini adalah salah satu keutamaan Geogebra. Hasil tampilan file programlinear2020.html bila dilakukan double klik akan tampil sebagaimana gambar berikut:

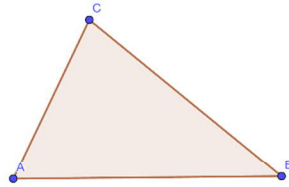


Perhatikan hasil gambar file programlinear2020.html, sudah tampil dalam media browsing. Tetapi perintah-perintah dari media GeoGebra masih muncul dalam Baris Peralatan dan juga tombol animasi. Sehingga animasi dari fungsi obyektif garis $10x + 19y = 0$ dapat dilakukan mengklik tombol animasi atau dengan menggerakkan titik yang berwarna merah. Perlu dipehatikan bahwa file HTML yang telah dihasilkan dapat diunggah di situs web kita, atau mengeditnya di editor HTML. Kode GeoGebra ditulis dalam Javascript. Harap diingat bahwa beberapa situs seperti WordPress.com tidak memperbolehkan Javascript untuk tujuan keamanan.

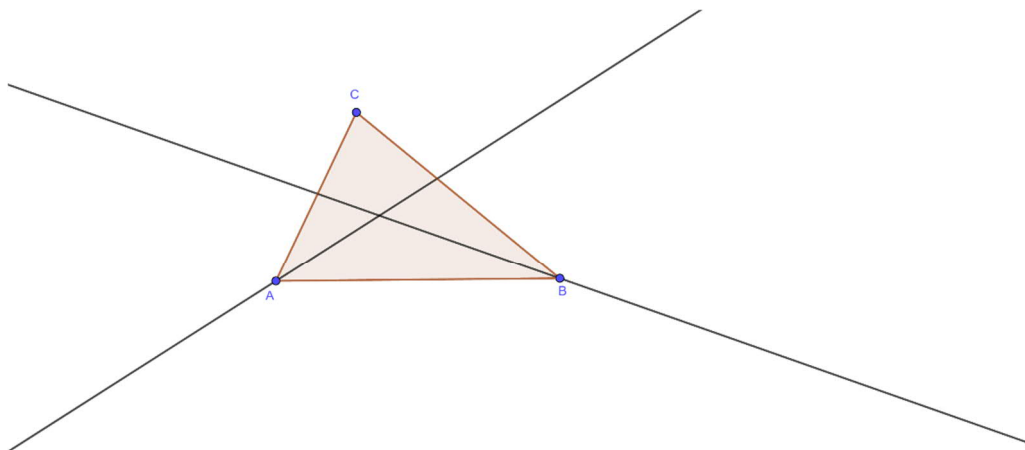
5.2 Membuat Alat Perintah yang Disesuaikan

Pada Bagian ini dibahas cara membuat suatu alat perintah dalam GeoGebra Klasik untuk mengkonstruksi lingkaran dalam sebarang segitiga. Alat perintah yang dihasilkan nantinya prosedurnya ringkas hanya memasukan sebarang tiga titik, maka akan tercipta lingkaran dalam pada segitiga yang melalui tiga titik yang diberikan. Berikut ini Langkah-langkahnya:

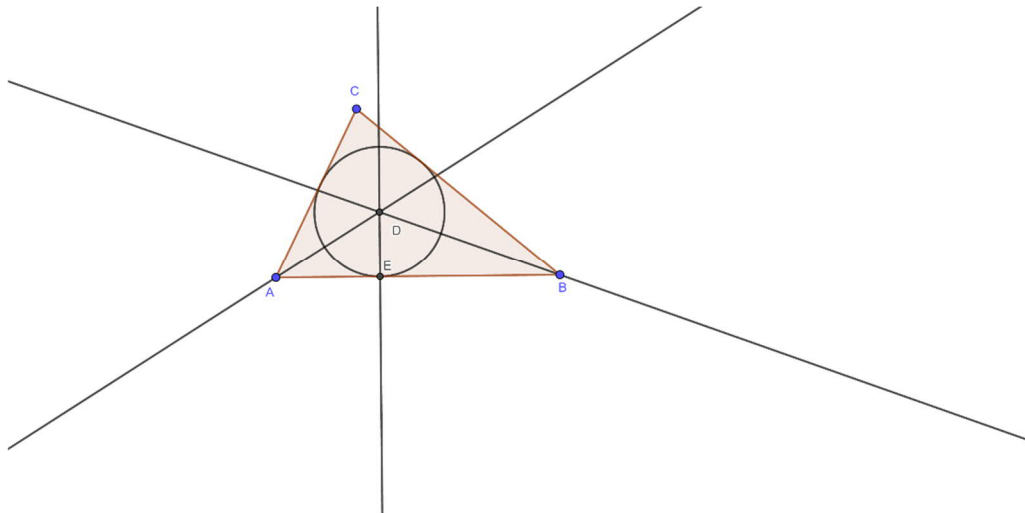
1. Buat lingkaran melalui tiga titik dengan memilih ikon Poligon pada Baris Peralatan 5 sehingga didapat gambar berikut:



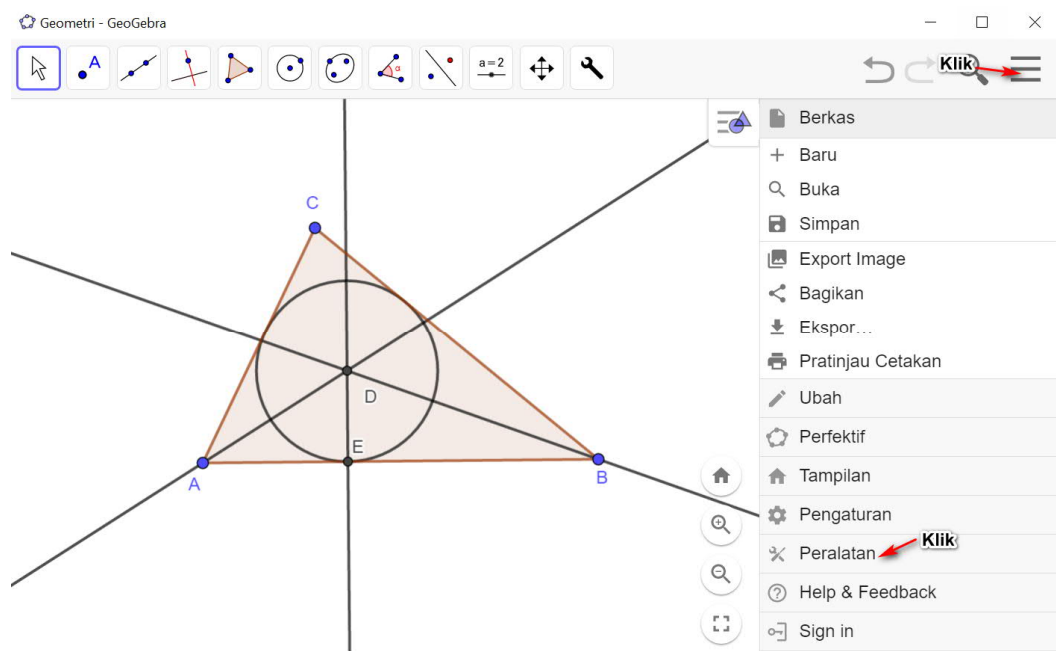
2. Pilih ikon Garis Bagi Sudut pada Baris Peralatan 4 untuk membuat sudut bagi pada titik A dan B sehingga didapat gambar berikut:



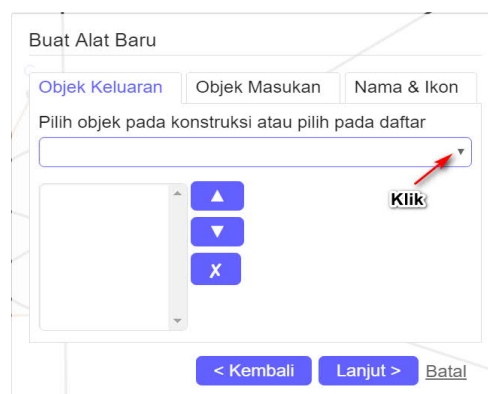
3. Buat titik potong dua garis bagi di D dan buat garis tegak lurus AB melalui titik D dan berpotongan dengan garis AB di titik E. Selanjutnya buat lingkaran dengan pusat D dan melalui titik E. Sehingga didapat gambar berikut:



4. Langkah berikutnya membuat alat perintah sesuai yang kita inginkan. Ikuti sebagaimana diberikan dalam gambar berikut:



5. Pilih ikon Buat Alat Baru sehingga tampil gambar berikut; dan ikuti apa yang terdapat dalam gambar:



6. Pilih ikon Lingkaran d: Lingkaran melalui E dengan pusat D, lalu klik sebagaimana gambar sebelumnya untuk memilih ikon **Ruas garis a: Ruas garis [B,C]**. Lakukan hal ini sampai didapat gambar berikut:



7. Setelah tombol Lanjut diklik, akan muncul gambar berikut:



8. Setelah tombol Lanjut diklik didapat gambar berikut:

Buat Alat Baru

Objek Keluaran Objek Masukan **Nama & Ikon**

Nama alat **Ganti dengan LingkaranDalam**
 Alat2

Nama Perintah
 Alat2 **Isi dengan Pilih Tiga Titik Sebarang**

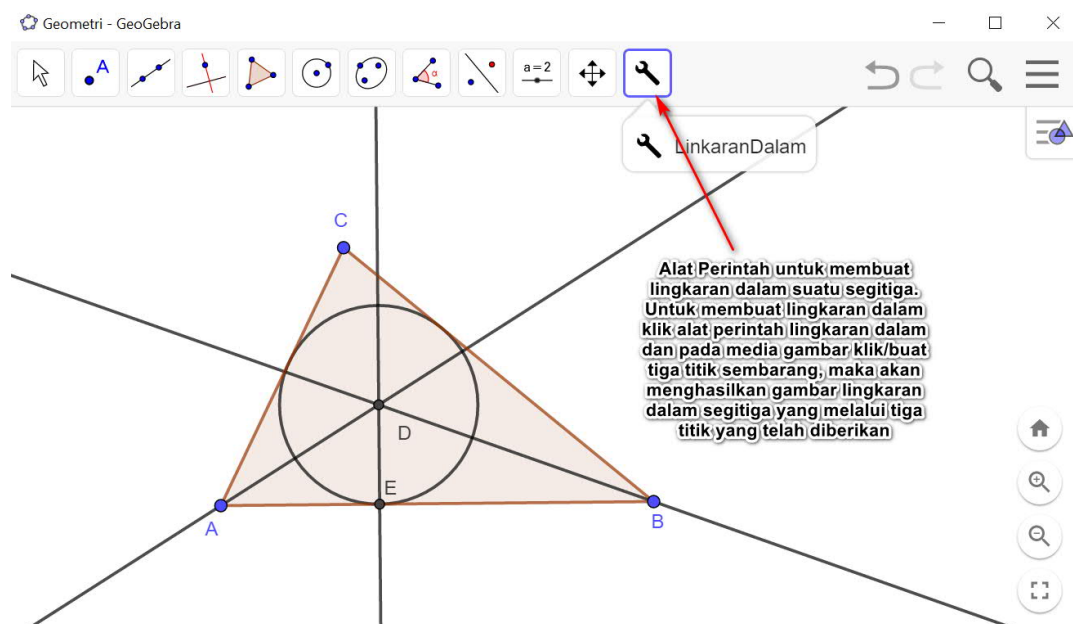
Bantuan Alat

☒ Tunjukkan pada Pita Peralatan

Klik
 Ikon ...

< Kembali **Selesai** Batal

9. Setelah tombol Selesai diklik, maka alat perintah dengan nama LingkaranDalam akan muncul dalam baris perintah sebagaimana gambar berikut:

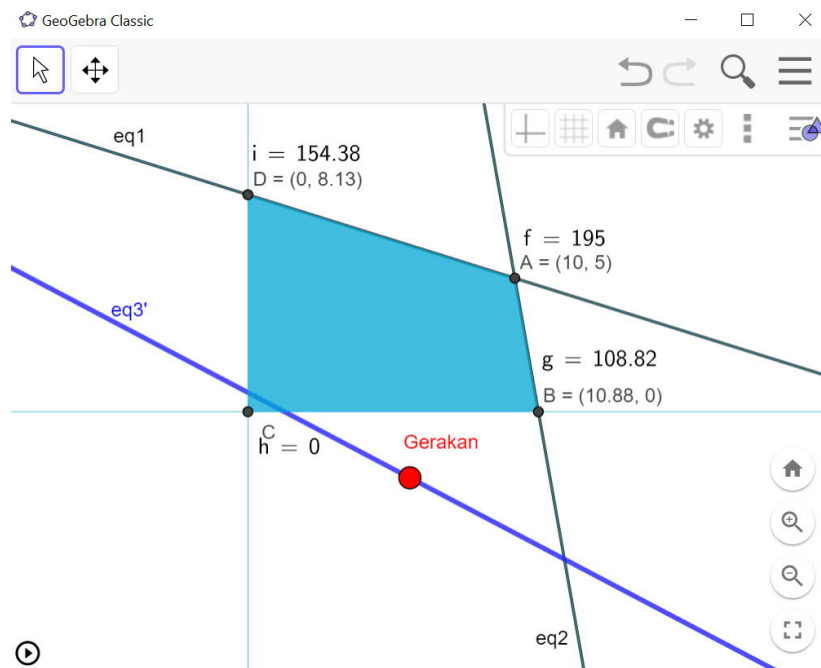


Dengan alat perintah LingkaranDalam yang baru saja dibuat, maka membuat lingkaran dalam suatu segitiga yang melalui tiga titik akan lebih sederhana dan mudah prosedurnya.

5.3 Menyesuaikan Baris Peralatan GeoGebra

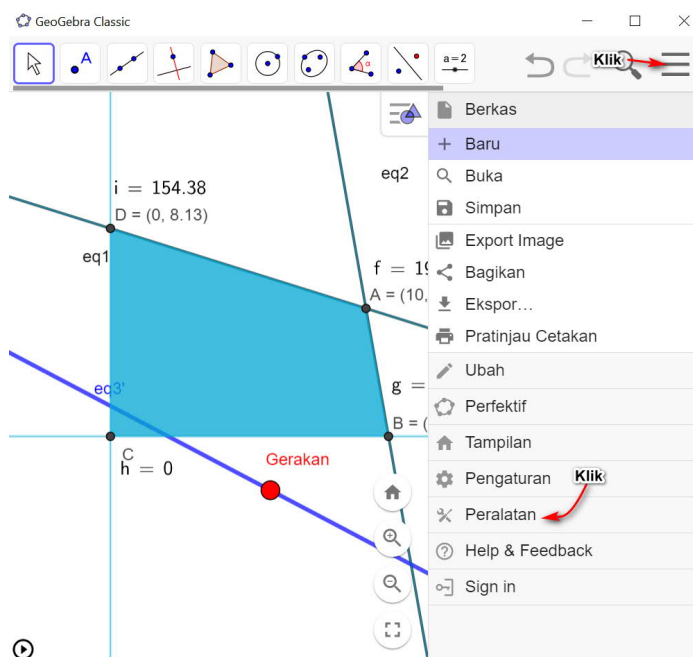
Saat kita mengunggah file GeoGebra sebagai HTML, kadang-kadang kita ingin mengendalikan aktivitas pengguna di lembar kerja kita. Ada saatnya kita ingin mereka menggunakan hanya sejumlah terbatas alat perintah dalam GeoGebra. Misalnya, kita ingin membatasi tombol untuk menyeret (dragging); kita tidak ingin pengguna membuat objek

matematika. Dalam hal ini, kita mungkin ingin hanya menampilkan alat perintah Pindahkan dan alat Geser Tampilan Grafik (lihat gambar pertama dibawah ini).

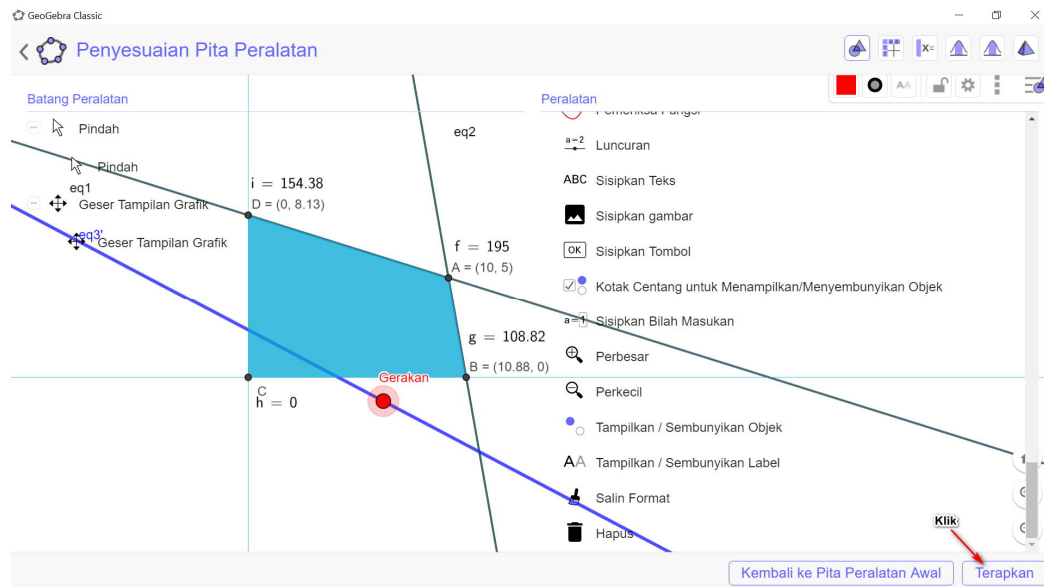


Perhatikan bahwa dalam gambar hanya ada dua perintah dalam Baris Perintah yaitu Pindah dan Geser Tampilan Grafik. GeoGebra memungkinkan kita untuk menyesuaikan Baris Peralatan seperti yang kita inginkan. Langkah-langkahnya ditunjukkan sebagai berikut.

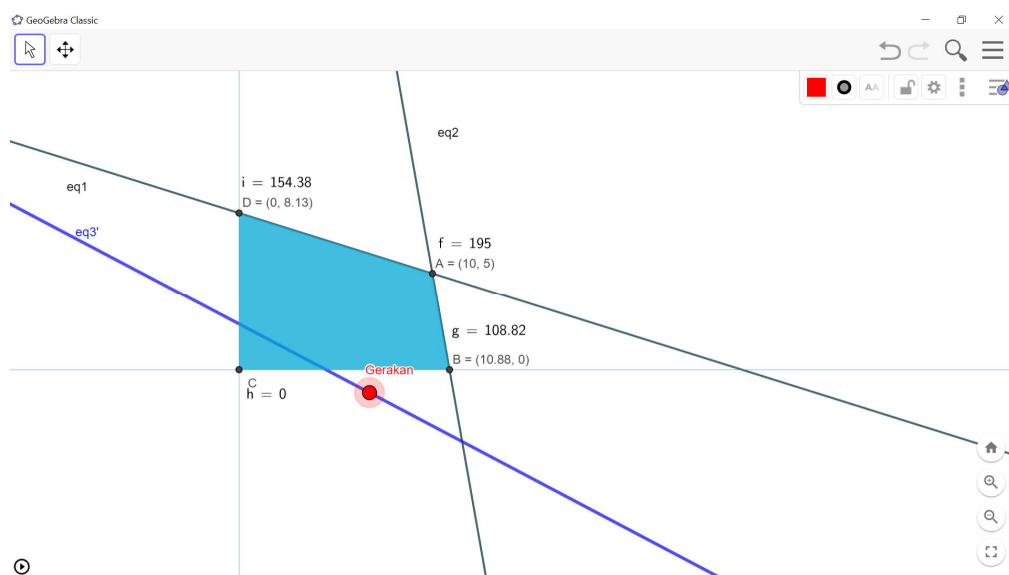
1. Kita buka file programlinear.ggb yang telah dibahas sebelumnya.
2. Selanjutnya ikuti sebagaimana dalam gambar berikut:



3. Lalu pilih/klik ikon Penyesuaian Pita Peralatan dan seret/drag semua Baris Peralatan kecuali Baris Peralatan 1 (Pindah) dan Baris Peralatan 11 (Geser Tampilan Grafik) ke kolom Peralatan sehingga didapat gambar berikut dan lakukan apa yang ada digambar:



4. Setelah tombol Terapkan diklik, maka akan tampil gambar berikut:



5. Terlihat bahwa pada Baris Peralatan hanya ada dua perintah yaitu Pindah dan Geser Tampilan Grafik. Hal ini tentunya sesuai dengan yang kita inginkan.

Apa yang telah dibahas ini sangat berguna Ketika kita mempunyai hasil konstruksi file yang telah dibuat dalam bentuk HTML. Sebagaimana telah dibahas sebelumnya bentuk file HTML bisa dirunning dalam media browsing/web dan pengguna tidak akan bisa mengubah dengan perintah-perintah yang tersaji dalam GeoGebra secara default. Sebab kita telah melakukan

penyesuaian Baris Peralatan yang hanya tersisa dua yaitu perintah Pindah dan Geser Tampilan Grafik.

5.4 Memasukkan Formula LaTeX dan Sisipkan Bilah Masukan

Menggunakan alat Teks , kita dapat memasukkan rumus matematika ke dalam Tampilan Grafik dengan menggunakan opsi rumus LaTeX dalam dialog Teks.

Cara memasukkan rumus LaTeX statis dan dinamis.

1.  Pilih alat Teks dan klik di Tampilan Grafik di sebelah teks pecahan.
2. Dalam dialog Teks yang muncul pilih Lanjutan.
3. $\frac{a}{b}$ Pilih tab formula LaTeX di bagian bawah dialog Teks dan pilih pecahan $\frac{a}{b}$ dari daftar ekspresi matematika.
Petunjuk: GeoGebra secara otomatis memasukkan sintaks yang diperlukan $\frac{a}{b}$ ke dalam kotak teks di atas.
4. Formula Pastikan rumus tombol LaTeX di bagian atas jendela dialog Teks diaktifkan, LaTeX sebelum kita mengklik OK.
 Catatan: Kita dapat mengedit rumus di Pengaturan teks pada tab Teks.
5.  Pindahkan teks ke posisi yang diinginkan dan perbaiki menggunakan Baris ragam supaya obyek bisa digeser atau tetap 

Pada kasus ini, kita buat suatu Sisipan Bilah Masukan $a=1$ untuk memasukan suatu nilai desimal dan sebagai keluran diubah menjadi nilai pecahan rasional yang menggunakan symbol LaTeX statis dan dinamis. Kita mulai membuat Sisipan Bila Masukan $a=1$ dan ikuti Langkah gambar berikut:



Selanjutnya isi dan ikuti sebagaimana gambar berikut

Sisipkan Bilah Masukan

Keterangan: **Isi dengan Masukan Nilai Desimal :**

Masukan Nilai Desimal :

Objek tertaut:

Klik

Dalam media gambar akan muncul gambar berikut dan ikuti perintah gambar:

Masukan Nilai Desimal :

Klik Kanan

Kotak Masukan kotakmasukan2: KotakMasukan()

- ☒ Tampilkan Objek
- ☒ Kunci Objek
- ☒ Pin to Screen
- ☐ Namai Ulang
- ☐ Hapus
- ☒ Pengaturan **Klik**

Selanjutnya klik pada pilihan Teks ubah pilihan S (Kecil) menjadi L (Besar) dan pada Pembulatan pilih 10 Angka Desimal. Selanjutnya pada pilihan Warna pilih merah, pada pilihan Format isikan 10 pada Lebar Kotak Masukan dan pilih Pusat pada Atur alignment horizontal. Berikutnya pada kotak Kotak Masukan ketik nilai desimal 0.231012, sehingga didapat gambar berikut:

Masukan Nilai Desimal : 0.231012

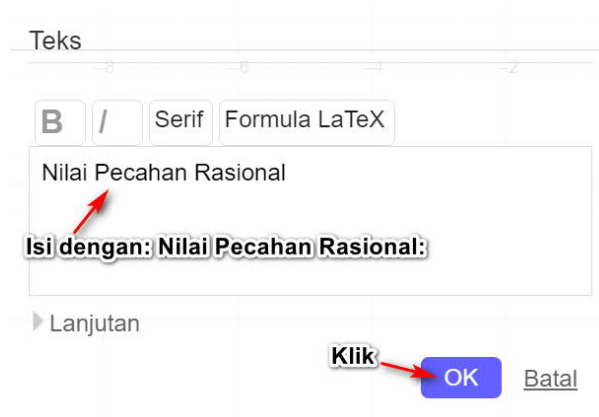
Nilai 0.231012 bisa diganti dengan sebarang nilai decimal yang lainnya asalakan Panjang desimalnya tidak melebihi 10 angka desimal. Selanjutnya berturut-turut dalam media baris input ketik: Pembilang(a) tekan enter dan FungsiPembagi(a) tekan enter sehingga dalam media baris input akan tampil sebagai gambar berikut:

Angka

a = 0.231012	⋮
b = Pembilang(a)	⋮
→ 1098	
c = FungsiPembagi(a)	⋮
→ 4753	

Nilai $a=0.231012$ adalah nilai input yang telah diketik dan $b=\text{Pembilang}(a) \rightarrow 1098$ serta $c=\text{FungsiPembagi}(a) \rightarrow 4753$. Hal ini berarti bahwa nilai desimal $0.231012 = \frac{1098}{4753}$. Selanjutnya dalam Media Gambar kita buat teks : Nilai Pecahan Rasional : $\frac{a}{b} = \frac{1098}{4753}$. Disini $\frac{a}{b}$ simbol formula LaTeX statis dan $\frac{1098}{4753}$ adalah simbol formula LaTeX dinamis. Berikut ini cara membuatnya:

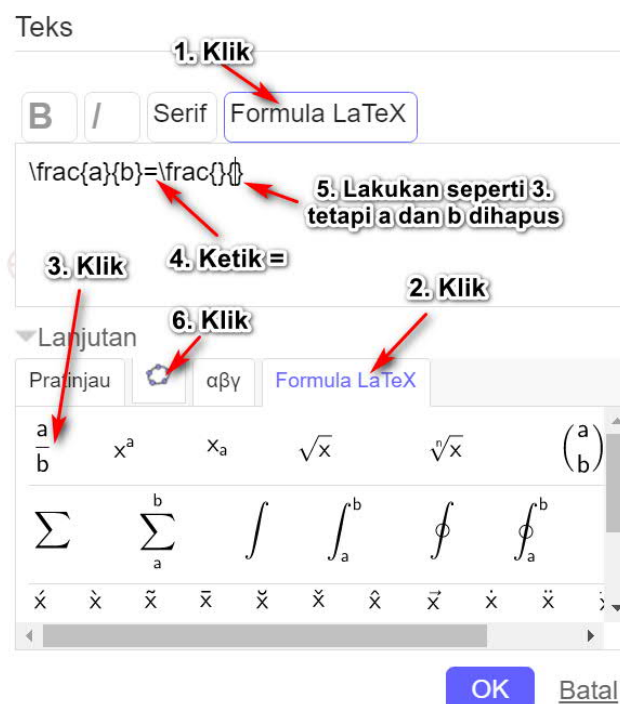
Klik pilihan ABC lalu ikuti apa yang tertera dalam gambar berikut:



Ikuti cara sebelumnya untuk memperbesar ukuran teks dan beri warna biru sehingga dalam media gambar menghasilkan gambar berikut:

Nilai Pecahan Rasional :

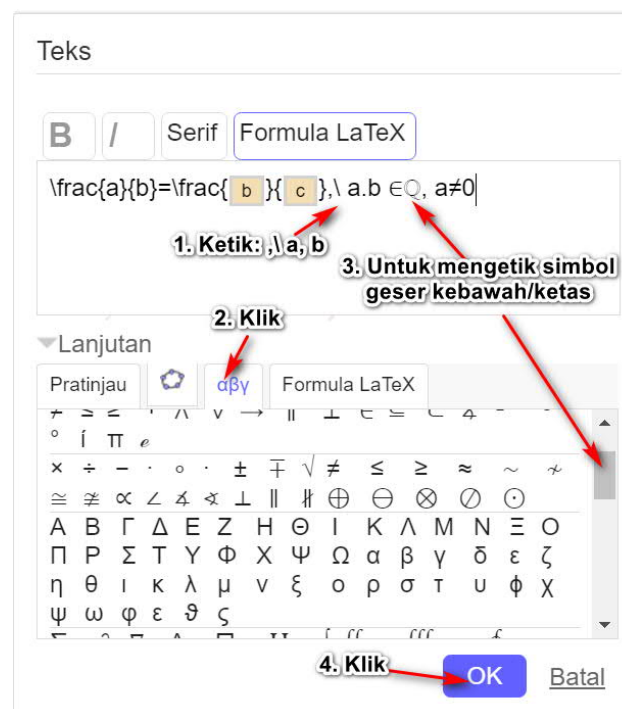
Berikutnya tinggal membuat teks formula LaTeX statis dan dinamis sebagai berikut: Klik pilihan ABC lalu ikuti apa yang tertera dalam gambar berikut sesuai dengan urutan nomer:



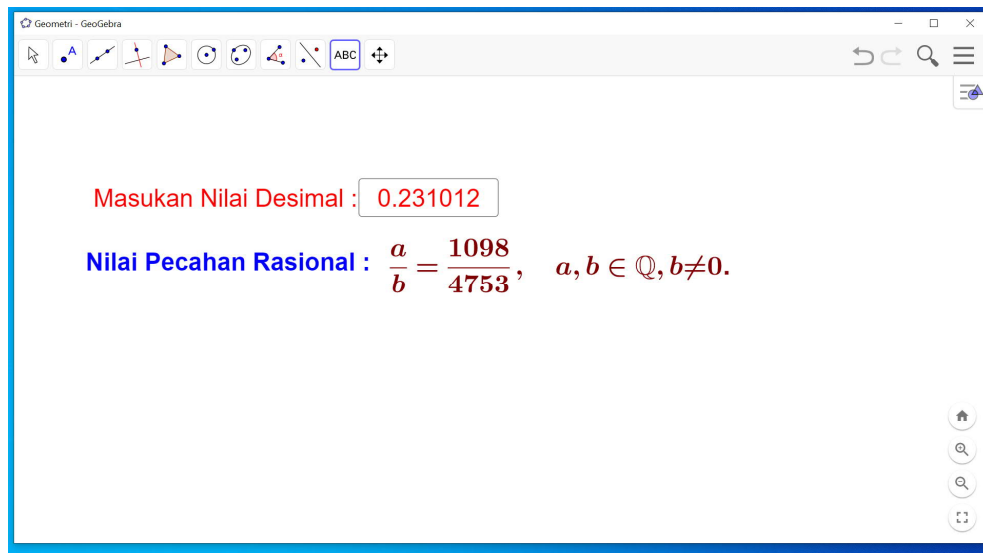
Setelah pilihan nomer 6 akan muncul gambar berikut dan ikuti sesuai urutan nomer yang ada dalam gambar:



Sebelum mengklik OK, ikuti apa yang ada Digambar berikut sesuai nomer urutan:



Hasil akhir dari apa yang kita lakukan ini diberikan oleh gambar berikut:



Dari hasil gambar diatas, bila nilai desimal 0.231012 diganti dengan nilai decimal yang lainnya secara otomatis nilai pecahan rasional $\frac{a}{b}$ akan berubah sesuai dengan nilai perubahan.

BAB VI: Geometri

Dalam bab ini dibahas secara lengkap tentang Geometri dari yang dasar hingga lanjut. Hampir semua bahasan dalam bab ini kita rujuk dari [4]. Pembahasan dimulai dengan beberapa pengertian dasar dari Geometri dan beberapa contoh-contohnya serta diakhiri dengan Latihan. Selain dari pada itu beberapa pembahasan juga kita gunakan alat Geogebra Klasik.

Geometri yang dipelajari dalam buku ini adalah geometri Euclidean. Geometri Euclidean dinamai Euclid dari Alexandria, yang hidup dari sekitar 325 SM hingga sekitar 265 SM. Orang-orang Yunani kuno mengembangkan geometri ke tingkat yang sangat maju dan Euclid melakukan pekerjaannya pada tahap selanjutnya dari perkembangan itu. Dia menulis serangkaian buku, yang disebut Elemen, yang mengatur dan meringkas geometri Yunani kuno. Elemen Euclid sejauh ini menjadi teks geometri paling terkenal dalam sejarah dan hasilnya, Euclid secara universal dikaitkan dengan geometri sebagai hasilnya.

Secara kasar, geometri Euclidean dasar adalah geometri yang terkandung dalam tulisan-tulisan Euclid. Sebagian besar pembaca sudah terbiasa dengan sedikit geometri Euclidean dasar karena semua geometri sekolah menengah termasuk dalam kategori itu. Geometri Euclidean tingkat lanjut adalah geometri yang ditemukan kemudian adalah geometri yang dilakukan setelah kematian Euclid tetapi masih dibangun di atas karya Euclid. Itu harus dibedakan dari geometri non-Euclidean, yang merupakan geometri berdasarkan aksioma yang berbeda dari yang digunakan oleh Euclid. Selama berabad-abad sejak Euclid hidup, geometer terus mengembangkan geometri Euclidean dan telah menemukan sejumlah besar hubungan yang menarik. Penemuan mereka merupakan geometri Euclidean tingkat lanjut dan merupakan pokok dari teks ini.

Banyak hasil dari geometri Euclidean tingkat lanjut cukup mengejutkan. Kebanyakan orang yang mempelajarinya untuk pertama kali menganggap teorema itu luar biasa, nyaris ajaib, dan menghargai mereka untuk daya tarik estetika mereka sama halnya dengan utilitas mereka. Saya berharap pengguna ini buku akan datang untuk menghargai keanggunan dan keindahan geometri Euclidean dan lebih memahami mengapa subjek telah memikat minat begitu banyak orang selama dua ribu tahun terakhir.

Buku ini mencakup studi tentang model disk Poincaré untuk geometri hiperbolik. Karena model ini dibangun dengan geometri Eropa, itu adalah topik yang sesuai untuk dipelajari dalam kursus tentang geometri Euclidean. Konstruksi Euclidean, sebagian besar menggunakan inversi dalam lingkaran, digunakan untuk menggambarkan banyak hasil standar geometri hiperbolik.

Bahasan Geometri Ini bukan menjabarkan semua fakta yang harus kita ketahui tentang geometri Euclidean canggih. Sebaliknya, ini dimaksudkan sebagai panduan untuk subjek yang mengarahkan kita untuk menemukan teorema dan bukti mereka untuk diri sendiri. Untuk sepenuhnya menghargai geometri yang disajikan di sini, kita harus terlibat aktif

dalam proses eksplorasi dan penemuan. Jangan membaca bahasan ini secara pasif, tetapi rajin mengerjakan eksplorasi sendiri saat kita membacanya.

Alat utama yang digunakan untuk memfasilitasi keterlibatan aktif dan penemuan adalah paket perangkat lunak GeoGebra. Ini memungkinkan pengguna untuk menjelajahi teorema geometri Euclidean canggih, untuk menemukan banyak hasil untuk diri mereka sendiri, dan untuk melihat hubungan yang luar biasa dengan mata mereka sendiri.

Pembasan dalam bab ini sebagian besar terdiri dari latihan, diikat bersama oleh penjelasan singkat. Pengguna harus mengerjakan semua latihan sambil membaca bahasan. Dengan begitu ia akan dibimbing melalui proses penemuan. Setiap latihan yang ditandai dengan bintang (*) dimaksudkan untuk dikerjakan di komputer, menggunakan GeoGebra, sedangkan latihan yang tersisa harus dikerjakan menggunakan pensil dan kertas. Tidak ada pengetahuan GeoGebra sebelumnya yang diasumsikan; petunjuk lengkap tentang cara menggunakan GeoGebra sudah dibahas pada beberapa bab sebelumnya.

Sebuah pencapaian utama dari orang-orang Yunani kuno adalah pengenalan logika dan ketelitian dalam geometri. Mereka membuktikan teorema mereka dari prinsip pertama dan dengan demikian hasilnya lebih pasti dan bertahan lama daripada hanya pengamatan dari data empiris. Aspek logis, deduktif dari geometri dicontohkan dalam Elemen Euclid dan bukti terus menjadi salah satu ciri khas geometri hingga hari ini.

Sampai saat ini, semua orang yang bekerja pada geometri Euclidean canggih mengikuti jejak Euclid dan melakukan geometri dengan membuktikan teorema, hanya menggunakan pensil dan kertas. Sekarang program komputer seperti GeoGebra tersedia sebagai alat, kita harus memeriksa ulang tempat pembuktian dalam geometri. Beberapa orang mungkin mengharapkan penggunaan perangkat lunak dinamis untuk menggantikan pendekatan deduktif ke geometri, tetapi tidak ada alasan kedua pendekatan tidak dapat saling meningkatkan. Saya berharap buku ini akan menunjukkan bahwa bukti dan eksplorasi komputer dapat hidup berdampingan dengan nyaman dalam geometri dan masing-masing dapat mendukung yang lain.

Latihan-latihan dalam bab ini akan memandu siswa untuk menggunakan GeoGebra untuk mengeksplorasi dan menemukan pernyataan teorema dan kemudian akan menggunakan GeoGebra untuk lebih memahami bukti teorema juga. Pada akhir proses penemuan ini, siswa harus mampu menunjukkan bukti dari hasil yang telah ditemukan. Dengan cara ini siswa akan memahami materi sampai ke kedalaman yang tidak akan mungkin jika hanya eksplorasi komputer atau hanya menggunakan pensil dan kertas bukti dan harus menghargai fakta bahwa bukti adalah bagian integral dari eksplorasi, penemuan, dan pemahaman dalam matematika.

Tidak hanya pembuktian merupakan bagian penting dari proses dimana kita datang untuk menemukan dan memahami hasil geometris, tetapi pembuktian juga memiliki keindahan halus mereka sendiri. Kami berharap bahwa pengalaman menulis bukti akan membantu siswa untuk menghargai aspek estetika dari subjek ini juga.

Dalam bahasan ini, kata "verifikasi" akan digunakan untuk menggambarkan jenis konfirmasi yang dimungkinkan dengan GeoGebra. Jadi untuk memverifikasi bahwa jumlah sudut suatu segitiga adalah 180° akan berarti menggunakan GeoGebra untuk membangun segitiga, mengukur tiga sudutnya, menghitung jumlah pengukuran, dan kemudian mengamati bahwa GeoGebra melaporkan bahwa jumlah selalu sama dengan 180° terlepas bagaimana ukuran dan bentuk segitiga diubah. Di sisi lain, untuk membuktikan bahwa jumlah sudut adalah 180° berarti memberikan argumen logis tertulis berdasarkan aksioma dan teorema Euclidean yang sebelumnya terbukti.

6.1 Tinjauan Cepat Geometri Euclidean Dasar

Bagian awal ini mengulas hasil-hasil dasar dari geometri Euclidean dasar yang akan dibutuhkan dalam sisa bahasan ini. Diasumsikan bahwa para pembaca telah mempelajari geometri Euclidean dasar; tujuan bab ini adalah untuk mengklarifikasi hasil mana yang akan digunakan kemudian dan untuk memperkenalkan notasi yang konsisten. Pembaca yang menggunakan buku ini sebagai pelengkap kursus dalam dasar-dasar geometri mungkin dapat menghilangkan sebagian besar bab dan hanya merujuknya jika diperlukan untuk ringkasan notasi dan terminologi yang digunakan dalam sisa bahasan ini.

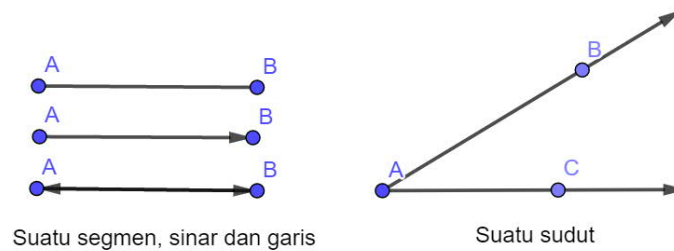
Teorema dalam bagian ini harus diasumsikan tanpa bukti; seluruh bagian dapat dilihat sebagai serangkaian aksioma yang diperluas untuk subjek geometri Euclidean tingkat lanjut. Hasil dalam latihan harus dibuktikan menggunakan teorema yang dinyatakan dalam bagian ini. Semua latihan dalam bagian ini adalah teorema yang akan dibutuhkan nanti.

Kami biasanya akan merujuk langsung ke Elemen Euclid ketika kami mengutip hasil dari geometri Euclidean dasar. Beberapa edisi Elemen saat ini tercantum dalam daftar pustaka. Elemen-elemen tersebut berada dalam domain publik dan tersedia secara bebas di web juga. Proposisi Euclid direferensikan oleh nomor buku diikuti oleh nomor proposisi dalam buku itu. Jadi, misalnya, Proposisi III.36 mengacu pada proposisi ke 36 dalam Buku III Elemen.

6.1.1 Pengukuran dan Kongruensi

Untuk setiap pasangan titik A dan B dalam bidang terdapat bilangan non-negatif AB , yang disebut jarak dari A ke B . Titik B adalah antara A dan C jika B berbeda dari A dan C dan jarak aditif dalam arti bahwa $AB + BC = AC$. Jika B adalah antara A dan C , maka A, B , dan C adalah kolinear. Sebaliknya, jika tiga titik berbeda adalah kolinear, maka salah satunya adalah di antara dua titik lainnya.

Segmen dari A ke B , dinotasikan $\overline{AB}$, terdiri dari A dan B bersama-sama dengan titik antara A dan B . Panjang $\overline{AB}$ adalah jarak dari A ke B . Dua segmen $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ adalah kongruen, ditulis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, jika mereka memiliki panjang yang sama. Ada juga sinar $\overrightarrow{AB}$ dan sebuah garis $\overleftrightarrow{AB}$ didefinisikan dengan cara yang diharapkan lihat Gambar 6.1.1.

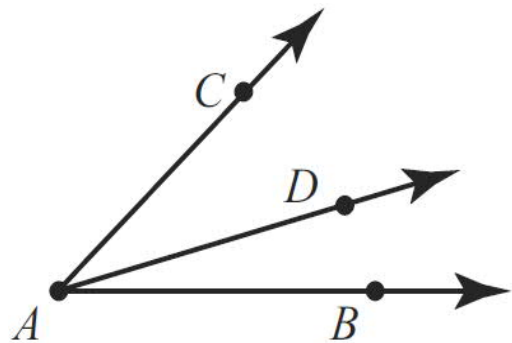


Gambar 6.1.1: Obyek Dasar Geometri

Untuk setiap triple titik A, B , dan C dengan $A \neq B$ dan $A \neq C$ ada sudut, dilambangkan $\angle BAC$, yang didefinisikan oleh $\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Ukuran sudut adalah suatu bilangan $\mu(\angle BAC)$. Kami akan selalu mengukur sudut dalam derajat dan menganggap bahwa $\mu(\angle BAC) \leq 180^\circ$. Ukurannya adalah 0° jika kedua sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ sama; ukurannya 180° jika sinarnya berseberangan; selain itu diantara 0° dan 180° . Suatu sudut adalah lancip jika ukurannya kurang dari 90° , siku-siku jika ukurannya sama dengan 90° , dan itu tumpul jika ukurannya lebih besar dari 90° . Dua sudut kongruen jika memiliki ukuran yang sama.

6.1.2 Penambahan sudut

Misalkan A, B , dan C adalah tiga titik tak-kolinier. Titik P ada di bagian dalam (interior) $\angle BAC$ jika P berada di sisi yang sama $\overrightarrow{AB}$ sebagai C dan di sisi yang sama $\overrightarrow{AC}$ sebagai B . Bagian dalam $\angle BAC$ terdefinisi asalkan $0^\circ < \mu(\angle BAC) < 180^\circ$. Adalah masuk akal untuk mendefinisikan interior $\angle BAC$ menjadi himpunan kosong dalam kasus $\mu(\angle BAC) = 0^\circ$, tetapi tidak ada cara yang baik untuk mendefinisikan interior sudut ukuran 180° .



Sinar $\overrightarrow{AD}$ berada di antara sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ jika D ada di bagian dalam $\angle BAC$.

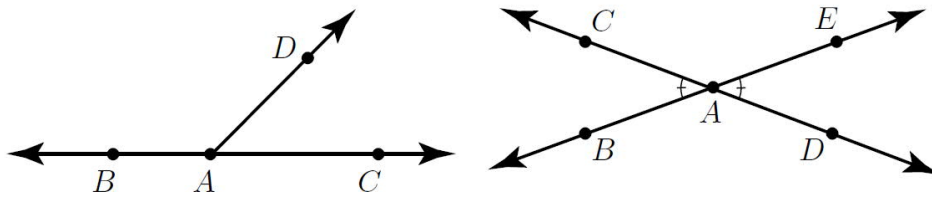
Postulat Penambahan Sudut. Misalkan A, B , dan C adalah tiga titik tak-kolinear. Sinar $\overrightarrow{AD}$ ada di antara sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ jika dan hanya jika $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC)$. ■

Ada teorema analog untuk sudut ukuran 180° . Sudut $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ membentuk suatu pasangan linier jika A, B , dan C adalah kolinear dan A adalah antara B dan C .

Teorema Pasangan Linear. Jika sudut $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ membentuk pasangan linier, maka $\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180^\circ$. ■

Dua sudut yang jumlahnya 180° disebut sudut pelengkap atau suplemen. Teorema pasangan linier menyatakan bahwa jika dua sudut membentuk pasangan linier, maka keduanya adalah pelengkap. Perlu diperhatikan bahwa istilah sudut pelengkap atau suplemen ini sama artinya dengan dua sudut berpelurus yang telah kita bahas sebelumnya.

Sudut $\angle BAC$ dan $\angle DAE$ membentuk pasangan vertikal (atau sudut vertical/sudut bertolak belakang) jika sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AE}$ berlawanan dan sinar $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{AD}$ berlawanan atau jika sinar $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AD}$ berlawanan dan sinar $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{AE}$ berlawanan (lihat Gambar 6.1.2).



Gambar 6.1.2: Pasangan Linear dan Pasangan Vertikal

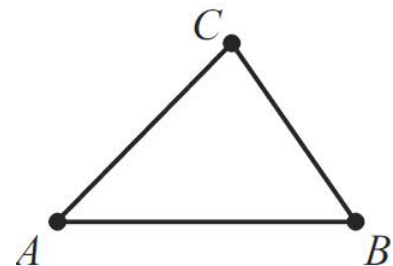
Teorema Sudut Vertikal (bertolak belakang). Sudut-sudut vertikal/bertolak belakang adalah kongruen. ■

Postulat penambahan sudut dan teorema pasangan linier tidak ditemukan dalam *Elemen* karena Euclid tidak menggunakan ukuran sudut; alih-alih, ia hanya menyebut dua sudut "sama" jika, dalam terminologi kami, keduanya kongruen. Teorema sudut vertikal adalah Proposisi Euclid I.15. Teorema sudut vertikal adalah akibat wajar dari teorema pasangan linier; misalnya, $\angle BAC \cong \angle DAE$ di bagian kanan Gambar 6.1.2 karena keduanya adalah suplemen $\angle CAE$ (keduanya berpelurus dengan $\angle CAE$).

6.1.3 Kondisi kongruensi segitiga

Segitiga dengan tiga titik A, B , dan C terdiri dari tiga segmen yang ditentukan oleh tiga titik tersebut yaitu, $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.

Segmen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$ disebut sisi segitiga $\triangle ABC$. Dua segitiga kongruen jika ada korespondensi antara titik dari segitiga pertama dan titik dari segitiga kedua sedemikian rupa sehingga sudut yang sesuai kongruen dan sisi yang sesuai kongruen.



Notasi. Dapat dipahami bahwa notasi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ berarti bahwa kedua segitiga adalah kongruen di bawah korespondensi $A \leftrightarrow D$; $B \leftrightarrow E$, dan $C \leftrightarrow F$. Penegasan bahwa dua segitiga kongruen sebenarnya adalah pernyataan bahwa ada enam kongruensi, kongruensi tiga sudut dan kongruensi tiga segmen. Secara khusus, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ berarti $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ACB \cong \angle DFE$, dan $\angle CBA \cong \angle FED$.

Jika tiga bagian dari satu segitiga kongruen dengan bagian-bagian yang sesuai dari segitiga lain, biasanya mungkin untuk menyimpulkan bahwa tiga bagian segitiga lainnya juga kongruen. Itulah isi dari kondisi kongruensi segitiga.

Teorema Sisi-Sudut-Sisi (SisiSudutSisi). Jika $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ adalah segitiga sedemikian rupa sehingga $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, dan $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ■

Euclid menggunakan "metode superposisi" untuk membuktikan SisiSudutSudut (Proposisi I.4), tetapi biasanya dianggap sebagai postulat dalam perawatan geometri modern.

Dua hasil berikutnya (**SudutSisiSudut** dan **SudutSudutSisi**) keduanya terkandung dalam *Euclid's Proposition* I.26 dan yang ketiga (**SisiSisiSisi**) adalah *Euclid's Proposition* I.8.

Teorema Sudut-Sisi-Sudut (**SudutSisiSudut**). Jika $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ adalah segitiga sedemikian rupa sehingga $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, dan $\angle ABC \cong \angle DEF$, maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ■

BAB VII: Kalkulus

Dalam bab ini dibahas kalkulus dengan menggunakan fasilitas yang tersedia pada Geogebra Klasik 6.0.649.0.

Sebagian materi tentang pengertian kalkulus yang kita bahas ini, materi lengkapnya pembaca bisa melihat di [9]. Apa itu kalkulus? Salah satu cara untuk menjawab pertanyaan ini adalah dengan membuat daftar topik yang dipelajari dalam kalkulus: kemiringan garis singgung, kecepatan dan laju perubahan lainnya, luas, volume, dan sebagainya. Tetapi jawaban ini tidak menjelaskan kesamaan topik ini, dan apa yang membedakannya dari topik yang dipelajari di cabang matematika lain seperti aljabar.

Sebenarnya, ada kesamaan dari semua topik ini, dan itu membuat kalkulus berbeda dari aljabar. Semua topik yang dipelajari dalam kalkulus melibatkan komputasi sesuatu yang, tampaknya pada awalnya, hanya dapat dihitung secara kira-kira dan tidak tepat. Untuk setiap topik yang kita pelajari, kita akan mulai dengan metode yang dapat digunakan untuk menemukan jawaban perkiraan untuk masalah yang kita coba pecahkan. Juga, ada bahan kedua yang akan menjadi bagian dari setiap topik kalkulus: diberikan jawaban perkiraan untuk masalah, akan ada cara untuk membuat jawabannya lebih akurat, meskipun masih belum sepenuhnya benar.

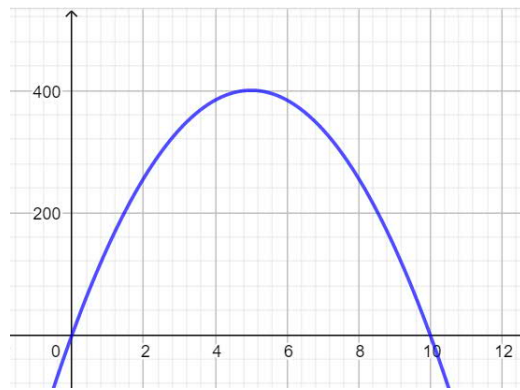
Jadi, dalam kalkulus kita mempelajari masalah yang dapat kita temukan jawaban perkiraan yang lebih baik dan lebih baik, tetapi kita tidak memiliki cara langsung untuk menemukan jawaban yang tepat. Tampaknya pada awalnya hanya ini yang dapat kita capai: bahwa kita harus puas dengan perkiraan jawaban yang cukup baik untuk semua tujuan praktis, dan kita tidak akan pernah tahu jawaban pasti untuk masalah kita. Tapi nyatanya kita bisa lebih baik. Ide sentral dalam kalkulus adalah metode yang sangat cerdas untuk menemukan jawaban yang tepat dalam situasi ini di mana tampaknya tidak mungkin untuk melakukannya. Idennya adalah untuk **menghitung jawaban yang tepat dengan menemukan bilangan tunggal yang perkiraannya semakin dekat dan semakin dekat karena semakin akurat.**

Ada banyak fitur paradoks kalkulus, dan kami akan menyebutkan beberapa fitur lainnya saat kami membahasnya, tetapi ini adalah paradoks pertama dan paling sentral: kalkulus adalah subjek di mana kami menemukan jawaban yang tepat melalui pendekatan. Kita akan menyebutnya **paradoks presisi melalui pendekatan.**

Untuk menjelaskan bagaimana mungkin untuk mencapai presisi melalui pendekatan, mari kita perhatikan sebuah contoh. Misalkan kita melempar bola lurus ke atas dengan kecepatan awal 160 kaki per detik. Fisikawan telah menentukan bahwa ketinggian bola setelah t detik akan menjadi $160t - 16t^2$ kaki, untuk $0 \leq t \leq 10$. Tentu saja, ini adalah contoh fungsi. Jika kita memisalkan $h(t)$ menyatakan ketinggian bola, dalam kaki, setelah t detik, maka h adalah fungsi dengan domain $[0, 10]$, dan untuk $0 \leq t \leq 10$ kita miliki

$$h(t) = 160t - 16t^2$$

Jika kita menganggap bola bergerak sepanjang garis bilangan vertikal, dengan titik asal di permukaan tanah dan satuan ditandai secara vertikal dalam kaki, maka kita juga dapat menganggap $h(t)$ sebagai posisi bola pada garis bilangan ini di waktu t . Grafik h ditunjukkan pada Gambar 7.1. (Perhatikan bahwa ini adalah grafik h , bukan gambar lintasan bola; bola dilempar lurus ke atas, sehingga hanya naik dan turun di sepanjang garis bilangan vertikal kita, tanpa bergerak secara horizontal sama sekali.)



Gambar 7.1: Grafik $y = h(t)$.

Sejumlah sifat dari fungsi ini dapat dilihat langsung pada grafik. Sebagai contoh, kita dapat melihat bahwa $h(0) = 0$, $h(5) = 400$, dan $h(10) = 0$. Saat t meningkat dari 0 ke 5 ke 10, nilai $h(t)$ meningkat dari 0 ke 400 dan menurun kembali ke 0. Dalam hal perilaku bola, ini berarti bahwa bola dimulai dari permukaan tanah, naik ke ketinggian 400 kaki setelah 5 detik, dan kemudian turun kembali, mengenai tanah setelah 10 detik.

Pemeriksaan lebih dekat dari grafik mengungkapkan lebih banyak detail gerakan bola. Bagian pertama dari grafik katakanlah, untuk $0 \leq t \leq 2$ miring ke atas dengan curam. Ini memberitahu kita bahwa ketika t meningkat dalam interval $[0, 2]$, $h(t)$ meningkat dengan cepat, yang berarti bahwa bola naik dengan cepat. Dalam interval waktu $[3, 5]$, grafik masih miring ke atas, tetapi lebih lembut. Jadi, selama interval ini, $h(t)$ meningkat lebih lambat, dan karena itu bola naik lebih lambat. Demikian pula, untuk t dalam interval $[5, 7]$ bola jatuh perlahan, dan untuk t dalam interval $[8, 10]$ jatuh lebih cepat.

Bisakah kita mengukur pernyataan ini? Mari kita definisikan perpindahan bola selama selang waktu $[a, b]$ menjadi $h(b) - h(a)$. Perpindahan memberitahu kita berapa banyak posisi bola telah berubah selama interval waktu ini, dengan nilai positif menunjukkan bahwa itu lebih tinggi pada akhir interval waktu daripada di awal, dan nilai negatif menunjukkan bahwa itu lebih rendah. Kecepatan rata-rata bola selama selang waktu ini adalah perpindahan dibagi $b - a$, panjang selang waktu, dan ini memberitahu kita seberapa jauh bola telah bergerak per satuan waktu yang telah berlalu. Karena kita mengukur jarak dalam kaki dan waktu dalam detik dalam contoh ini, kecepatan rata-rata akan diukur dalam kaki per detik, disingkat ft/s.

Misalnya, kecepatan rata-rata bola selama selang waktu $[0, 2]$ adalah

$$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{256 - 0}{2} = 128 \text{ ft/s.}$$

Tetapi selama interval $[3, 5]$ kecepatan rata-rata hanya

$$\frac{h(5) - h(3)}{5 - 3} = \frac{400 - 336}{2} = 32 \text{ ft/s.}$$

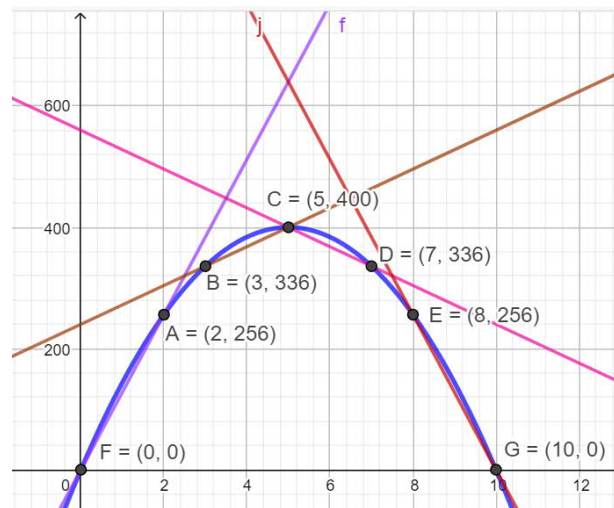
Ini menegaskan pengamatan informal kita bahwa bola naik lebih cepat selama interval waktu $[0, 2]$ daripada selama interval $[3, 5]$. Perhatikan bahwa kecepatan rata-rata ini juga dapat diartikan sebagai kemiringan dua garis. Yang pertama adalah kemiringan garis yang melalui titik $(0, h(0)) = (0, 0)$ dan $(2, h(2)) = (2, 256)$, dan yang kedua adalah kemiringan garis yang melalui $(3, h(3)) = (3, 336)$ dan $(5, h(5)) = (5, 400)$. Semua titik ini berada pada grafik h . Dengan demikian, setiap garis ditentukan oleh dua titik pada grafik h , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7.2; garis seperti itu

disebut garis potong untuk kurva $y = h(t)$. Tentu saja, garis potong untuk interval $[0, 2]$ miring ke atas lebih curam daripada garis potong untuk interval $[3, 5]$, sehingga kemiringannya lebih besar.

Kecepatan rata-rata selama interval $[5, 7]$ dan $[8, 10]$ adalah

$$\frac{h(7) - h(5)}{7 - 5} = \frac{336 - 400}{2} = -32 \text{ ft/s} \quad \text{dan} \quad \frac{h(10) - h(8)}{10 - 8} = \frac{0 - 256}{2} = -128 \text{ ft/s}$$

Nilai negatif di sini berarti bahwa ketinggian bola berkurang, dan jatuh lebih cepat selama interval waktu $[8, 10]$ daripada selama interval $[5, 7]$. Sekali lagi kecepatan rata-rata ini dapat diinterpretasikan sebagai kemiringan garis potong, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 7.2.



Gambar 7.2 : Kecepatan rata-rata diinterpretasikan sebagai kemiringan garis potong.

Tetapi pada Gambar 7.1 tampak bahwa bola melambat selama interval waktu ini, sehingga kecepatannya mungkin lebih dari 32 ft/s pada awal interval waktu dan kurang dari 32 ft/s pada akhir. Memang, jika kita membagi interval menjadi dua dan menghitung kecepatan rata-rata di bagian pertama dan kedua dari interval, kita menemukan bahwa kecepatan rata-rata selama interval waktu $[3, 4]$ adalah

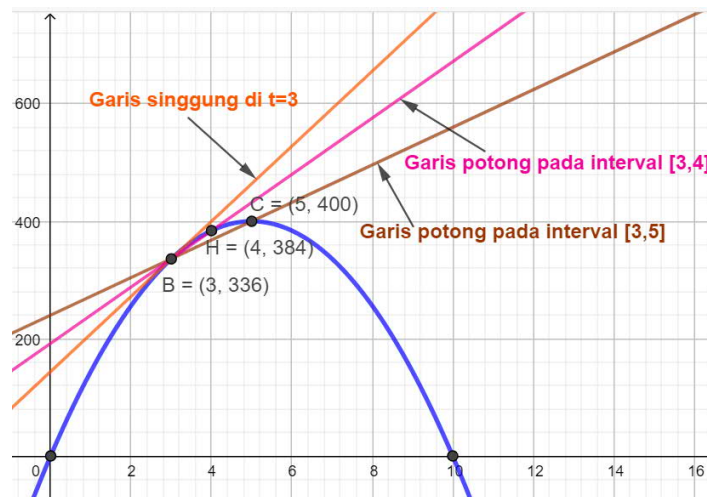
$$\frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{384 - 336}{1} = 48 \text{ ft/s}$$

sedangkan kecepatan rata-rata selama selang $[4, 5]$ adalah

$$\frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{400 - 384}{1} = 16 \text{ ft/s}$$

Jadi, 48 ft/s mungkin merupakan perkiraan yang lebih baik untuk kecepatan sesaat bola pada $t = 3$. Namun, ini masih hanya perkiraan, karena kecepatan bola berubah selama interval waktu $[3, 4]$ juga.

Gambar 7.3 menunjukkan garis potong yang kemiringannya memberikan kecepatan rata-rata bola selama interval $[3, 5]$ dan $[3, 4]$. Kita melihat pada gambar bahwa sebagai titik akhir yang tepat dari interval waktu berkurang dari 5 menjadi 4, garis potong berputar berlawanan arah jarum jam dan kemiringannya meningkat. Tampaknya jika kita terus mengurangi titik akhir kanan, garis potong akan terus berputar, semakin dekat dengan garis yang hanya menyentuh grafik h di titik $(3, h(3))$. Garis ini dikatakan bersinggungan dengan grafik pada $t = 3$.



Gambar 7.3: Garis potong yang kemiringannya memberikan kecepatan rata-rata bola selama interval $[3, 5]$ dan $[3, 4]$. Saat titik ujung kanan interval berkurang, garis potong berputar berlawanan arah jarum jam dan mendekati garis singgung pada $t = 3$, yang ditunjukkan dengan warna merah.

Mungkin untuk mendapatkan pendekatan yang benar-benar baik untuk kecepatan bola pada $t = 3$ kita harus menghitung kecepatan rata-rata selama interval waktu yang sangat singkat sehingga kecepatan tidak memiliki waktu untuk berubah banyak. Tabel 7.1 menunjukkan kecepatan rata-rata selama interval $[3, 3.1]$, $[3, 3.01]$, dan $[3, 3.001]$.

Interval	KecepatanRata – rata
$[3, 3.1]$	62.4
$[3, 3.01]$	63.84
$[3, 3.001]$	63.984
$[2.9, 3]$	65.6
$[2.99, 3]$	64.16
$[2.999, 3]$	64.016

Tabel 7.1 : Kecepatan rata-rata bola selama beberapa interval waktu yang singkat.

Kita juga dapat mempertimbangkan interval waktu yang datang sebelum $t = 3$, sehingga tabel menunjukkan kecepatan rata-rata selama interval $[2.9, 3]$, $[2.99, 3]$, dan $[2.999, 3]$. Jika kita menambahkan garis potong yang sesuai dengan kecepatan rata-rata ini ke Gambar 7.3, garis tersebut hampir tidak dapat dibedakan dari garis singgung.

Tampak dari tabel bahwa kecepatan sesaat pada $t = 3$ mendekati 64 ft/s, dan tampaknya masuk akal untuk mengatakan bahwa ini juga merupakan kemiringan garis yang bersinggungan dengan grafik h di titik $(3, h(3))$. Namun, data dalam tabel konsisten dengan jawaban lain, seperti 63,99 ft/sec atau 64,01 ft/sec. Untuk banyak tujuan, perkiraan jawaban ini mungkin cukup baik. Tapi ingat bahwa ide sentral dari kalkulus adalah untuk mencapai presisi melalui pendekatan. Pertanyaan yang ingin kita tanyakan adalah, dapatkah kita menentukan kecepatan yang tepat pada $t = 3$, meskipun semua perhitungan kita hanya memberikan jawaban perkiraan?

Kita dapat menghitung perkiraan yang lebih baik lagi dengan menggunakan interval waktu yang lebih pendek, tetapi itu tidak akan menyelesaikan masalah kita. Jika kita ingin menemukan jawaban yang tepat, kita perlu melihat apakah ada pola bagaimana aproksimasi berubah saat mereka meningkat. Sebagai langkah ke arah ini, mari kita cari rumus umum untuk kecepatan rata-rata bola selama selang

waktu antara $t = 3$ dan $t = 3 + x$, untuk sembarang bilangan $x \neq 0$. Untuk $x > 0$ ini akan menjadi interval $[3, 3 + x]$, dan kecepatan rata-ratanya adalah

$$\frac{h(3 + x) - h(3)}{3 + x - 3} = \frac{h(3 + x) - h(3)}{x}$$

Untuk $x < 0$ kita memiliki $3 + x < 3$, jadi interval waktunya adalah $[3 + x, 3]$, dengan kecepatan rata-rata

$$\frac{h(3) - h(3 + x)}{3 - (3 + x)} = \frac{h(3) - h(3 + x)}{-x} = \frac{h(3 + x) - h(3)}{x}.$$

Jadi, untuk $x > 0$ dan $x < 0$ kecepatan rata-rata diberikan oleh fungsi

$$f(x) = \frac{h(3 + x) - h(3)}{x}.$$

Apa domain dari fungsi f ? Agar suku $h(3 + x)$ yang muncul dalam rumus $f(x)$ masuk akal, $3 + x$ harus berada dalam domain h , yang merupakan interval $[0, 10]$. Jadi, kita harus memiliki $0 \leq 3 + x \leq 10$, atau ekuivalen $-3 \leq x \leq 7$. Tetapi rumus untuk $f(x)$ juga tidak terdefinisi ketika $x = 0$, karena penyebutnya adalah 0. Oleh karena itu domain dari f adalah $[-3, 0) \cup (0, 7]$.

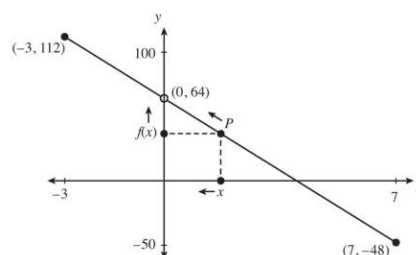
Kita telah menghitung beberapa nilai $f(x)$. Misalnya, tiga baris pertama dari Tabel 7.1 menunjukkan bahwa $f(0,1) = 62,4$, $f(0,01) = 63,84$, dan $f(0,001) = 63,984$. Dengan menghitung $f(x)$ untuk nilai x yang semakin dekat dan mendekati 0, kita seharusnya dapat memperoleh aproksimasi yang lebih baik dan lebih baik terhadap kecepatan bola pada waktu $t = 3$. Tampaknya jika saja kita dapat menemukan nilai $f(x)$ pada $x = 0$ kita akan mendapatkan jawaban yang tepat. Tetapi 0 adalah satu-satunya nilai x dalam interval $[-3, 7]$ yang tidak dapat kita gunakan, karena tidak berada dalam domain f .

Mungkin kita bisa belajar sesuatu dengan memeriksa grafik f . Untuk mencari grafiknya, pertama kita sederhanakan rumus untuk $f(x)$. Kita telah menghitung bahwa $h(3) = 336$, dan kita memiliki

$$\begin{aligned} h(3 + x) &= 160(3 + x) - 16(3 + x)^2 \\ &= 480 + 160x - 16(9 + 6x + x^2) \\ &= 336 + 64x - 16x^2. \end{aligned}$$

Jadi untuk semua $x \in [-3, 0) \cup (0, 7]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h(3 + x) - h(3)}{x} \\ &= \frac{336 + 64x - 16x^2 - 336}{x} \\ &= \frac{64x - 16x^2}{x} = 64 - 16x. \end{aligned}$$



Gambar 7.4: Grafik fungsi f . Saat x mendekati 0, $f(x)$ mendekati 64.

Oleh karena itu, grafik $y = f(x)$ sama dengan grafik $y = 64 - 16x$, kecuali bahwa kita harus memasukkan hanya titik-titik yang koordinat- x nya berada pada himpunan $[-3, 0) \cup (0, 7]$, karena ini adalah domain dari f . Grafik $y = 64 - 16x$ adalah garis lurus dengan kemiringan 16 dan perpotongan $y = 64$, jadi grafik f adalah ruas garis yang dihilangkan satu titiknya, seperti terlihat pada Gambar 7.4. Garis $y = 64 - 16x$ melalui titik $(0, 64)$, tetapi titik ini hilang dari grafik f , seperti ditunjukkan oleh lingkaran terbuka pada Gambar 7.4, karena 0 tidak berada dalam domain f .

Kita dapat menganggap bilangan x yang semakin mendekati 0 sebagai titik pada sumbu- x yang bergerak menuju titik asal. Tepat di atas titik ini adalah titik P pada grafik f . Koordinat P adalah $(x, f(x))$, sehingga garis horizontal melalui P memotong sumbu y di bilangan $f(x)$. Semakin dekat x ke 0, titik P bergerak sepanjang grafik f menuju titik $(0, 64)$, dan oleh karena itu $f(x)$ semakin dekat dan mendekati 64, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7.4. Gambar menunjukkan x mendekati 0 dari kanan, tetapi situasinya akan sama jika x mendekati 0 dari kiri. Jadi, saat x semakin dekat dan mendekati 0 dari kedua sisi, $f(x)$ semakin dekat dan semakin dekat ke 64. Kita juga dapat melihat ini dari rumus $f(x) = 64 - 16x$: saat x semakin dekat dan mendekati 0, suku $16x$ semakin mendekati 0, dan nilai $64 - 16x$ mendekati 64. Kita katakan bahwa 64 adalah limit dari $f(x)$ saat x mendekati 0, dan kita tulis $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 64$. Kita akan memberikan penjelasan yang lebih cermat tentang pernyataan ini nanti di bab ini, tetapi untuk saat ini kita hanya mengandalkan intuisi.

Ingatlah bahwa strategi kita untuk menemukan kecepatan bola yang tepat pada waktu $t = 3$ adalah dengan menentukan nilai aproksimasi yang semakin dekat dan semakin dekat karena semakin akurat. Kita sekarang telah melakukan strategi ini: kita dapat membuat perkiraan lebih dan lebih akurat dengan mengambil x lebih dekat dan lebih dekat ke 0, dan ketika kita melakukan ini kita memperoleh pendekatan 64 ft/sec. Jadi, kecepatan pasti bola pada $t = 3$ adalah 64 ft/s. Kita juga dapat mengatakan bahwa kemiringan garis singgung kurva $y = h(t)$ di titik $(3, h(3))$ adalah 64.

Pada akhirnya, masalah menemukan kecepatan sesaat bola berubah menjadi masalah menentukan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Untuk sisa bab ini kita mengesampingkan masalah seperti masalah kecepatan bola dan membahas masalah menentukan limit dari suatu fungsi. Setelah kita mempelajari bagaimana menentukan limit, kita akan siap untuk mengembangkan pendekatan sistematis untuk memecahkan masalah yang melibatkan kecepatan, garis singgung, dan konsep terkait lainnya. Dalam semua masalah ini, penggunaan limit akan memungkinkan kita untuk mencapai presisi melalui aproksimasi.

7.1 Limit

Sangatlah sulit untuk mengetahui dengan tepat apa arti kata "limit". Di bagian terakhir kita menyarankan bahwa " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$." berarti bahwa saat x semakin dekat ke a , $f(x)$ semakin dekat dan dekat dengan L . Meskipun deskripsi ini mungkin memberi kita perasaan intuitif untuk apa yang kita maksud dengan kata "limit", ternyata tidak membantu dalam mengembangkan jenis pemahaman yang tepat tentang konsep limit yang diperlukan untuk memecahkan masalah limit yang sulit.

Untuk mulai mengembangkan pemahaman yang lebih baik tentang batas, mari pertimbangkan contoh lain. Misalkan

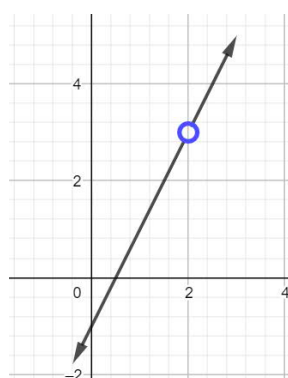
$$g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}. \quad (7.1)$$

Tentu saja, domain dari g adalah $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Kita tidak dapat menghitung $g(2)$, karena 2 tidak berada dalam domain dari g , tetapi kita dapat menyelidiki $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Memfaktorkan pembilang $g(x)$, kita menemukan bahwa untuk semua $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$,

$$g(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \frac{(2x - 1)(x - 2)}{x - 2} = 2x - 1. \quad (7.2)$$

Oleh karena itu, grafik g sama dengan grafik persamaan $y = 2x - 1$, kecuali bahwa kita harus menghilangkan titik dengan koordinat $x = 2$. Dengan kata lain, grafik g adalah garis dengan kemiringan 2 dan memotong sumbu- y di -1 , tetapi dengan titik $(2, 3)$ dihilangkan. Grafik g ditunjukkan pada Gambar 7.1.1.



Gambar 7.1.1: Grafik dari g

Tampak jelas dari Gambar 7.1.1 bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$. Tetapi sekarang kita ingin mengembangkan pemahaman yang lebih tepat tentang apa artinya ini. Kita mulai dengan gagasan bahwa ketika x mendekati 2, $g(x)$ seharusnya mendekati 3. Tentu saja, kita tidak dapat benar-benar membiarkan $x = 2$, karena $g(2)$ tidak terdefinisi, jadi pernyataan yang lebih hati-hati adalah bahwa ketika x dekat dengan 2, tetapi tidak sama dengan 2, $g(x)$ harus dekat dengan 3. Mengatakan bahwa dua bilangan dekat sama dengan mengatakan bahwa jarak antara keduanya kecil, dan kita tahu bahwa jarak antara dua bilangan a dan b adalah $|a - b|$. Jadi cara lain untuk mengekspresikan ide yang kita minati adalah kapan pun $|x - 2|$ kecil, tapi bukan 0, $|g(x) - 3|$ harus kecil. Dengan kata lain, pernyataan dalam bentuk berikut harus benar:

$$\text{Untuk setiap bilangan } x, \text{ jika } 0 < |x - 2| < \dots, \text{ maka } |g(x) - 3| < \dots \quad (7.3)$$

Tetap menentukan bilangan apa yang harus dimasukkan ke dalam tempat kosong. Tentu saja, bilangan-bilangan ini akan mengukur seberapa dekat x dengan 2, dan seberapa dekat $g(x)$ dengan 3.

Sebagai langkah pertama dalam memahami pernyataan (7.3), mari kita coba memasukkan bilangan-bilangan tertentu di tempat yang kosong. Sedikit eksperimen dengan bilangan yang berbeda mengarah pada fakta berikut:

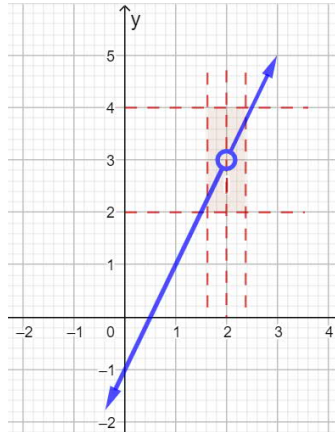
Proposisi 7.1.1. Untuk fungsi g yang didefinisikan dalam persamaan (7.1), pernyataan berikut ini benar:

$$\text{Untuk setiap bilangan } x, \text{ jika } 0 < |x - 2| < \frac{1}{2}, \text{ maka } |g(x) - 3| < 1.$$

Bukti. Misalkan $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$. Karena $|x - 2| > 0$, $x \neq 2$, jadi $g(x)$ terdefinisi, dan dengan persamaan (7.2), $g(x) = 2x - 1$. Karena itu

$$|g(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = 2|x - 2| < \frac{2}{2} = 1. \quad \blacksquare$$

Gambar 7.1.2 mengilustrasikan Proposisi 7.1.1. Nilai x yang memenuhi $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$ adalah yang berada dalam $\frac{1}{2}$ dari 2, kecuali 2 itu sendiri. Dengan kata lain, mereka adalah nilai yang terletak di antara garis putus-putus vertikal pada Gambar 7.2.1. Melihat bagian grafik g antara garis putus-putus vertikal ini, yang ditunjukkan dengan warna biru pada gambar, kita melihat bahwa untuk semua nilai x ini, $g(x)$ adalah antara 2 dan 4, yang berarti bahwa $|g(x) - 3| < 1$.



Gambar 7.1.2 : Untuk setiap bilangan x , jika $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$, maka $|g(x) - 3| < 1$.

Proposisi 7.1.1 menunjukkan bahwa ketika x cukup dekat dengan 2, $g(x)$ cukup dekat dengan 3 khususnya, $g(x)$ berada dalam 1 dari 3. Tapi harapan kita adalah untuk mencapai presisi melalui pendekatan, jadi kita perlu melakukan lebih baik dari ini. Setidaknya sebagai langkah ke arah yang benar, dapatkah kita menunjukkan bahwa $g(x)$ akan mendekati 3 katakanlah, dalam $\frac{1}{10}$ dari 3? Jawabannya adalah ya, tetapi untuk mewujudkannya kita membutuhkan x lebih dekat ke 2. Mungkin kita bisa menebak harus seberapa dekat x dengan 2. Meniru bukti Proposisi 7.1.1, kita harus bisa menetapkan fakta berikut:

$$\text{Untuk setiap bilangan } x, \text{ jika } 0 < |x - 2| < \frac{1}{20}, \text{ maka } |g(x) - 3| < \frac{1}{10}. \quad (7.4)$$

Ada sebuah pola di sini, dan daripada mengerjakan contoh yang lebih khusus, mari kita nyatakan pola umumnya. Biasanya menggunakan huruf Yunani (*epsilon*) untuk mengukur seberapa dekat $g(x)$ dengan 3. Dengan menggunakan notasi ini, kita dapat menyatakan pola umum seperti ini:

Proposisi 7.1.2. Untuk fungsi g yang didefinisikan dalam persamaan (7.1). Maka untuk setiap bilangan positif ϵ pernyataan berikut ini benar:

$$\text{Untuk setiap bilangan } x, \text{ jika } 0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ maka } |g(x) - 3| < \epsilon. \quad (7.5)$$

Bukti. Misalkan $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$. Karena $|x - 2| > 0, x \neq 2$, jadi $g(x)$ terdefinisikan, dan dengan persamaan (7.2), $g(x) = 2x - 1$. Karena itu

$$|g(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = 2|x - 2| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Atur $\epsilon = 1$ di Proposition 7.1.2 kita dapatkan Proposition 7.1.1, dan menentukan $\epsilon = \frac{1}{10}$ kita dapatkan pernyataan (7.4). Proposisi 7.1.1 mencapai tingkat akurasi yang cukup rendah tentang nilai $g(x)$ ketika x mendekati 2; pernyataan (7.4) mencapai tingkat akurasi yang agak lebih tinggi. Tapi

Proposisi 7.1.2 mencapai presisi lengkap dengan memungkinkan untuk semua kemungkinan bilangan positif ϵ . Proposisi 7.1.2 memberi tahu kita bahwa $g(x)$ akan mendapatkan dalam 0,001 dari 3, atau dalam 0,0001, atau dalam jarak positif apa pun yang mungkin kita pilih, jika saja kita memastikan bahwa x cukup dekat dengan 2. (Perhatikan bahwa hanya bilangan positif masuk akal untuk ϵ . Tidak masuk akal untuk berbicara tentang $g(x)$ berada di dalam, katakanlah, 0,01 dari 3!) Oleh karena itu, kita telah mencapai tujuan presisi kita melalui aproksimasi.

Kita akan mengungkapkan fakta yang ditetapkan dalam Proposisi 7.1.2 dengan mengatakan bahwa ketika x mendekati 2, tanpa sama dengan 2, $g(x)$ mendekati 3. Dan akan lebih mudah untuk memiliki notasi singkat untuk ini, jadi kita menulis: sebagai $x \rightarrow 2^\neq$, $g(x) \rightarrow 3$. Kita harus memperingatkan bahwa, meskipun banyak buku kalkulus menggunakan notasi panah yang serupa, penggunaan superskrip “ $\neq$ ” tidak umum. Namun, kita lebih suka memasukkannya dalam notasi ini untuk mengingatkan kita bahwa meskipun x mendekati 2, itu tidak pernah sama dengan 2.

Di masa mendatang, kita akan meninggalkan frasa “untuk setiap bilangan x ” dalam pernyataan (7.3), membiarkannya dipahami bahwa kita membuat pernyataan umum tentang semua nilai x . Dan akan lebih mudah untuk memiliki nama untuk bilangan yang ada di kedua bagian yang kosong dalam pernyataan ini. Kita telah memperkenalkan penggunaan huruf untuk bilangan yang ada di kolom kedua. Ada juga huruf biasa yang digunakan pada rempat kosong pertama: huruf Yunani δ (delta). Dengan menggunakan konvensi ini, kita dapat menyatakan kembali kesimpulan dari Proposisi 7.2.2 sebagai berikut. Untuk setiap $\epsilon > 0$, jika kita memilih $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, maka pernyataan berikut ini benar:

$$\text{Jika } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ maka } |g(x) - 3| < \epsilon.$$

Perhatikan bahwa persamaan $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ menyiratkan bahwa untuk nilai ϵ yang berbeda, kita akan memiliki nilai δ yang berbeda. Untuk setiap nilai ϵ ada nilai δ yang sesuai. Ini berarti nilai δ secara umum bergantung pada nilai ϵ .

Banyak dari apa yang telah kita katakan tentang contoh ini juga akan berlaku untuk kasus lain. Secara umum, ketika kita menyelidiki suatu limit bentuk $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, kita akan mencari suatu bilangan L sedemikian sehingga jika x dekat dengan a , tetapi tidak sama dengan a , maka $f(x)$ dekat dengan L . Dengan demikian, kita akan tertarik pada pernyataan “jika $0 < |x - a| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \epsilon$.” Untuk mencapai presisi lengkap, kita ingin pernyataan ini benar untuk setiap bilangan positif, selama kita membuat pilihan yang sesuai untuk δ . Tapi pilihan $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ yang bekerja untuk contoh kita g mungkin bukan pilihan yang tepat dalam kasus lain. Oleh karena itu kita dituntun untuk membuat definisi berikut.

Definisi 7.1.3. Untuk sembarang fungsi f dan bilangan a dan L , kita tulis “sebagai $x \rightarrow a^\neq$, $f(x) \rightarrow L$ ” yang berarti bahwa untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, ada beberapa bilangan yang bersesuaian $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |x - a| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$. ■

Untuk membuatnya lebih informal, pernyataan “sebagai $x \rightarrow a^\neq$, $f(x) \rightarrow L$ ” berarti bahwa kita bisa mendapatkan $f(x)$ sedekat yang kita inginkan dengan L dengan membuat x cukup sangat dekat dengan a (tetapi tidak sama dengan a).

Mungkin kita sudah menebak sekarang bahwa kita akan mendefinisikan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ menjadi bilangan L sehingga $x \rightarrow a^\neq$, $f(x) \rightarrow L$. Tetapi ada masalah potensial dengan definisi ini. Mungkinkah ada lebih dari satu bilangan L sehingga $x \rightarrow a^\neq$, $f(x) \rightarrow L$? Jika demikian, notasi $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ akan menjadi ambigu. Untungnya, ini tidak pernah terjadi:

Teorema 7.1.4. Tidak akan ada lebih dari satu bilangan L sehingga $x \rightarrow a^\neq, f(x) \rightarrow L$. ■

Kita mungkin menganggap Teorema 7.1.4 sebagai konfirmasi bahwa pernyataan “sebagai $x \rightarrow a^\neq, f(x) \rightarrow L$ ” menekankan nilai L dengan presisi yang lengkap. Kita akan melihat di bagian berikutnya mengapa Teorema 7.1.4 benar. Untuk saat ini, kita menerimanya sehingga kita dapat membuat definisi berikut.

Definisi 7.1.5. Jika ada bilangan L sehingga $x \rightarrow a^\neq, f(x) \rightarrow L$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ didefinisikan sebagai bilangan tunggal L . Jika tidak ada bilangan L , maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tidak terdefinisi. ■

Kita telah melihat bahwa Definisi 7.1.3 dan 7.1.5 secara akurat menggambarkan contoh kita $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$. Tetapi apakah mereka setuju dengan intuisi kita tentang semua batasan? Untuk mencoba menjawab pertanyaan ini, mari kita coba definisi ini pada beberapa contoh lagi. Akan sangat mencerahkan untuk memeriksa contoh-contoh ini secara grafis, jadi kita mulai dengan mendapatkan ide yang lebih baik tentang arti grafis dari Definisi 7.1.3 dan 7.1.5. Menurut Definisi 7.1.5, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ berarti bahwa sebagai $x \rightarrow a^\neq, f(x) \rightarrow L$. Arti dari pernyataan ini diberikan oleh Definisi 7.1.3, yang dapat kita anggap sebagai menggambarkan tantangan dan respon. Tantangannya diberikan oleh bilangan positif ϵ : dapatkah kita memastikan bahwa $f(x)$ berada dalam ϵ dari L ? Dan jawabannya adalah bilangan positif δ . Respons berhasil memenuhi tantangan jika setiap kali x berada dalam δ dari a , tetapi tidak sama dengan a , $f(x)$ berada dalam ϵ dari L . Dengan kata lain, respons berhasil jika pernyataan berikut, yang akan kita sebut kriteria $\epsilon - \delta$, benar:

$$\text{Jika } 0 < |x - a| < \delta, \text{ maka } |f(x) - L| < \epsilon. \quad (\text{kriteria } \epsilon - \delta)$$

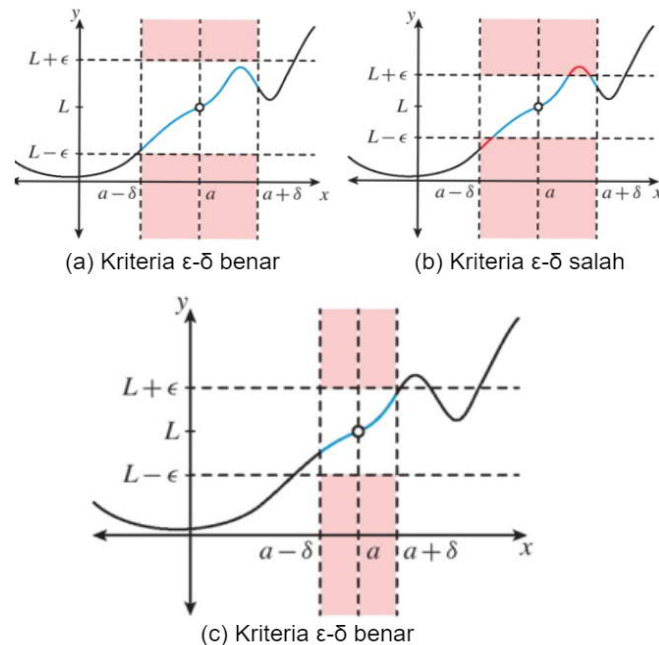
Mengatakan bahwa sebagai $x \rightarrow a^\neq, f(x) \rightarrow L$ berarti bahwa setiap tantangan dapat diselesaikan dengan sukses.

Apa arti grafis dari kriteria $\epsilon - \delta$? Dengan pengetahuan tentang nilai mutlak, pertidaksamaan $|x - a| < \delta$ mempunyai arti yang sama dengan $-\delta < x - a < \delta$, atau dengan kata lain $a - \delta < x < a + \delta$. Jadi untuk mengatakan bahwa $0 < |x - a| < \delta$ berarti x berada di antara $a - \delta$ dan $a + \delta$, tetapi $x \neq a$. Demikian pula, untuk mengatakan bahwa $|f(x) - L| < \epsilon$ artinya $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. Jadi, kriteria $\epsilon - \delta$ memberitahu kita untuk melihat bagian dari grafik f yang berada di antara $x = a - \delta$ dan $x = a + \delta$, kecuali untuk $x = a$. Untuk memenuhi kriteria, koordinat- y dari titik-titik pada bagian grafik ini harus berada di antara $L - \epsilon$ dan $L + \epsilon$.

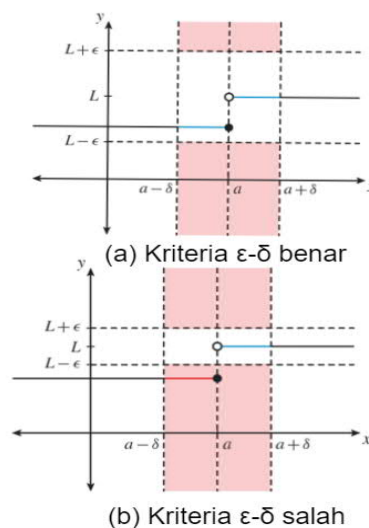
Mungkin akan membantu untuk melihat apa artinya kriteria $\epsilon - \delta$ salah. Agar kriteria $\epsilon - \delta$ gagal, harus ada bilangan x sedemikian rupa sehingga $a - \delta < x < a + \delta$ dan $x \neq a$, tetapi $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Bilangan ini akan sesuai dengan titik pada grafik f yang berada di antara garis vertikal $x = a - \delta$ dan $x = a + \delta$ atau antara garis vertikal $x = a$ dan $x = a + \delta$, tetapi tidak antara garis horizontal $y = L - \epsilon$ dan $y = L + \epsilon$. Titik ini akan berada di daerah yang diarsir merah pada Gambar 2.8. Kita menyebut daerah ini sebagai daerah terlarang. Jadi, agar kriteria $\epsilon - \delta$ gagal, grafik harus menyertakan titik di daerah terlarang. Kriteria $\epsilon - \delta$ dapat dianggap mengatakan bahwa grafik f tidak masuk ke daerah takdiperbolehkan.

Gambar 7.8 menunjukkan grafik fungsi f dan beberapa contoh nilai ϵ dan δ yang dapat digunakan untuk menguji apakah $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Pada Gambar 7.8a, grafik tidak masuk ke daerah terlarang, dan kriteria $\epsilon - \delta$ benar. Pada Gambar 7.8b, ϵ telah dikurangi, menciptakan tantangan yang lebih berat. Grafik sekarang masuk ke wilayah terlarang (di mana grafik berwarna merah), sehingga kriteria $\epsilon - \delta$ salah dan tantangan belum terpenuhi. Namun tantangan tersebut dapat dipenuhi, dengan menggunakan nilai δ yang lebih kecil. Gambar 7.8c menunjukkan tantangan yang sama dengan pilihan

δ yang cukup kecil untuk memenuhi tantangan. Sebenarnya, jika kita membayangkan ε mengecil lebih lanjut pada Gambar 7.8, kita seharusnya dapat melihat bahwa selalu dapat diturunkan cukup untuk membuat kriteria $\varepsilon - \delta$ benar. Jadi, pada Gambar 7.8 setiap tantangan dapat dipenuhi, dan oleh karena itu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.



Gambar 7.8: Grafik fungsi f dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Daerah yang diarsir merah adalah daerah terlarang. Pada (a), grafik tidak memasuki daerah terlarang, dan kriteria $\varepsilon - \delta$ benar. Dalam (b), telah dikurangi, dan kriteria $\varepsilon - \delta$ salah. Pada (c), juga telah dikurangi, tetapi kriteria $\varepsilon - \delta$ tetap benar.



Gambar 7.9 : Grafik fungsi f yang $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ tidak terdefinisi.

Di sisi lain, Gambar 7.9 menunjukkan fungsi f dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ tidak terdefinisi. Pada Gambar 7.9a kriteria $\varepsilon - \delta$ terpenuhi, tetapi pada Gambar 7.9b nilai lebih kecil dan kriteria $\varepsilon - \delta$ salah. Perhatikan bahwa titik di $(a, f(a))$ tidak berada di daerah terlarang; daerah terlarang hanya mencakup titik-titik yang koordinat- x nya berada di antara $a - \delta$ dan $a + \delta$ tetapi tidak sama dengan a . Namun, ada titik pada grafik f tepat di sebelah kiri $(a, f(a))$ yang berada di daerah terlarang. Selanjutnya, bagian grafik ini naik ke $(a, f(a))$, jadi sekecil apa pun kita membuat, kita tidak akan

dapat menghindari memiliki titik pada grafik f tepat di sebelah kiri $(a, f(a))$ yang berada di daerah terlarang. Jadi, untuk nilai yang ditunjukkan pada Gambar 7.9b tidak ada nilai terkait yang sesuai untuk kriteria $\varepsilon - \delta$ yang benar, dan oleh karena itu menurut Definisi 7.1.3 tidak berlaku bahwa sebagai $x \rightarrow a^\pm$, $f(x) \rightarrow L$. Penalaran serupa menunjukkan bahwa sebenarnya tidak ada nilai L untuk $x \rightarrow a^\pm$, $f(x) \rightarrow L$; kita harus mencoba memilih nilai lain untuk L pada gambar dan memeriksa bahwa, dalam setiap kasus, kita dapat menggambar tantangan yang tidak dapat dipenuhi. Oleh karena itu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ tidak terdefinisi. Ini seharusnya masuk akal secara intuitif: Ketika x dekat dengan a tetapi kurang dari a , $f(x)$ memiliki satu nilai, tetapi ketika x dekat dengan a dan lebih besar dari a memiliki nilai yang berbeda. Jadi, tidak ada bilangan tunggal yang mendekati $f(x)$ ketika x dekat dengan a .

Fungsi menarik yang membantu dalam menjelaskan konsep limit adalah fungsi h_1 yang didefinisikan oleh rumus

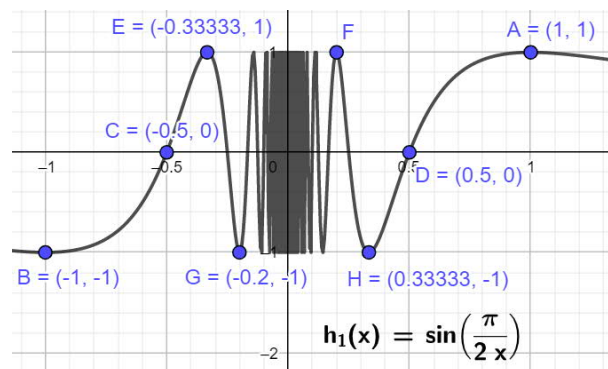
$$h_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

Jelas bahwa $h_1(x)$ terdefinisi untuk semua $x \neq 0$, $h_1(0)$ tak-terdefinisi.

x	$\frac{\pi}{2x}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$	x	$\frac{\pi}{2x}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$
1	$\pi/2$	1	-1	$-\pi/2$	-1
1/2	π	0	-1/2	$-\pi$	0
1/3	$3\pi/2$	-1	-1/3	$-3\pi/2$	1
1/4	2π	0	-1/4	-2π	0
1/5	$5\pi/2$	1	-1/5	$-5\pi/2$	-1
1/6	3π	0	-1/6	-3π	0
1/7	$7\pi/2$	-1	-1/7	$-7\pi/2$	1
1/8	4π	0	-1/8	-4π	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabel 7.4 : Nilai dari $\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ untuk $x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$.

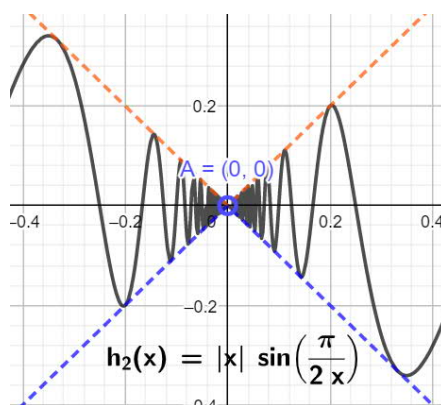
Tabel 7.4 memberikan nilai $h_1(x)$ untuk $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ dan juga untuk $x = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$. Tidak sulit untuk melihat bahwa pola dalam tabel ini akan berlanjut, dan ketika x mendekati 0 baik dari sisi positif maupun negatif, nilai $h_1(x)$ berayun bolak-balik berkali-kali tak terhingga antara -1 dan 1 . Untuk nilai x antara nilai yang ditunjukkan dalam tabel, $h_1(x)$ mengambil semua nilai antara -1 dan 1 . Tidak pernah mengambil nilai di luar rentang ini, karena nilai fungsi sinus selalu dalam interval $[-1, 1]$. Grafik h_1 ditunjukkan pada Gambar 7.10. Daerah hitam di tengah gambar sebenarnya adalah banyak sekali ayunan naik turun yang berdesakan begitu dekat sehingga tidak bisa dibedakan satu sama lain.



Gambar 7.10 : Grafik dari h_1 . Beberapa titik dari Tabel 7.4 diberi label dalam grafik.

Fungsi menarik lainnya yang terkait dengan h_1 adalah fungsi h_2 yang didefinisikan oleh rumus

$$h_2(x) = |x| \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$



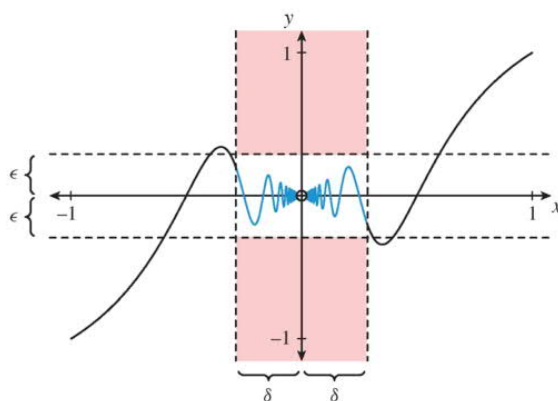
Gambar 7.11: Grafik h_2 . Garis putus-putus adalah grafik dari $y = |x|$ (merah) dan $y = -|x|$ (biru).

Grafik h_2 , seperti grafik h_1 , berayun ke atas dan ke bawah berkali-kali. Namun, mengalikan pertidaksamaan $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \leq 1$ dengan $|x|$, kita melihat bahwa

$$-|x| \leq \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) \leq |x|.$$

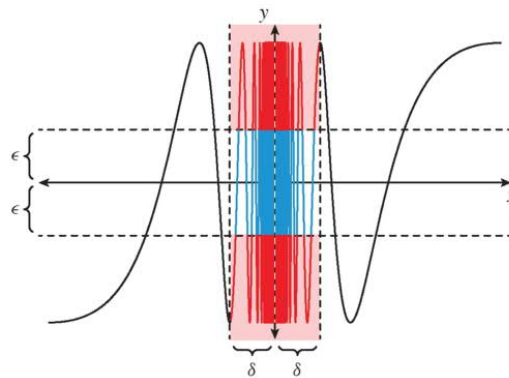
Jadi, meskipun ayunan pada grafik h_1 turun ke $y = -1$ dan naik ke $y = 1$, ayunan pada grafik h_2 tetap berada di antara kurva $y = -|x|$ dan $y = |x|$. Grafik h_2 ditunjukkan pada Gambar 7.11.

Apa yang dapat kita katakan tentang $\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} h_2(x)$? Kita melihat pada Gambar 7.11 bahwa $h_2(x)$ menuju 0 saat x mendekati 0, jadi secara intuitif tampaknya $\lim_{x \rightarrow 0} h_2(x)$ seharusnya 0. Apakah Definisi 7.1.3 dan 7.1.5 membawa kita ke kesimpulan? Gambar 7.12 menunjukkan tantangan suatu ε untuk limit ini yang telah berhasil dipenuhi oleh respons nilai δ yang sesuai. Grafik tidak masuk ke daerah terlarang, dan oleh karena itu kriteria $\varepsilon - \delta$ benar. Selanjutnya, karena ayunan dalam grafik h_2 semakin kecil seiring kurva mendekati titik asal, tampaknya kita dapat memenuhi tantangan yang serupa untuk sebarang ε dengan menggunakan δ yang cukup kecil. Kita akan dapat mengkonfirmasi ini lebih hati-hati nanti, tetapi untuk saat ini kita hanya akan mengatakan bahwa dalam grafik tampaknya sebagai $x \rightarrow 0^\pm$, $h_2(x) \rightarrow 0$, dan oleh karena itu $\lim_{x \rightarrow 0} h_2(x) = 0$.



Gambar 7.12: Menguji apakah $\lim_{x \rightarrow 0} h_2(x) = 0$. Untuk pilihan ε dan δ ini, kriteria $\varepsilon - \delta$ benar.

Bisakah kita juga mengatakan bahwa sebagai $x \rightarrow 0^\neq$, $h_1(x) \rightarrow 0$? Gambar 7.13 menunjukkan tantangan ε untuk pernyataan ini yang belum berhasil dipenuhi. Dan harus jelas dari gambar bahwa sebenarnya tantangan ini tidak dapat dipenuhi: karena goyangan terus berlanjut hingga sumbu- y , tidak ada bilangan positif δ , sekecil apa pun, yang dapat membuat grafik menghindari daerah terlarang dan membuat kriteria $\varepsilon - \delta$ benar. Jadi, menurut Definisi 7.1.3, tidak demikian halnya dengan $x \rightarrow 0^\neq$, $h_1(x) \rightarrow 0$. Dan penalaran serupa mengarah pada kesimpulan bahwa tidak ada bilangan L sehingga $x \rightarrow 0^\neq$, $h_1(x) \rightarrow L$: berapa pun nilai yang kita pilih untuk L , jika ε cukup kecil maka rentang $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$ akan terlalu kecil untuk memuat ayunan pada grafik h_1 , yang memanjang dari $y = -1$ hingga $y = 1$. Jadi, $\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x)$ tidak terdefinisi. Melihat Gambar 7.10, ini seharusnya masuk akal secara intuitif: tidak seperti $h_2(x)$, $h_1(x)$ tampaknya tidak cocok dengan bilangan apa pun saat x mendekati 0.



Gambar 7.13 : Menguji apakah $\lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) = 0$. Untuk pilihan dan ini, kriteria $\varepsilon - \delta$ salah.

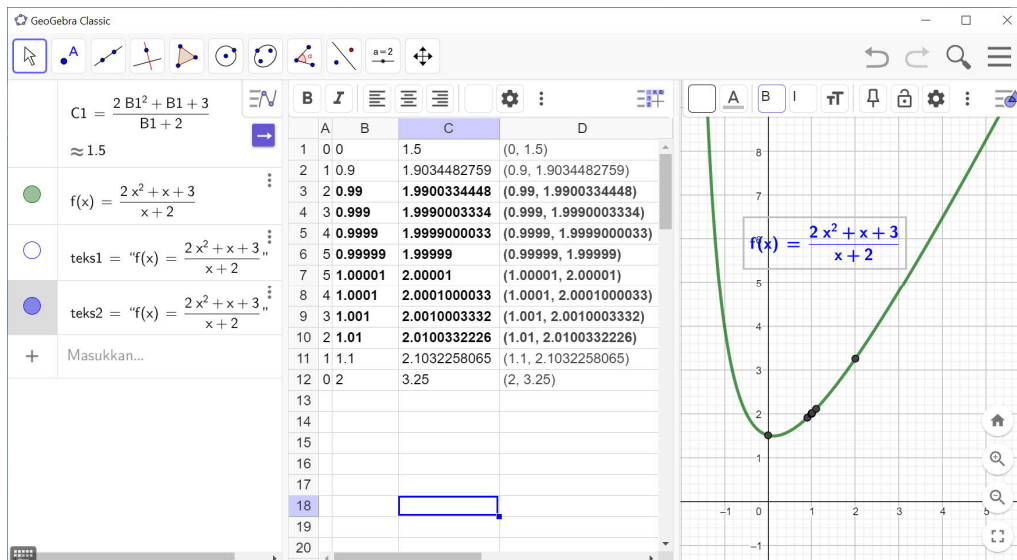
Untuk menghitung limit fungsi $f(x)$ bila x mendekati a dari kiri/kanan dalam Geogebra kita bisa menggunakan fasilitas yang tersedia pada **CAS**, dengan perintah sebagai berikut : **LimitAbove(f(x),x,a)** (**BatasAtas(f(x),x,a)**) dan **LimitBelow(f(x),x,a)** (**BatasBawah(f(x),x,a)**). LimitAbove untuk perintah limit dari $f(x)$ bila x mendekati a dari kanan sedangkan LimitBelow untuk perintah limit dari $f(x)$ bila x mendekati a dari kiri.

Contoh 1

Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 3}{x + 2}$.

Jawab:

Sebelum menghitung nilai limit, diberikan tabel perhitungan nilai dari $\frac{2x^2 + x + 3}{x + 2}$ bila x mendekati 1 dari kiri ataupun dari kanan.



Dari Gambar bagian tengah Tabel Excel memberikan nilai dari $\frac{2x^2+x+3}{x+2}$ bila x mendekati 1 dari kiri ataupun dari kanan adalah mendekati 2. Hal ini bisa kita selidiki dengan perintah dalam CAS sebagaimana diberikan oleh gambar berikut:

1	BatasAtas($\frac{2x^2+x+3}{x+2}, x, 1$)	$\rightarrow$ 2
2	BatasBawah($\frac{2x^2+x+3}{x+2}, x, 1$)	$\rightarrow$ 2
3	Masukkan...	

Dalam hal ini berarti nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+x+3}{x+2}$ adalah eksis dan untuk menghitungnya dalam CAS digunakan langsung perintah sebagai berikut :

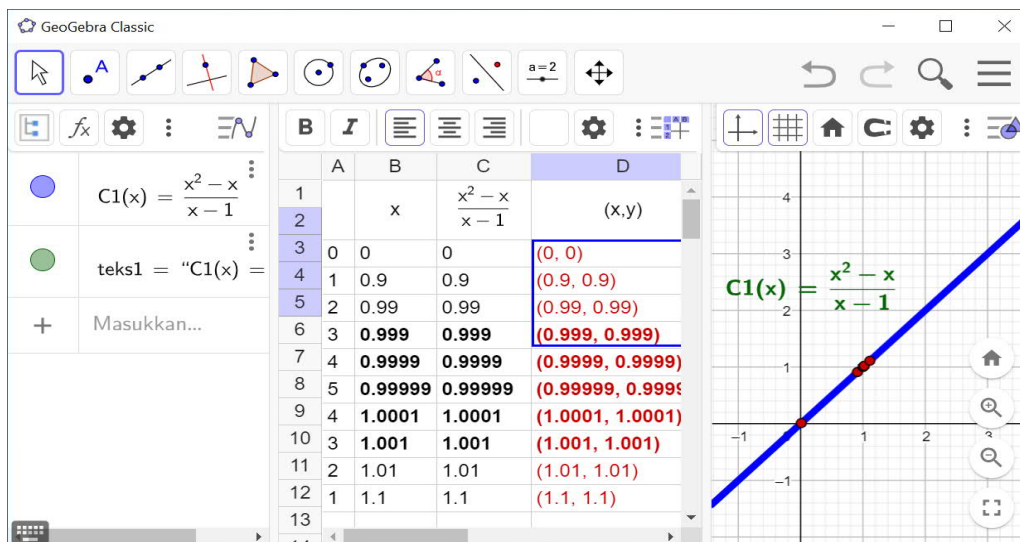
3	Limit($\frac{2x^2+x+3}{x+2}, x, 1$)	$\rightarrow$ 2
---	---------------------------------------	-----------------

Contoh 2

Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1}$.

Jawab:

Sebelum menghitung nilai limit, diberikan tabel perhitungan nilai dari $\frac{x^2-x}{x-1}$ bila x mendekati 1 dari kiri ataupun dari kanan.



Dari Gambar bagian tengah Tabel Excel memberikan nilai dari $\frac{x^2 - x}{x - 1}$ bila x mendekati 1 dari kiri ataupun dari kanan adalah mendekati 1. Hal ini bisa kita selidiki dengan perintah dalam CAS sebagaimana diberikan oleh gambar berikut:

1 ☐ BatasAtas($\frac{x^2 - x}{x - 1}, 1$) $\rightarrow$ 1

2 ☐ BatasBawah($\frac{x^2 - x}{x - 1}, 1$) $\rightarrow$ 1

3 ☐ Masukkan...

Dalam hal ini berarti nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ adalah eksis dan untuk menghitungnya dalam CAS digunakan langsung perintah sebagai berikut :

3 ☐ Limit($\frac{x^2 - x}{x - 1}, 1$) $\rightarrow$ 1

7.2 Fungsi Kontinu

Fungsi bernilai real $f(x)$ dikatakan kontinu di $x = a$ bila $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dimana hasil limit tidak tergantung pada arah pendekatan x mendekati a dari kiri ataupun dari kanan.

Fungsi bernilai real yang didefinisikan oleh :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

diskontinu di $x = 0$. Diskusikan hal ini mengapa!

Catatan, dalam Contoh 2 $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ jelas tidak terdefinisi di $x = 1$, tetapi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1} = 1$. Lalu bagaimana bila didefinisikan $f(1) = 1$. Hasil ini bisa diringkas dalam teorema berikut.

Teorema

Bila fungsi bernilai real $f(x)$ takterdefinisi di $x = a$ dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, maka fungsi $f(x)$ akan kontinu di $x = a$ asalkan diasumsikan $f(a) = A$.

Berdasarkan teorema diatas, maka fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

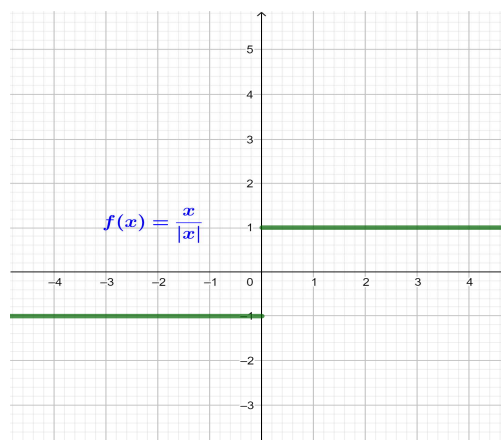
Adalah kontinu di $x = 1$.

Contoh 3

Selidiki apakah fungsi bernilai real yang diberikan oleh $f(x) = \frac{x}{|x|}$ kontinu di $x = 0$.

Jawab :

Karena untuk x mendekati 0 dari kanan nilai $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ dan untuk x mendekati 0 dari kiri nilai $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ tidak ada. Dengan demikian berdasarkan teorema yang telah dibahas $f(x)$ diskontinu di $x = 0$. Gambar berikut menjelaskan bahwa di $x = 0$ pada $f(x) = \frac{x}{|x|}$ terjadi loncatan.

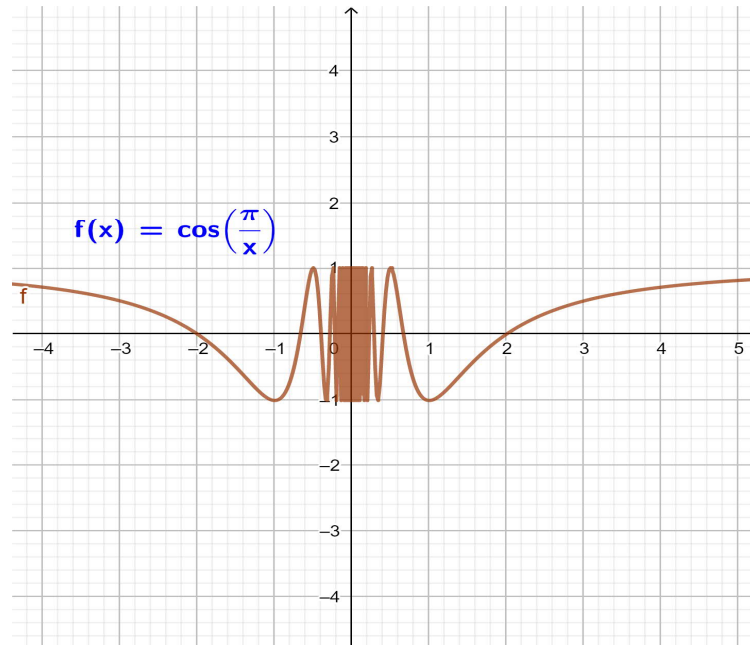


Contoh 4

Perkirakan nilai dari $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ disekitar x mendekati 0.

Jawab :

Digambar dulu grafik dari $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ Geogebra sebagai berikut:



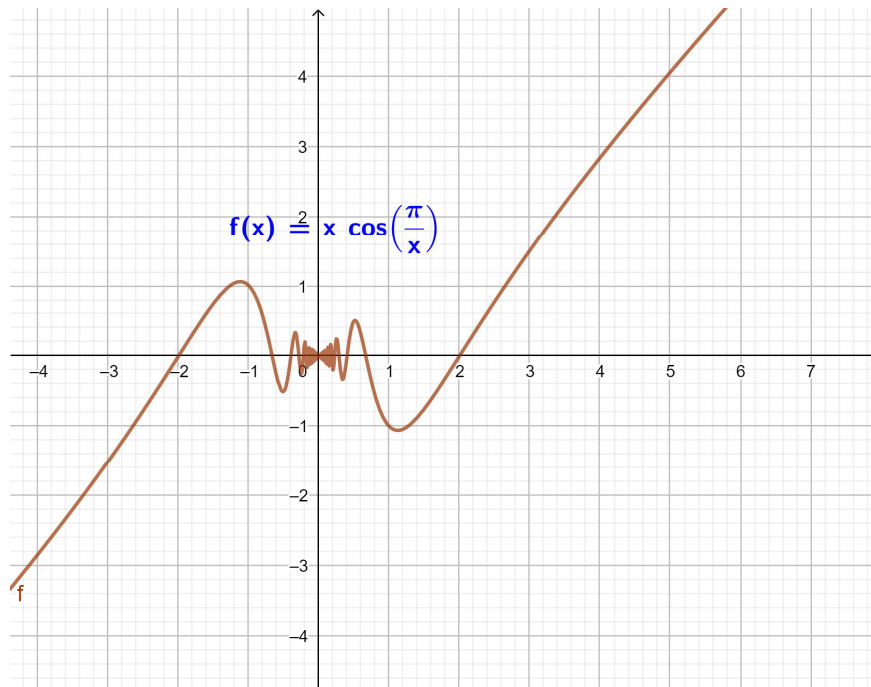
Terlihat bahwa untuk nilai x mendekati 0 dari kiri ataupun kanan terjadi osilasi nilai $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ dari -1 dan $+1$ dan nilai-nilai ini sangat rapat sekali dari sisi kiri ataupun kanan $x = 0$. Kita selidiki limitnya dengan menggunakan CAS didapat:

1	BatasAtas($\cos(\frac{\pi}{x}), 0$)
☐	→ ?
2	BatasBawah($\cos(\frac{\pi}{x}), 0$)
☐	→ ?
3	Limit($\cos(\frac{\pi}{x}), 0$)
☐	→ ?
4	

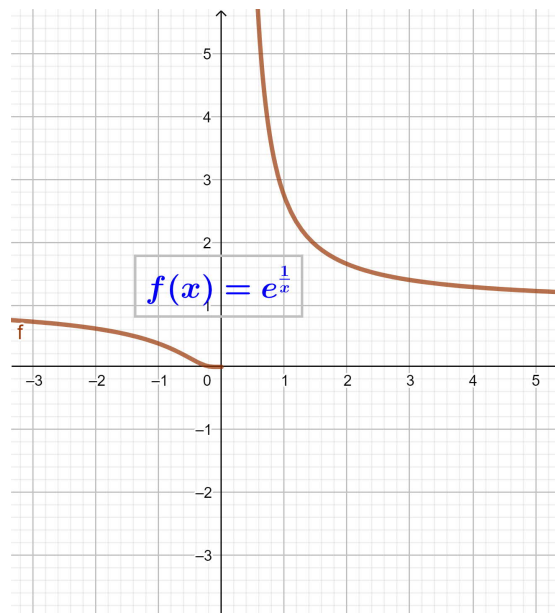
Terlihat nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{x}$ tidak ada. Selanjutnya bagaimana bila sekarang $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$. Kita hitung $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{\pi}{x}$ menggunakan CAS didapat:

4	Limit($x \cdot \cos(\frac{\pi}{x}), 0$)
☐	→ 0

Mengapa $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{\pi}{x} = 0$? Hal ini bisa diamati perilaku grafik dari $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ disekitar nilai x mendekati 0.



Terlihat disekitar nilai x mendekati 0 perilaku grafik $f(x) = x \cos \frac{\pi}{x}$ tetap berisolasi dari nilai positif ke negatif tetapi semakin menuju ke nilai 0. Dengan demikian jelas bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{\pi}{x} = 0$. Penggambaran grafik suatu fungsi bisa memperkirakan perilaku grafik fungsi tersebut disekitar titik pengamatan. Misalnya gambar grafik dari $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ disekitar nilai x mendekati 0 yang diberikan oleh gambar berikut:



Terlihat bahwa grafik $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ diskontinu di $x = 0$. Disekitar x mendekati 0 ada dua hal yaitu bila x mendekati 0^- maka nilai $f(x)$ menuju ke $+\infty$ sedangkan bila x mendekati 0^+ , maka $f(x)$ menuju 0. Hal ini bisa diselidiki dalam CAS sebagai berikut:

T	⚙	:	≡ x=
1	☐	BatasAtas($e^{\frac{1}{x}}, 0$)	
		→	∞
2	☐	BatasBawah($e^{\frac{1}{x}}, 0$)	
		→	0

7.3 Limit mendekati takhingga

1. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$.

Jawab:

Hal ini dikerjakan dalam CAS sebagai berikut:

T	⚙	:	≡ x=
1	☐	BatasAtas($\frac{1}{x}, \infty$)	
		→	0
2	☐	BatasBawah($\frac{1}{x}, \infty$)	
		→	0
3	☐	Limit($\frac{1}{x}, \infty$)	
		→	0
4	☐	LimitAbove($\frac{1}{x}, \infty$) $\stackrel{?}{=}$ LimitBelow($\frac{1}{x}, \infty$)	
		→	true

Menghitung limit dari $(1 + \frac{1}{x})^x$ untuk x mendekati $+\infty$ dan $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ untuk x mendekati 0.

T	⚙	:	≡ x=
1	☐	Limit($((1 + \frac{1}{x})^x, \infty)$)	
		→	e
2	☐	Limit($((1 + x)^{\frac{1}{x}}, 0)$)	
		→	e

2. Diberikan fungsi

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

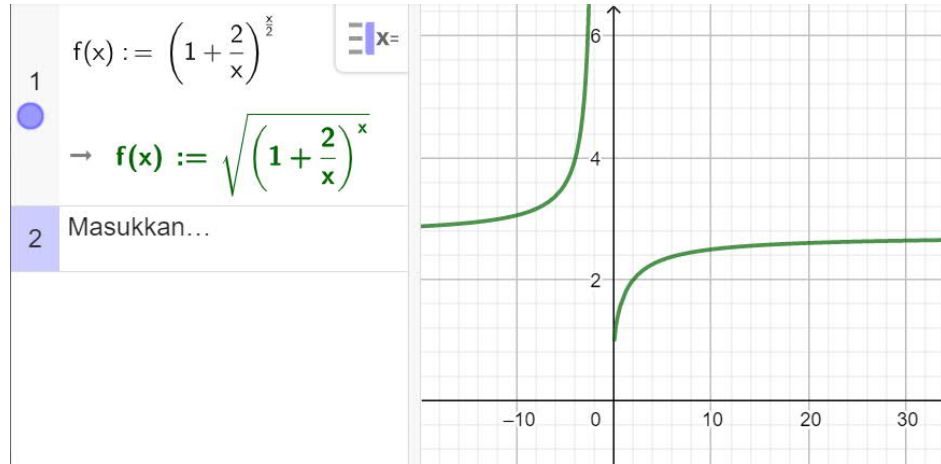
Plot grafiknya dan coba tebak nilai limit berikut dengan melihat grafiknya:

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Jawab

1. Gambar fungsi $f(x)$ adalah:



2. Selanjutnya kita menghitung $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, dengan Geogebra sebagai berikut:

	$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$
	$a = \text{BatasBawah}(f, -2)$
	$\rightarrow \infty$
	$b = \text{Limit}(f, -\infty)$
	$\rightarrow 2.71828$
	$c = \text{Limit}(f, \infty)$
	$\rightarrow 2.71828$
	$d = \text{Limit}(f, 2)$
	$\rightarrow 2$

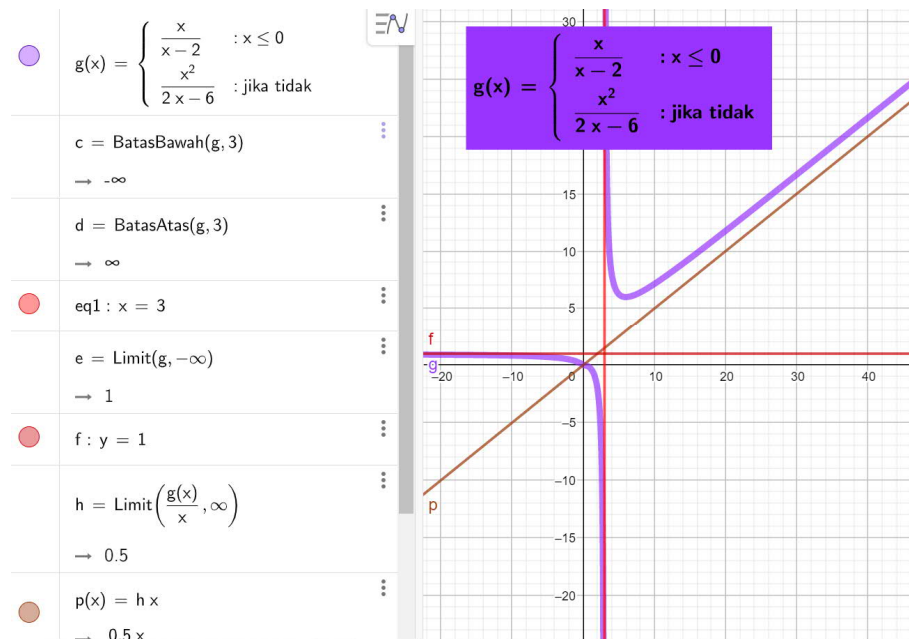
3. Diberikan fungsi

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & \text{bila } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2x-6}, & \text{bila } x > 0 \end{cases}$$

Gambarkan grafiknya dan tentukan secara grafik jika ada asimtot.

Jawab

Kita menyelesaikan persoalan ini menggunakan Geogebra dengan fasilitas limit sebagaimana berikut:



Terlihat bahwa $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty$, hal ini menunjukkan bahwa garis $x = 3$ adalah asimptot tegak. Selain itu $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, hal ini menunjukkan bahwa garis $y = 1$ adalah asimptot datar. Juga dari $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$, hal ini menunjukkan bahwa garis $y = \frac{1}{2}x$ adalah asimptot miring.

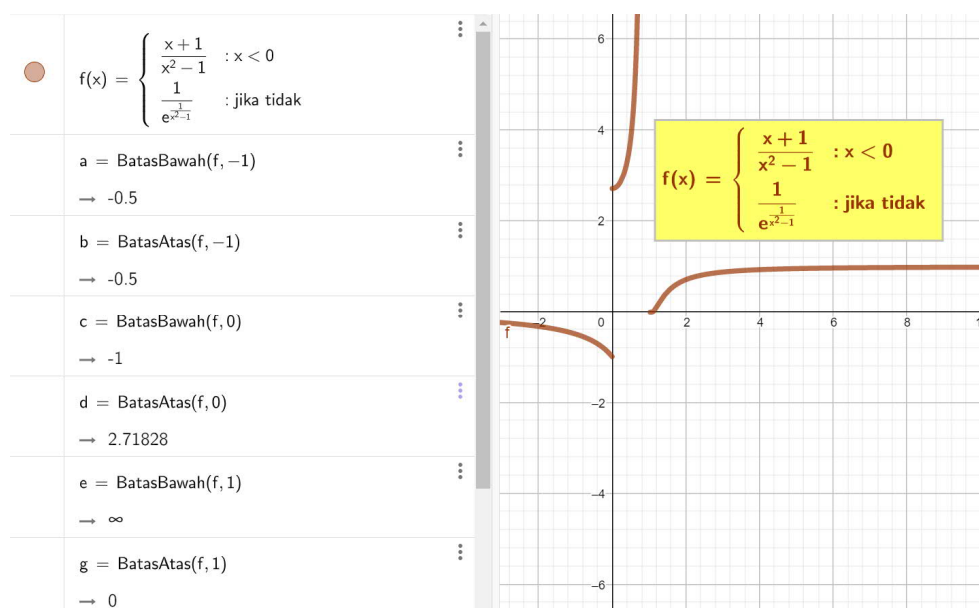
4. Gambarkan grafik fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1}, & \text{bila } x < 0 \\ \frac{1}{e^{x^2-1}}, & \text{bila } x \geq 0 \end{cases}$$

dan menentukan titik-titik di mana ia memiliki diskontinuitas serta mengklasifikasinya.

Jawab

Untuk menjawab ini, kita melakukannya dalam Geogebra sebagai berikut:



Terlihat bahwa: karena $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -0.5$, maka f memiliki diskontinuitas yang dapat dihapus di $x = -1$. Karena $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2,71828$, maka f memiliki diskontinuitas yang meloncat di $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, maka f memiliki diskontinuitas yang esensial di $x = 1$.

7.4 Differensial Fungsi Satu Peubah

Diberikan fungsi $y = f(x)$, asumsikan x sebarang te tap, didefinisikan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Sehingga didapat $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Bila Δx mendekati 0, didapat:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bila $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ada, maka $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dinamakan differensial dari fungsi f di x , dalam hal ini dinotasikan sebagai $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$. Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Contoh 1

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ bila $y = f(x) = x^2$.

Jawab:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Kita lakukan perhitungan ini dalam CAS sebagai berikut:

3	$f(x) := x^2$
	$\rightarrow f(x) := x^2$
4	$g := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
	$\rightarrow g := h + 2x$
5	$\text{Limit}(g, h, 0)$
	$\rightarrow 2x$

Perhitungan $\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx}$, dalam CAS bisa langsung dilakukan sebagai berikut:

6 Turunan(x^2, x)
☐ → $2x$

Selanjutnya, tentukan $\frac{df(x)}{dx}$ bila $f(x) = x^3 e^{x^2} \sin(kx)$. Kita lakukan perhitungan dalam CAS sebagai berikut:

1 $f(x) := x^3 \cdot e^{x^2} \cdot \sin(k \cdot x)$
 → $f(x) := x^3 e^{(x^2)} \sin(k x)$
 Turunan(f, x)
 2 → $3x^2 e^{(x^2)} \sin(k x) + 2x^4 e^{(x^2)} \sin(k x) + kx^3 e^{(x^2)} \cos(k x)$

Jadi

$$\frac{d(x^3 e^{x^2} \sin(kx))}{dx} = 3x^2 e^{x^2} \sin(kx) + 2x^4 e^{x^2} \sin(kx) + kx^3 e^{x^2} \cos(kx).$$

Diferensial tingkat satu atau turunan pertama dari $y = f(x)$ terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}$. Turunan keduanya adalah $\frac{d^2 y}{dx^2}$ atau juga ditulis $f''(x)$, secara umum turunan tingkat ke- n dari $y = f(x)$ terhadap x adalah $\frac{d^n y}{dx^n}$ dengan $n = 1, 2, 4, \dots$. Dalam CAS, perintahnya adalah **Turunan(f(x), x, n)**. Misalnya kita akan menentukan turunan ke-3 dari $y = x \cos 2x$ sebagai berikut:

1 Turunan($x \cdot \cos(2 \cdot x), x, 3$)
☐ → $-12 \cos(2x) + 8x \sin(2x)$

Terlihat bahwa $\frac{d^3(x \cos(2x))}{dx^3} = -12 \cos(2x) + 8x \sin(2x)$.

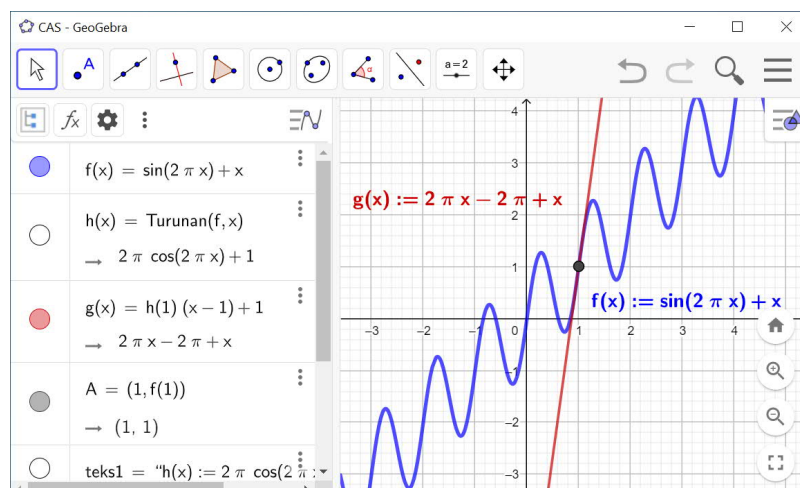
Salah satu penggunaan dari turunan adalah untuk menentukan garis singgung dari suatu kurva $y = f(x)$ di suatu titik $(a, f(a))$.

Contoh 2

Dapatkan persamaan garis singgung pada $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ di $(1, 1)$.

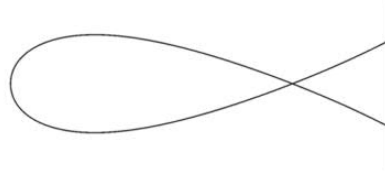
Jawab

Kita lakukan dalam CAS sebagai berikut:



Model Persamaan Sayap Pesawat

Berikut ini dibahas model matematika dari sayap pesawat, pembaca dapat mengikuti bahan yang dibahas ini di [5].



Gambar 1: Skema Sayap Pesawat

Gambar 1 menunjukkan model matematika sederhana dari penampang sayap untuk pesawat kecil yang dikendalikan dari jarak jauh. Model ini terdiri dari dua kurva, $f(x)$ dan $g(x)$, melampirkan penampang sayap. Kedua kurva simetris, bayangan cermin satu sama lain dalam sumbu simetri horizontal.

Sekelompok ilmuwan pesawat yang memodelkan sayap pesawat menempatkan model fisik mereka dalam sistem koordinat dan mengukur koordinat untuk kurva atas. Koordinat kurva ini diberikan oleh Tabel 1.

Tabel 1: Koordinat suait Sayap Pesawat

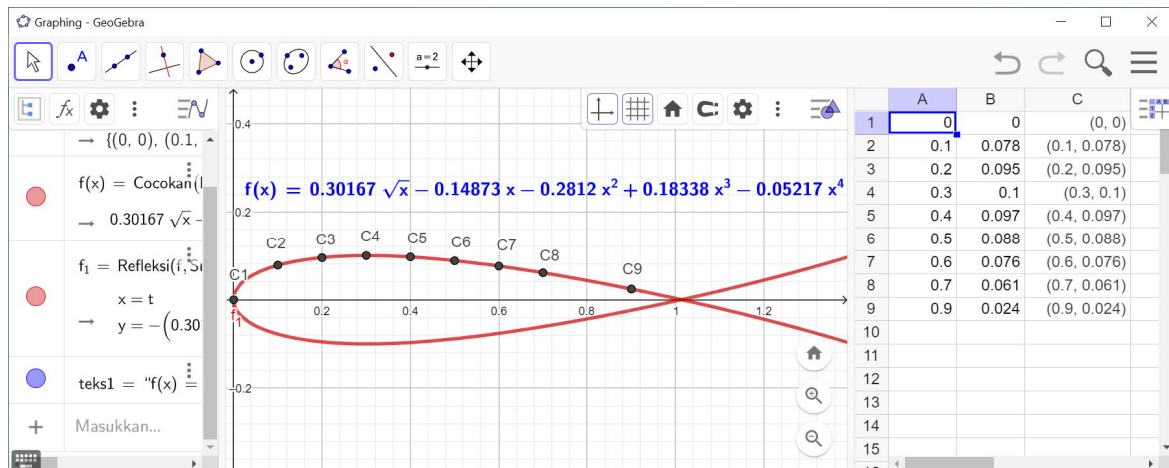
x dalam meter	y dalam meter
0,0	0
0,1	0,078
0,2	0,095
0,3	0,100
0,4	0,097
0,5	0,088
0,6	0,076
0,7	0,061
0,9	0,024

Berdasarkan prinsip-prinsip aero-dinamika dan spesifikasi industri yang disetujui, kelompok ilmuwan ini mengetahui bahwa bentuk sayap yang baik diberikan oleh

$$f(x) = a\sqrt{x} + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

dimana a, b, c, d dan e adalah konstanta. Tentukan nilai-nilai akurat untuk konstanta tsb.

Kita selesaikan persoalan ini dengan menggunakan Geogebra. Pertama buat list data dalam bentuk koordinat titik (x, y) dengan fasilitas spreadsheet, namakan data ini sebagai l1. Dalam mode Aljabar ketik : Fit[l1, {sqrt(x), x, x^2, x^3, x^4}], tekan enter, akan menghasilkan kurva $f(x)$. Cerminkan kurva ini pada sumbu y akan menghasilkan skema sayap pesawat sebagai data titik yang diberikan. Berikut ini hasilnya:



Pada pembahasan integral kita akan hitung luas penampang sayap pesawat yang kita bahas ini.

7.5 Aturan Rantai untuk Turunan

Misalkan $f(u(x))$ adalah fungsi terdiferensial dari $u(x)$ dan $u(x)$ pada gilirannya adalah fungsi terdiferensial pada x . Maka f adalah fungsi komposisi dari x . Apakah f memiliki turunan terhadap x ? Jawabannya Ya, dan $\frac{df}{dx}$ diberikan oleh rumus yang mudah diingat:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Bukti

Dalam hal ini kita menghitung turunan fungsi komposisi $f(u(x))$ di x dengan kata lain kita menghitung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h}$$

Kita mendefinisikan $v = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u'(x)$, jelas bahwa $v \rightarrow 0$ bila $h \rightarrow 0$ dan perlu diperhatikan bahwa v ditentukan/bergantung pada bilangan h . Dengan cara yang sama karena f terdiferensial pada $u(x)$, kita mendefinisikan $w = \frac{f(u+k)-f(u)}{k} - f'(u)$, juga dalam hal ini $w \rightarrow 0$ bila $k \rightarrow 0$. Dari definisi yang telah dibuat, kita mempunyai:

$$u(x+h) = u(x) + [u'(x) + v]h$$

dan

$$f(u+k) = f(u) + [f'(u) + w]k.$$

Kita menggunakan dua persamaan ini untuk menulis ulang $f(u(x+h))$. Khususnya, bila kita menggunakan persamaan yang pertama kita mempunyai:

$$f(u(x+h)) = f(u(x) + [u'(x) + v]h),$$

dan kita menggunakan persamaan kedua pada sisi kanan untuk $k = [u'(x) + v]h$, juga ingat bahwa $k \rightarrow 0$ bila $h \rightarrow 0$ dan juga $w \rightarrow 0$ bila $h \rightarrow 0$. Sehingga kita mempunyai

$$f(u(x) + [u'(x) + v]h) = f(u(x)) + [f'(u(x)) + w] \cdot [u'(x) + v]h.$$

Dengan menggunakan , persamaan terakhir ini sekarang kita sederhanakan bentuk berikut:

$$\begin{aligned}\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} &= \frac{f(u(x)) + [f'(u(x)) + w] \cdot [u'(x) + v]h - f(u(x))}{h} \\ &= \frac{[f'(u(x)) + w] \cdot [u'(x) + v]h}{h} \\ &= [f'(u(x)) + w] \cdot [u'(x) + v]\end{aligned}$$

Karena untuk $h \rightarrow 0$, maka $w \rightarrow 0$ dan $v \rightarrow 0$. Sehingga kita mempunyai

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [f'(u(x)) + w] \cdot [u'(x) + v] \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} f'(u(x)) + \lim_{h \rightarrow 0} w \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} u'(x) + \lim_{h \rightarrow 0} v \right) \\ &= f'(u(x)) \cdot u'(x)\end{aligned}$$

Alternatif untuk menyelesaikan turunan aturan rantai bisa dilakukan sebagai berikut: Turunkan $f(x)$ menjadi $f'(x)$. Lalu, lakukan komposisi $f'(u(x))$. Selajutny lakukan perkalian $f'(u(x)) \cdot u'(x)$. Hasil yang terakhir ini adalah turunan $\frac{df}{dx}$.

Contoh 1

Diberikan $f(u) = \frac{u-1}{u+1}$ dan $u(x) = x^2$. Maka tentukan $\frac{df}{dx}$.

Jawab

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2}{u^2 + 2u + 1} 2x = \frac{4x}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Kita bisa lakukan perhitungan dalam Geogebra sebagaimana gambar berikut:

☐	$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
☐	$f'(x) = \text{Turunan}(f)$ $\rightarrow \frac{2}{x^2 + 2x + 1}$
☒	$p(x) = \text{Sederhanakan}(\text{Turunan}(f(x^2)))$ $\rightarrow 4 \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$
☐	$q(x) = \text{Sederhanakan}(f'(x^2) \text{ Turunan}(u))$ $\rightarrow 4 \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$
☐	$u(x) = x^2$

Terlihat bahwa $\frac{df}{dx} = 4 \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Contoh 2

Tentukan $\frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-3}$.

Jawab

$$\frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-3} = -3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-4} \frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-4} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Kita hitung dengan menggunakan Geogebra sebagaimana gambar berikut:

☐	$f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-3}$
☐	$f'(x) = \text{Turunan}(f)$ $\rightarrow \frac{-3x^4 + 3x^2}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}$
☐	$g(x) = -3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-4} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$
☐	$h(x) = \text{Urai}(g)$ $\rightarrow \frac{-3x^4 + 3x^2}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}$

Terlihat bahwa $\frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right)^{-3} = \frac{-3x^4 + 3x^2}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}$.

7.6 Fungsi Naik atau Turun

Misalkan fungsi f terdiferensial pada interval (a, b) :

1. Bila $f'(x) > 0$ untuk semua x di (a, b) , maka f dinamakan fungsi naik pada (a, b) .
2. Bila $f'(x) < 0$ untuk semua x di (a, b) , maka f dinamakan fungsi turun pada (a, b) .
3. Bila $f'(x) = 0$ untuk semua x di (a, b) , maka f dinamakan fungsi konstan pada (a, b) .

Contoh 1 [6]

Tentukan interval dari fungsi $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$ dimana ia naik ataupun turun.

Jawab:

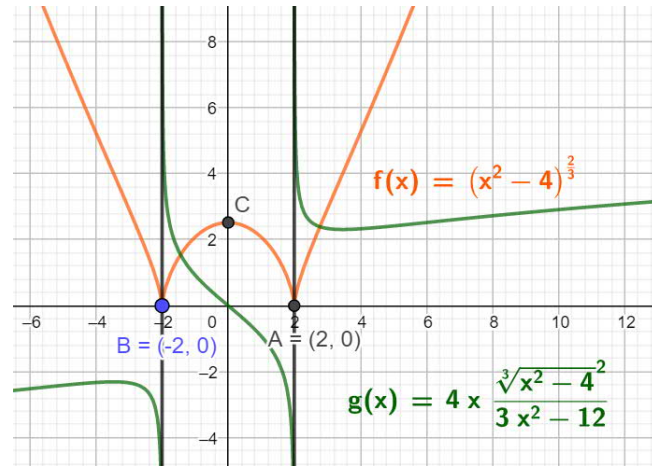
Pertama ditentukan turunan dari f yaitu $g(x) = f'(x)$. Kita lakukan dalam Geogebra sebagai berikut:

☐	$f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$
☐	$g(x) = \text{Turunan}(f, x)$ $\rightarrow 4x \times \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}^2}{3x^2 - 12}$

Terlihat bahwa bahwa $g(x) = f'(x) = 4x \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}^2}{3x^2 - 12}$. Selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan $g(x) > 0$ dan $g(x) < 0$ sebagai berikut:

$I1 = \text{Selesaikan}(g(x) \geq 0)$
$\rightarrow \{-2 < x \leq 0, x > 2\}$
$I2 = \text{Selesaikan}(g(x) \leq 0)$
$\rightarrow \{x < -2, 0 \leq x < 2\}$

Terlihat bahwa pada interval $-2 < x < 0$ dan $2 < x < \infty$ nilai $g(x) > 0$. Jadi fungsi f naik pada interval $-2 < x < 0$ dan $2 < x < \infty$. Sedangkan pada interval $-\infty < x < -2$ dan $0 < x < 2$ nilai $g(x) < 0$. Jadi fungsi f turun pada interval. Sedangkan pada $x = 0$, f konstan dan titik $(0, f(0))$ merupakan titik puncak (terjadi maksimum lokal) disekitar $x = 0$ ada perubahan f naik menjadi turun. Perilaku grafiknya sebagai berikut:



Contoh 2 [6]

Jumlah B pasien per hari di ruang gawat darurat rumah sakit selama periode 31 hari dimodelkan oleh:

$$B = 100 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3 + x} \right), 1 \leq x \leq 31,$$

dimana x diukur dalam hari.

- Dapatkan interval buka dimana B merupakan fungsi naik atau turun.
- Gunakan utilitas untuk membuat grafik B .
- Gunakan fitur jejak untuk menentukan kapan jumlah pasien paling rendah.

Jawab:

Pertama ditentukan turunan dari B yaitu $g(x) = B'(x)$. Kita lakukan dalam Geogebra sebagai berikut:

●	$B(x) = 100 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x + 3} \right)$
●	$g(x) = \text{Turunan}(B(x))$ $\rightarrow \frac{200x^2 - 600x - 900}{x^4 + 6x^3 + 9x^2}$

Terlihat bahwa bahwa $g(x) = f'(x) = \frac{200x^2 - 600x - 900}{x^4 + 6x^3 + 9x^2}$. Selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan $g(x) > 0$ dan $g(x) < 0$ sebagai berikut:

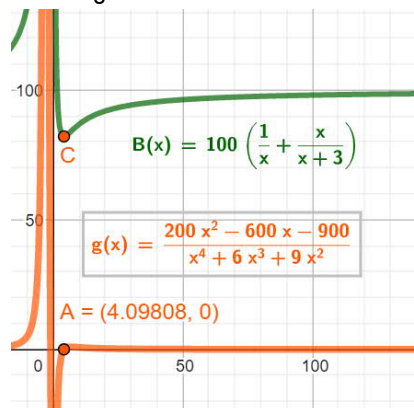
I1 = Selesaikan($g(x) > 0$)

$$\rightarrow \left\{ x < -3, -3 < x < \frac{-3\sqrt{3}+3}{2}, x > \frac{3\sqrt{3}+3}{2} \right\}$$

I2 = Selesaikan($g(x) < 0$)

$$\rightarrow \left\{ \frac{-3\sqrt{3}+3}{2} < x < 0, 0 < x < \frac{3\sqrt{3}+3}{2} \right\}$$

- a. Karena $B(x)$ di tentukan pada interval $1 \leq x \leq 31$, maka $g(x) > 0$ pada interval $\frac{3\sqrt{3}+3}{3} < x \leq 31$. Dengan demikian B naik pada interval $\frac{3\sqrt{3}+3}{3} < x \leq 31$. Sedangkan B turun pada interval $1 \leq x < \frac{3\sqrt{3}+3}{3}$.
- b. Grafik permasalahan diberikan sebagai berikut:



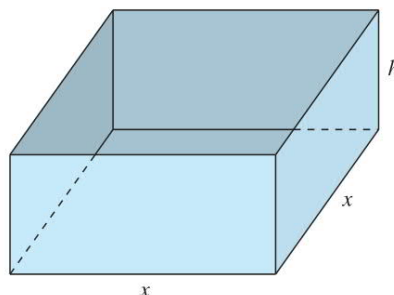
- c. Banyaknya pasien paling rendah diberikan sebagai berikut:

$$C = \text{Minimum}(B, 1, 31) \\ \rightarrow (4.09808, 82.13672)$$

Terlihat nilai minimum B terjadi di sekitar hari ke empat dan banyaknya pasien sekitar 82.

Contoh 3 [6]

Sebuah pabrik ingin merancang sebuah kotak terbuka yang memiliki alas persegi dan luas permukaan 108 inci persegi, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2. Berapa ukuran kotak yang akan menghasilkan kotak dengan volume maksimum?



Gambar 2: Kotak Terbuka dengan dasar persegi dan luas permukaan $S = x^2 + 4xh = 108$

Jawab:

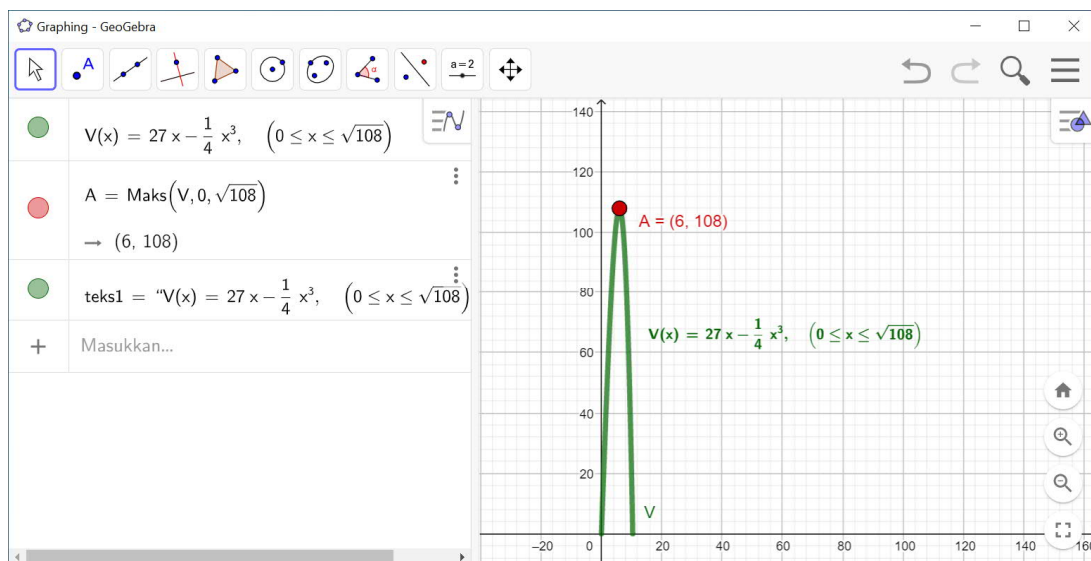
Karena dasar alas persegi, maka volume kotak adalah $V = x^2 h$ dan permukaan kotak terbuka diberikan oleh persamaan $108 = x^2 + 4xh$. Sehingga didapat $h = \frac{108-x^2}{4x}$. Substitusikan pada V , didapat:

$$V = x^2 h = x^2 \frac{108-x^2}{4x} = 27x - \frac{1}{4}x^3.$$

Sebelum menemukan nilai x mana yang menghasilkan nilai maksimum V , kita perlu menentukan domain fisibel dari fungsi tersebut. Artinya, berapa nilai x yang masuk akal dalam soal. Karena x harus nonnegatif dan luas alasnya $L = x^2 \leq 108$, kita dapat menyimpulkan bahwa domain fisibel adalah

$$0 \leq x \leq \sqrt{108}.$$

Untuk menentukan nilai maksimum dari V dalam Geogebra kita lakukan sebagai berikut:



Terlihat bahwa nilai minimum dari V adalah 108, untuk ukuran $x = 6$. Dengan demikian ukuran

$$h = \frac{108 - 6^2}{4(6)} = 3.$$

Disini pembaca bisa mentukan nilai maksimum/minimum dengan menggunakan kriteria turunan pertama dan ke-dua. Silahkan pembaca mencobanya.

7.7 Teorema Nilai Rata-rata untuk Differensial

Sekarang kita sampai pada teorema nilai rata-rata. Dari teorema ini mengalir sebagian besar hasil yang memberi kekuatan pada proses differensial.

Teorema 7.7.1. Teorema Nilai Rata-rata untuk Differensial

Jika f terdiferensial pada interval terbuka (a, b) dan kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka paling sedikit ada satu bilangan c pada (a, b) yang memenuhi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Perhatikan bahwa untuk bilangan ini

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

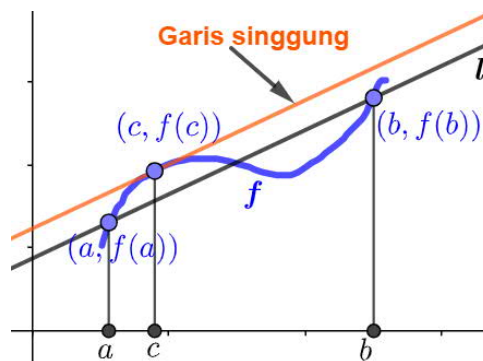
Pecahan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

adalah kemiringan garis l yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Untuk mengatakan bahwa setidaknya ada satu bilangan c yang memenuhi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

adalah untuk mengatakan bahwa grafik f memiliki setidaknya satu titik $(c, f(c))$ di mana garis singgung sejajar dengan garis l . Lihat Gambar 7.7.1.



Gambar 7.7.1: Garis singgung sejajar garis l

Kita akan membuktikan teorema nilai rata-rata dalam langkah-langkah. Pertama kita akan menunjukkan bahwa jika suatu fungsi f memiliki turunan tak nol di beberapa titik x_0 , maka, untuk x dekat dengan x_0 , $f(x)$ lebih besar dari $f(x_0)$ pada satu sisi x_0 dan lebih kecil dari $f(x_0)$ pada sisi lain dari x_0 .

Teorema 7.72.

Misalkan f terdiferensial pada x_0 . Jika $f'(x_0) > 0$, maka

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

untuk semua h positif cukup kecil. Jika $f'(x_0) < 0$, maka

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$$

untuk semua h positif cukup kecil.

Bukti

Kita mengambil kasus $f'(x_0) > 0$ dan menyerahkan kasus lainnya kepada pembaca. Dengan definisi turunan,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = f'(x_0).$$

Dengan $f'(x_0) > 0$ kita dapat menggunakan $f'(x_0)$ sendiri sebagai ε dan menyimpulkan bahwa ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\text{bila } 0 < |k| < \delta, \text{ maka } \left| \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} - f'(x_0) \right| < f'(x_0).$$

Untuk k yang demikian kita mempunyai

$$-f'(x_0) < \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} - f'(x_0) < f'(x_0)$$

dengan demikian

$$0 < \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} < 2f'(x_0).$$

Khususnya, kita mempunyai

$$\frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} > 0 \quad (7.7.1)$$

Kita telah menunjukkan bahwa (7.7.1) berlaku untuk semua bilangan k yang memenuhi kondisi $0 < |k| < \delta$. Jika $0 < h < \delta$, maka $0 < |h| < \delta$ dan $0 < |-h| < \delta$. Karena itu,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{dan} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} > 0.$$

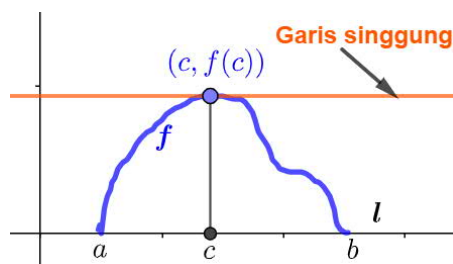
Pertidaksamaan yang pertama menunjukkan bahwa

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x_0 + h).$$

Sedangkan yang kedua menunjukkan bahwa

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0 - h) < f(x_0). \quad \blacksquare$$

Selanjutnya kita membuktikan kasus khusus dari teorema nilai rata-rata, yang dikenal sebagai teorema Rolle [setelah ahli matematika Prancis Michel Rolle (1652-1719), yang pertama kali mengumumkan hasilnya pada tahun 1691]. Dalam teorema Rolle kita membuat asumsi tambahan bahwa $f(a)$ dan $f(b)$ keduanya 0. (Lihat Gambar 4.1.2.)



Gambar 7.7.2: Garis singgung sejajar garis l (sumbu- x)

Dalam hal ini garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ mendatar. (Ini adalah sumbu- x .) Kesimpulannya adalah bahwa ada titik $(c, f(c))$ di mana garis singgung horizontal.

Teorema 7.7.2. Teorema Rolle

Misalkan f terdiferensial pada interval terbuka (a, b) dan kontinu pada interval tertutup $[a, b]$. Bila $f(a)$ dan $f(b)$ keduanya 0, maka paling sedikit ada satu bilangan c pada (a, b) yang memenuhi

$$f'(c) = 0.$$

BUKTI Jika f konstan 0 pada $[a, b]$, maka $f'(c) = 0$ untuk semua c dalam (a, b) . Jika f tidak konstan 0 pada $[a, b]$, maka f mengambil beberapa nilai positif atau beberapa nilai negatif. Kita menganggap yang pertama dan menyerahkan kasus lainnya kepada pembaca.

Karena f kontinu pada $[a, b]$, f harus mengambil nilai maksimum di beberapa titik c dalam $[a, b]$. Nilai maksimum ini, $f(c)$, harus positif. Karena $f(a)$ dan $f(b)$ keduanya 0, c tidak mungkin a dan tidak bisa b . Ini berarti bahwa c harus terletak pada interval terbuka (a, b) dan oleh karena itu $f'(c)$ ada. Sekarang $f'(c)$ tidak boleh lebih besar dari 0 dan tidak boleh kurang dari 0 karena dalam kedua kasus tersebut f harus mengambil nilai yang lebih besar dari $f(c)$. (Ini mengikuti dari Teorema 7.7.2.) Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa $f'(c) = 0$. ■

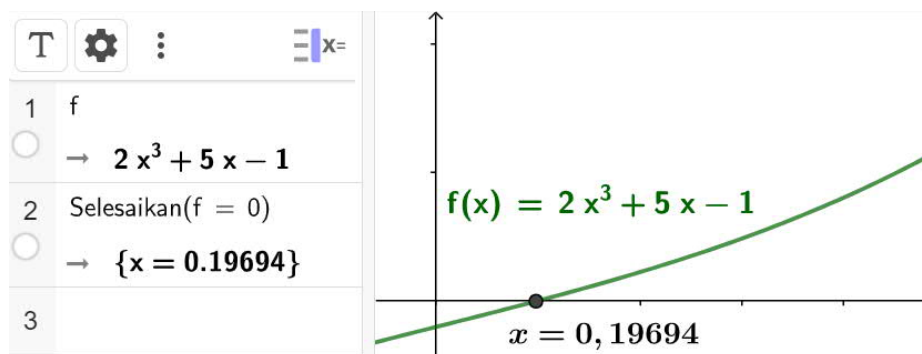
Teorema Rolle bukan hanya batu loncatan menuju teorema nilai rata-rata. Teorema ini sendiri merupakan alat yang berguna.

Contoh 1 Kita menggunakan teorema Rolle untuk menunjukkan bahwa $p(x) = 2x^3 + 5x - 1$ memiliki tepat satu akar real.

Penyelesaian. Karena p adalah polinomial derajat tiga, kita tahu bahwa p memiliki setidaknya satu akar real. Andaikan p memiliki lebih dari satu akar real. Secara khusus, misalkan $p(a) = p(b) = 0$ di mana a dan b adalah bilangan real dan $a \neq b$. Tanpa kehilangan keumuman, kita dapat mengasumsikan bahwa $a < b$. Karena setiap polinomial terdiferensial di mana-mana, p terdiferensial pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$. Jadi, menurut teorema Rolle, ada bilangan c di (a, b) yang memenuhi $p'(c) = 0$. Tetapi

$$p'(x) = 6x^2 + 5 \geq 5, \quad \text{untuk semua } x,$$

dan $p'(c)$ tidak mungkin 0. Asumsi bahwa p memiliki lebih dari satu akar real telah menimbulkan kontradiksi. Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa p hanya memiliki satu akar real. Kita selesaikan masalah ini menggunakan Geogebra sebagai berikut:



Kita sekarang siap untuk memberikan bukti teorema nilai rata-rata.

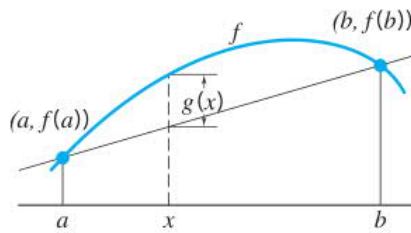
BUKTI TEOREMA NILAI RATA-RATA Kita mengkonstruksi fungsi g yang memenuhi kondisi teorema Rolle dan sangat terkait dengan f sehingga kesimpulan $g'(c) = 0$ mengarah ke kesimpulan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fungsinya adalah

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right].$$

Tampilan geometrik $g(x)$ diberikan pada Gambar 7.7.3.



Gambar 7.7.3: Tampilan geometrik $g(x)$

Garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ memiliki persamaan

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

[Ini tidak sulit untuk diverifikasi. Kemiringannya benar, dan, pada $x = a, y = f(a)$]. Selisihnya

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right]$$

hanyalah pemisahan vertikal antara grafik f dan garis yang ditampilkan dalam Gambar 7.7.3.

Jika f terdiferensial pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$, maka begitu juga g . Seperti yang dapat kita periksa, $g(a)$ dan $g(b)$ keduanya 0. Oleh karena itu, dengan teorema Rolle, setidaknya ada satu bilangan c di (a, b) yang memenuhi $g'(c) = 0$. Karena

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

kita mempunyai

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Karena $g'(c) = 0$, maka

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacksquare$$

Contoh 2

Fungsi $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $-1 \leq x \leq 1$, memenuhi kondisi teorema nilai rata-rata: terdiferensial pada $(-1, 1)$ dan kontinu pada $[-1, 1]$. Jadi, kita tahu bahwa terdapat bilangan c antara -1 dan 1 di mana

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

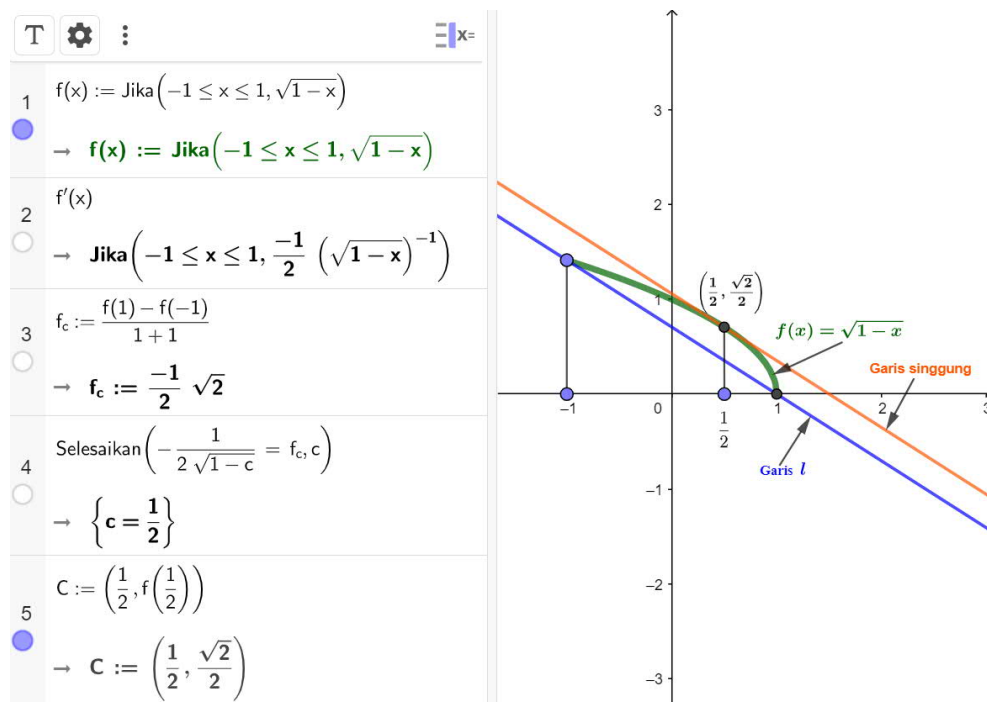
Apa c dalam kasus ini? Untuk menjawabnya, kita bedakan f . Dengan aturan rantai,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Kondisi $f'(c) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ memberikan

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-c}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Selesaikan persamaan ini untuk c dan kita akan menemukan bahwa $c = \frac{1}{2}$. Garis singgung di $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ sejajar dengan garis potong yang melalui titik-titik ujung grafik. Kita melakukan permasalahan ini dengan Geogebra sebagai berikut:



7.8 Differensial Kurva Impisit [9]

Misalkan kita ingat bahwa $\sqrt[3]{x}$ dapat diturunkan untuk semua $x \neq 0$, tetapi kita tidak ingat apa turunannya. Inilah cara cerdas kita bisa mengerjakan turunannya. Kita mulai dengan fakta bahwa, menurut definisi $\sqrt[3]{x}$ adalah bilangan yang pangkat tiganya adalah x :

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Sekarang ambil turunan terhadap x dari kedua sisi persamaan ini, menggunakan aturan rantai di sebelah kiri:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})^3 &= \frac{d}{dx}x \\ 3(\sqrt[3]{x})^2 \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} &= 1 \end{aligned}$$

(Perhatikan bahwa kita perlu mengetahui bahwa $\sqrt[3]{x}$ dapat diturunkan untuk membenarkan penggunaan aturan rantai di sini. Oleh karena itu, persamaan ini benar untuk semua $x \neq 0$, tetapi tidak untuk $x = 0$.) Kita sekarang dapat menyelesaikan persamaan ini untuk $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}$:

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

Mari kita lihat seperti apa perhitungan ini jika kita memisalkan $y = \sqrt[3]{x}$. Di sebelah kiri di bawah kita telah mereproduksi langkah-langkah dalam perhitungan di atas, dan di sebelah kanan kita telah menulis ulang setiap langkah, menggantikan y untuk $\sqrt[3]{x}$:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[3]{x})^3 &= x, & y^3 &= x, \\
 \frac{d}{dx}((\sqrt[3]{x})^3) &= \frac{d}{dx}(x), & \frac{d}{dx}(y^3) &= \frac{d}{dx}(x), \\
 3(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) &= 1, & 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} &= 1, \\
 \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x}) &= \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}. & \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.
 \end{aligned}$$

Satu langkah di sebelah kanan mungkin terlihat aneh bagi kita: Mengapa $\frac{d}{dx}y^3$ ditulis ulang menjadi $3y^2 \frac{d}{dx}y$ bukan hanya $3y^2$? Alasannya adalah bahwa y adalah ungkapan dari $\sqrt[3]{x}$ dan, seperti yang ditunjukkan oleh langkah di sebelah kiri, untuk menemukan turunan dari x kita perlu menggunakan aturan rantai.

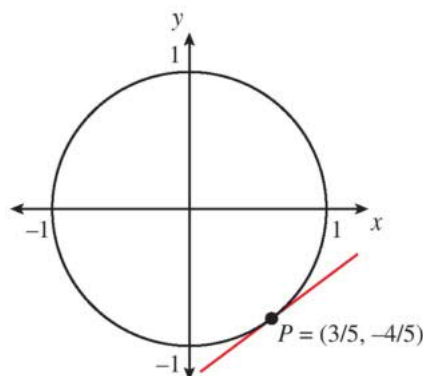
Pembahasan di sini adalah bahwa secara umum ada perbedaan antara $\frac{d}{dx}f(x)$ dan $\frac{d}{dx}f(y)$. Tentu saja,

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$$

Tetapi $\frac{d}{dx}f(y)$ hanya masuk akal dalam konteks di mana y adalah ungkapan dari beberapa $g(x)$, dan dalam hal ini kita harus menggunakan aturan rantai untuk menghitung turunannya:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}f(g(x)) &= f'(g(x)) \frac{d}{dx}g(x), & \text{jadi} \\
 \frac{d}{dx}f(y) &= f'(y) \frac{d}{dx}y
 \end{aligned}$$

Berikut adalah contoh lain dari metode menemukan turunan ini. Lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$ melalui titik $P = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Berapakah persamaan garis singgung lingkaran di titik P ? Lingkaran satuan dan garis singgung di P ditunjukkan pada Gambar 7.8.1.



Gambar 7.8.1: Lingkaran satuan (hitam) dan garis singgung lingkaran di $P = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ (merah).

Salah satu cara untuk menjawab pertanyaan ini adalah dengan menyelesaikan y dalam persamaan lingkaran:

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 1 - x^2 \\
 y &= \pm \sqrt{1 - x^2}.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, lingkaran satuan dapat dianggap terdiri dari grafik dua fungsi,

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{dan} \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}. \quad (7.8.1)$$

Grafik f_1 adalah bagian atas lingkaran, dan grafik f_2 adalah bagian bawah. Kedua fungsi memiliki domain $[-1, 1]$, dan keduanya terdiferensiasi pada interval $(-1, 1)$.

Titik P berada di bagian bawah lingkaran, sehingga kita dapat mencari kemiringan garis singgung dengan menghitung $f_2'(\frac{3}{5})$, menggunakan rumus untuk $f_2(x)$ pada (7.8.1).

Tapi ada cara yang lebih mudah. Jika kita biarkan $y = f_2(x)$, maka ada cara untuk mencari $\frac{dy}{dx} = f_2'(x)$ tanpa harus menggunakan rumus untuk $f_2(x)$. Untuk setiap $x \in (-1, 1)$, titik (x, y) berada di bagian bawah lingkaran satuan, dan karena itu memenuhi persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Sekarang kita dapat menemukan $\frac{dy}{dx}$ dengan mendiferensiasikan kedua ruas persamaan ini:

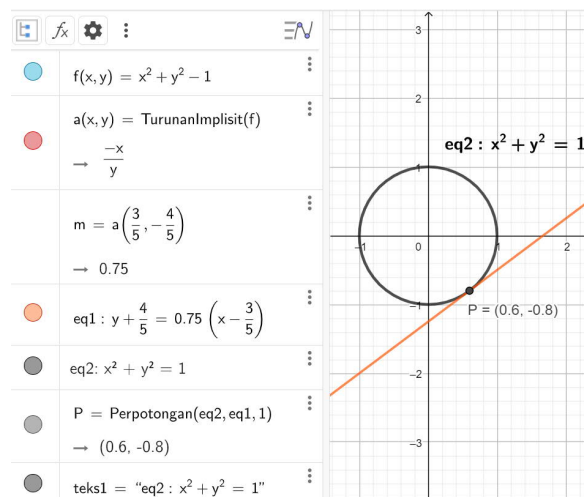
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $f_2'(x) = \frac{x}{f_2(x)}$. Jadi, kemiringan garis singgung lingkaran di P adalah:

$$f_2'\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(x,y)=(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})} = -\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}. \quad (7.8.2)$$

Oleh karena itu persamaan garis singgungnya adalah $y + \frac{4}{5} = \left(\frac{3}{4}\right)(x - \frac{3}{5})$, atau $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

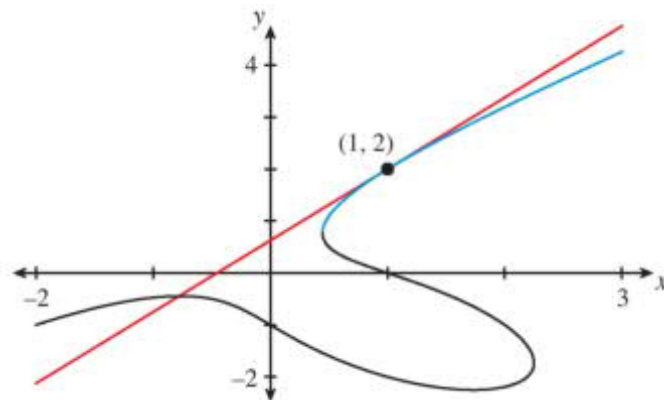
Fungsi f_1 dan f_2 didefinisikan secara eksplisit dalam (7.8.1). Kita mengatakan bahwa fungsi-fungsi ini didefinisikan secara implisit oleh persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Metode yang kita gunakan untuk menemukan $\frac{dy}{dx} = f_2'(x)$, di mana kita membedakan kedua sisi persamaan ini daripada menggunakan rumus eksplisit untuk $f_2(x)$, oleh karena itu disebut diferensial implisit. Kita mengerjakan apa yang kita bahas ini dalam Geogebra sebagai berikut:



Mari kita berikan satu lagi contoh diferensial implisit. Perhatikan grafik persamaan berbentuk

$$y^3 - 4xy = x^3 - 1, \quad (7.8.3)$$

yang merupakan kurva yang ditunjukkan pada Gambar 7.8.2 (sebagian berwarna hitam dan sebagian berwarna biru). Sangat mudah untuk memverifikasi bahwa kurva ini melewati titik (1,2). Kita akan menemukan persamaan garis singgung kurva pada titik ini (ditunjukkan dengan warna merah pada Gambar 7.8.2).



Gambar 7.8.2: Grafik $y^3 - 4xy = x^3 - 1$ (hitam dan biru) dan garis singgung kurva ini di (1,2) (merah).

Salah satu cara untuk melanjutkan adalah dengan menyelesaikan y dalam persamaan (7.8.3) untuk menemukan rumus bagi $f(x)$. Tetapi persamaan ini sangat sulit untuk dipecahkan, dan rumus untuk $f(x)$ akan sangat rumit. Ide yang lebih baik adalah menggunakan fakta bahwa jika $y = f(x)$, maka x dan y memenuhi persamaan (7.8.3). Oleh karena itu, kita dapat menggunakan diferensial implisit untuk menemukan $f'(x) = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} y^3 - 4xy &= x^3 - 1 \\ \frac{d}{dx}(y^3 - 4xy) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ 3y^2 \frac{dy}{dx} - 4y - 4x \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ (3y^2 - 4x) \frac{dy}{dx} - 4y &= 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2 + 4y}{3y^2 - 4x} \end{aligned}$$

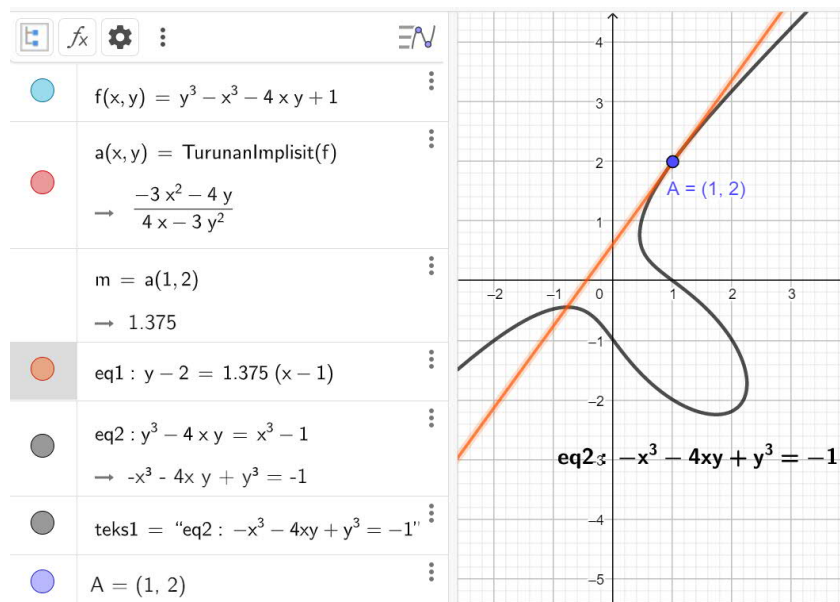
Oleh karena itu kemiringan garis singgung adalah

$$f'(1) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{11}{8},$$

dan persamaan garis singgungnya adalah $y - 2 = \frac{11}{8}(x - 1)$, atau

$$y = \frac{11}{8}x + \frac{5}{8}.$$

Kita mengerjakan apa yang dibahas ini dalam Geogebra sebagai berikut:



7.9 Kurva Parametrik dan Koordinat Kutub

Pada Bagian ini dibahas grafik dari kurva parameter dan koordinat kutub. Kita berikan definisi persamaan parameter. Pembaca dipersilahkan untuk melihat lagi pembahasan tentang Parametrik 2D dan 3D.

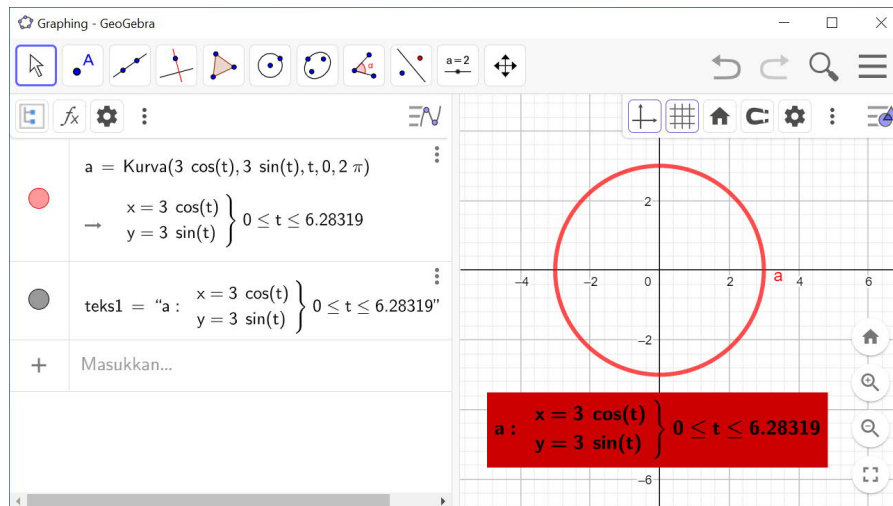
Bila x dan y adalah fungsi kontinu dari t pada interval I , maka persamaan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dinamakan persamaan parametrik dan t dinamakan parameter. Himpunan semua titik (x, y) yang diperoleh dari t sebagai bervariasi dalam interval I disebut grafik persamaan parametrik. Grafik persamaan parametrik disebut kurva parametrik atau kurva bidang.

Contoh 1

Persamaan $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$ adalah persamaan lingkaran pusat di $(0,0)$ dan jari-jari sama dengan 2. Hal ini bisa kita tunjukkan sebagai berikut:

$$x^2 + y^2 = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t = 2^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2^2.$$

Kurva parameter $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$ grafiknya diberikan sebagai berikut:

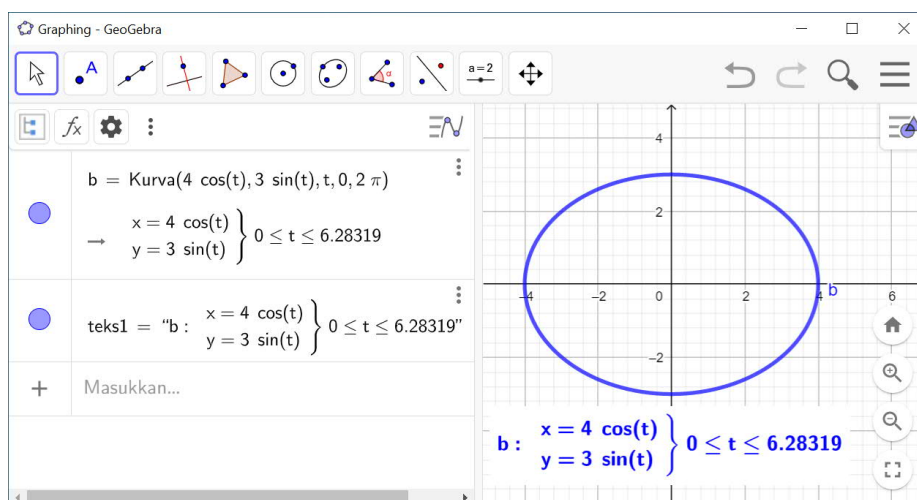


Contoh 2

Persamaan $\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$ adalah persamaan ellip pusat di (0,0). Hal ini bisa kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Kurva parameter $\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{cases}$, untuk $0 \leq t \leq 2\pi$ grafiknya diberikan sebagai berikut:

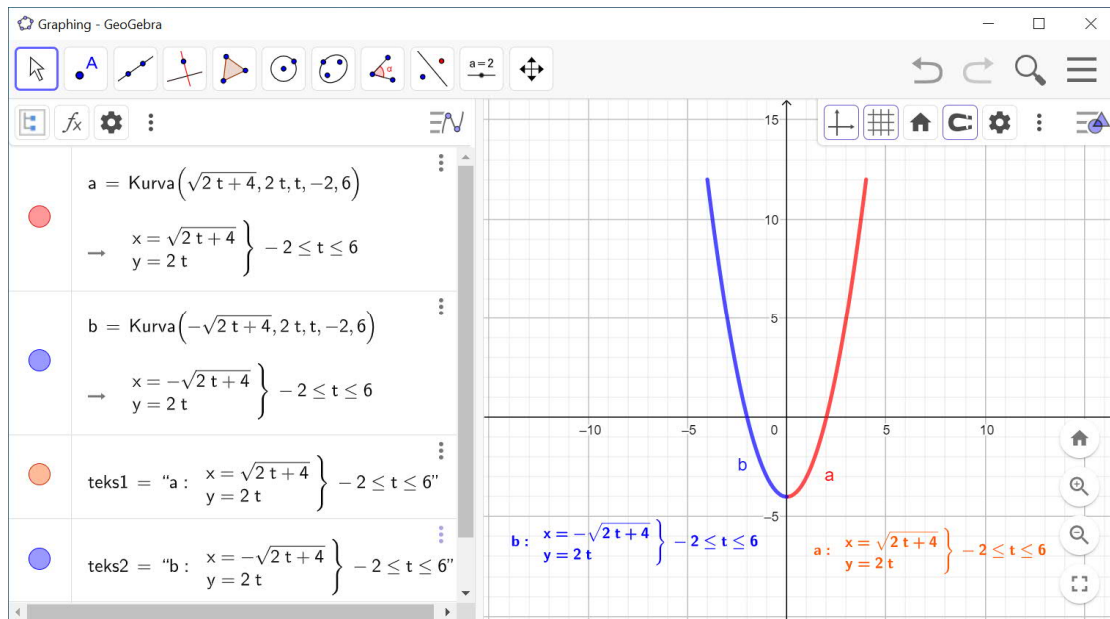


Contoh 3

Dua persamaan parametrik

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2t+4} \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} x(t) = -\sqrt{2t+4} \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad \text{untuk} \quad -2 \leq t \leq 6$$

grafiknya adalah parabola sebagaimana diberikan oleh gambar berikut:



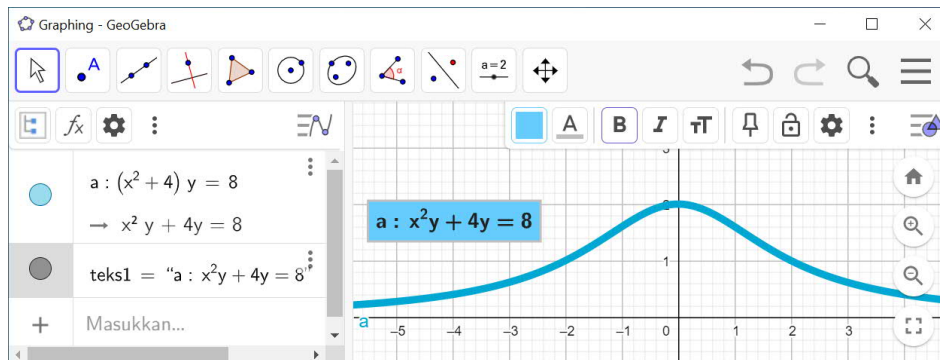
Silahkan pembaca mencoba menuliskan persamaan parabolanya!

Contoh 3

Tentukan persamaan parametrik dari persamaan $(x^2 + 4)y = 8$. Gambar masing-masing kedua kurva dan bandingkan hasilnya!

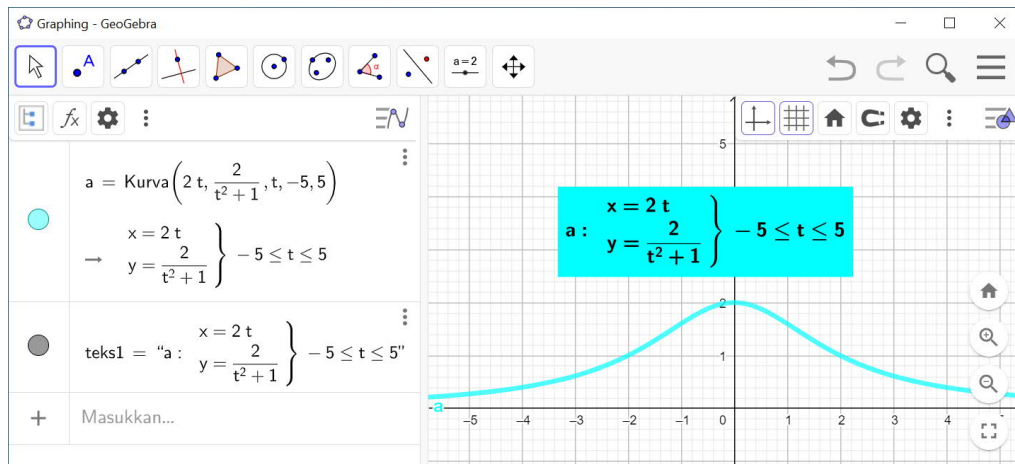
Jawab

Pertama kita gambar kurva dari $(x^2 + 4)y = 8$ sebagai berikut:



Bentuk persamaan parametrik dari $(x^2 + 4)y = 8$ adalah $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{2}{t^2+1} \end{cases}$ untuk $-5 \leq t \leq 5$.

Pembaca dipersilahkan untuk membuktikannya. Grafik dari kurva parametrik tsb. Diberikan oleh gambar berikut:



Turunan dari persamaan parametrik $x(t), y(t)$ diberikan oleh $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ dengan $x'(t) \neq 0$.

Contoh 4

Dari Contoh 3, kita tahu bentuk persamaan parametrik dari $(x^2 + 4)y = 8$ adalah

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{2}{t^2+1} \end{cases} \quad \text{untuk } -5 \leq t \leq 5.$$

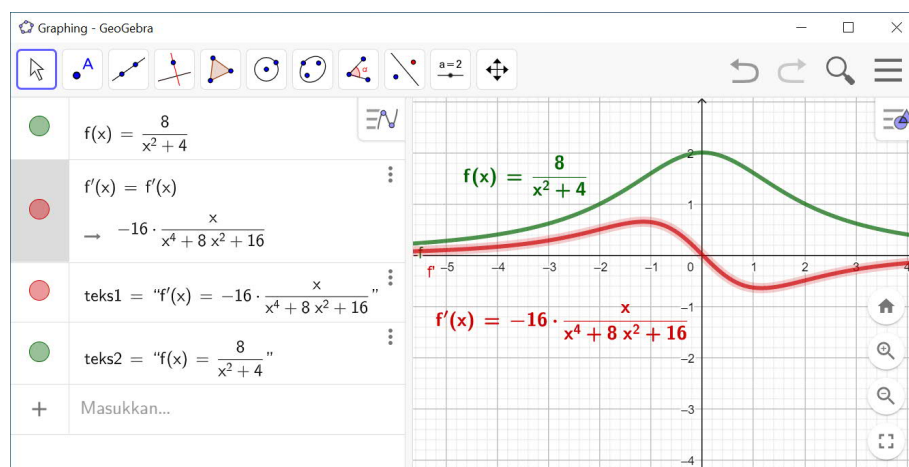
Maka tunjukkan bahwa $y'(x)$ dari $y = \frac{8}{x^2+4}$ sama dengan $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}$ untuk $-5 \leq t \leq 5$.

Jawab

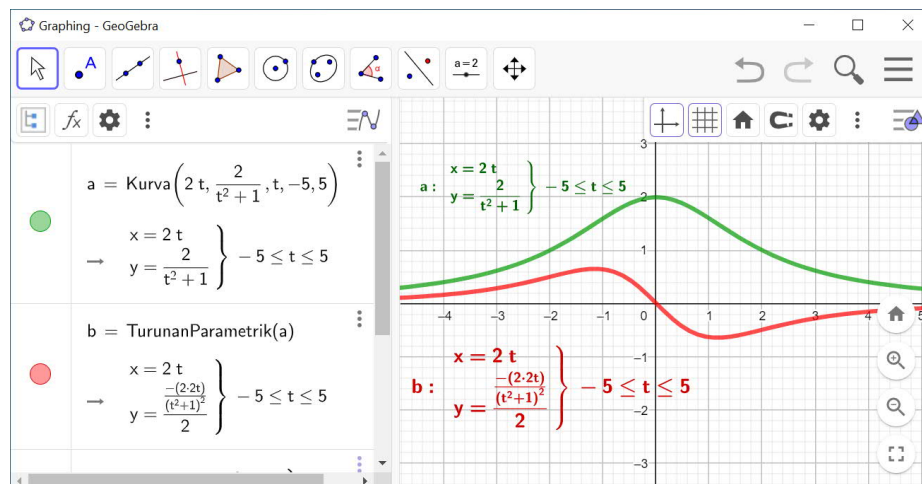
Kita tunjukkan hal ini menggunakan grafik, pertama kita tentukan grafik turunan $y'(x)$ dari $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Berikutnya kita tunjukkan grafik dari kurva parametrik $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}$ untuk $-5 \leq t \leq 5$

bentuknya sama dengan grafik dari $y'(x)$ sebagai berikut:



Selanjutnya kita gambar grafik dari kurva parametrik $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}$ untuk $-5 \leq t \leq 5$ sebagai berikut:



Pembaca dipersilahkan membuktikan persamaan $y'(x)$ dengan persamaan parametrik $x(t) = 2t$ dan $y(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ adalah sama.

Contoh 5

Tentukan garis singgung pada kurva parametrik $x(t) = t^2$ dan $y(t) = t^3 - 12t$ pada titik $(1, -11)$.

Jawab

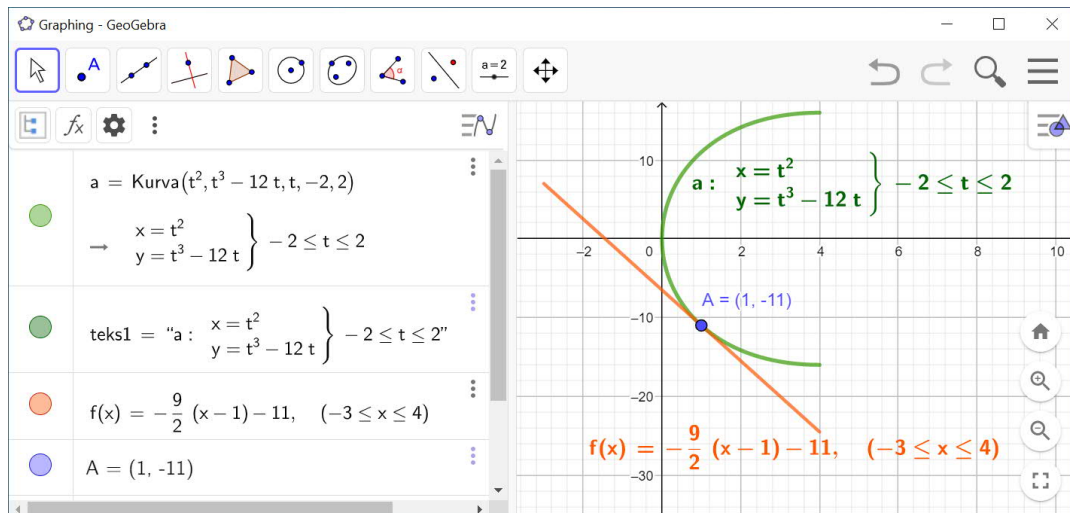
Dari $(x, y) = (1, -11)$ didapat $1 = t^2$ dan $-11 = t^3 - 12t$, sehingga $-11 = -11t$. Jadi $t = 1$. Dengan demikian gradien garis singgung di $(1, -11)$ adalah:

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{y'(t)}{x'(t)} \right|_{t=1} = \left. \frac{3t^2 - 12}{2t} \right|_{t=1} = \frac{3 - 12}{2} = \frac{-9}{2}.$$

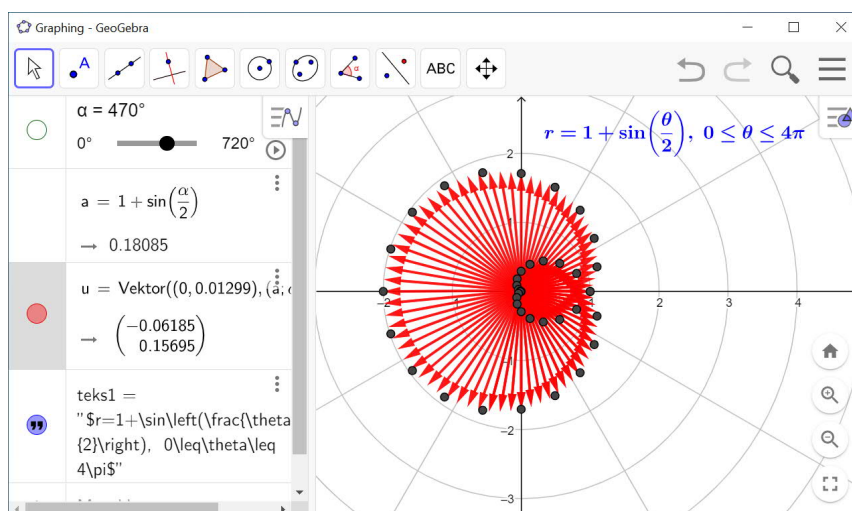
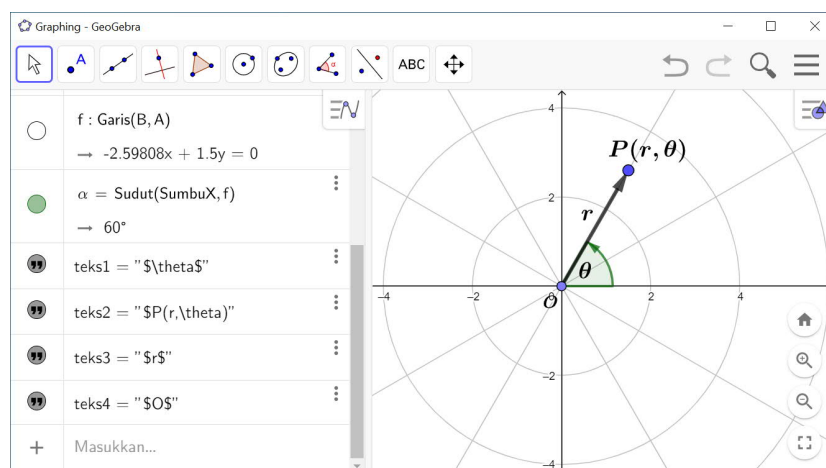
Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y - (-11) = \frac{-9}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-9}{2}(x - 1) - 11.$$

Kita selidiki hasil ini secara grafik dalam Geogebra sebagai berikut:



Pada pembahasan berikutnya, kita membahas grafik yang disajikan dalam koordinat kutub. Untuk koordinat kutub kita ambil titik asal (atau kutub) O , dan garis awal tetap OA . Selanjutnya, suatu titik P dijelaskan dengan menentukan jarak r , jarak O ke P sepanjang arah jari-jari, dan sudut yang harus kita putar dari garis awal untuk melihat sepanjang arah jari-jari. Titik tersebut dalam hal ini memiliki koordinat kutub (r, θ) sebagaimana gambar-gambar berikut:

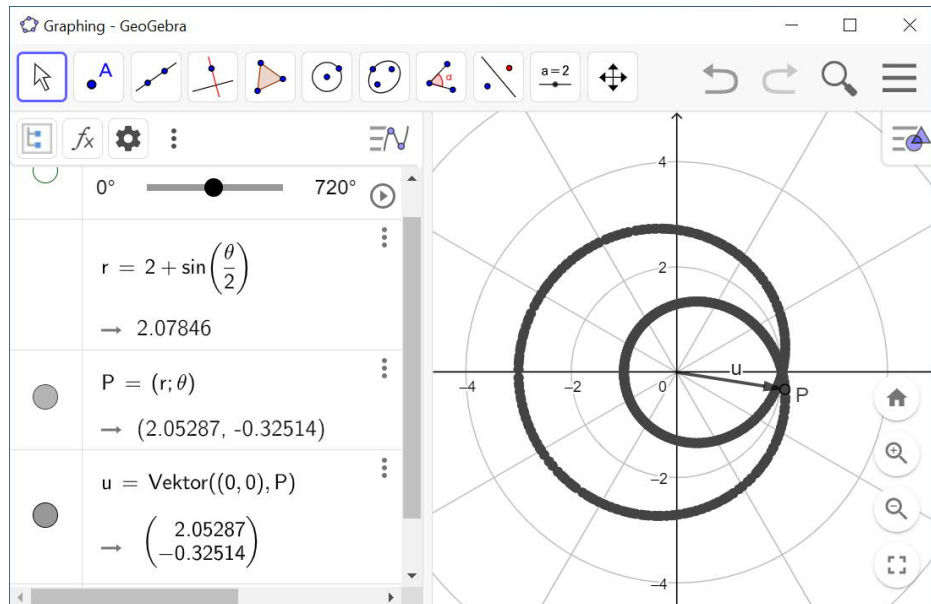


Contoh 6

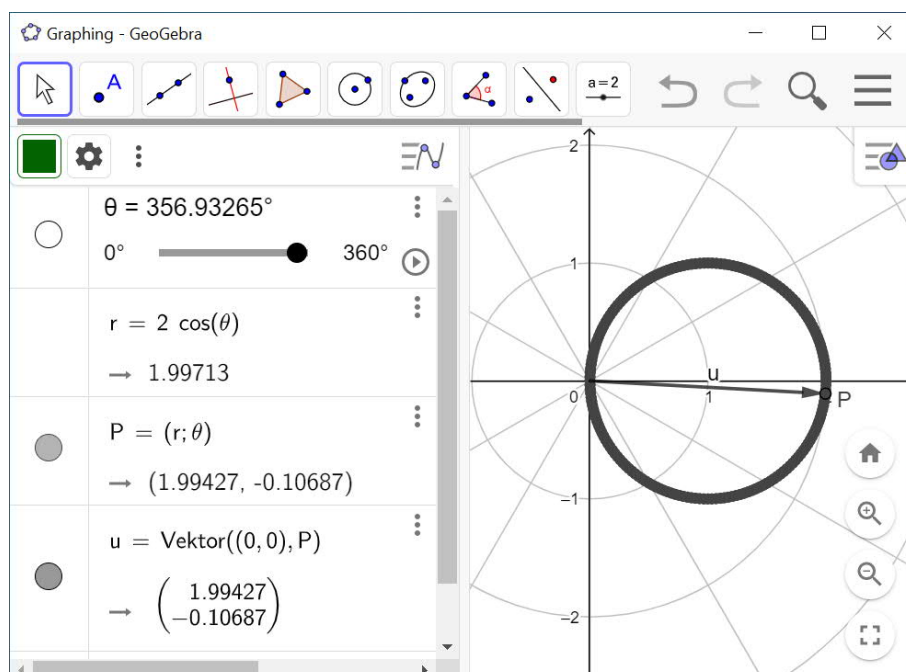
Dalam koordinat kutub buat suatu grafik kurva dari himpunan semua titik (r, θ) yang diberikan oleh persamaan $r = 2 + \sin \frac{\theta}{2}$, untuk $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

Jawab

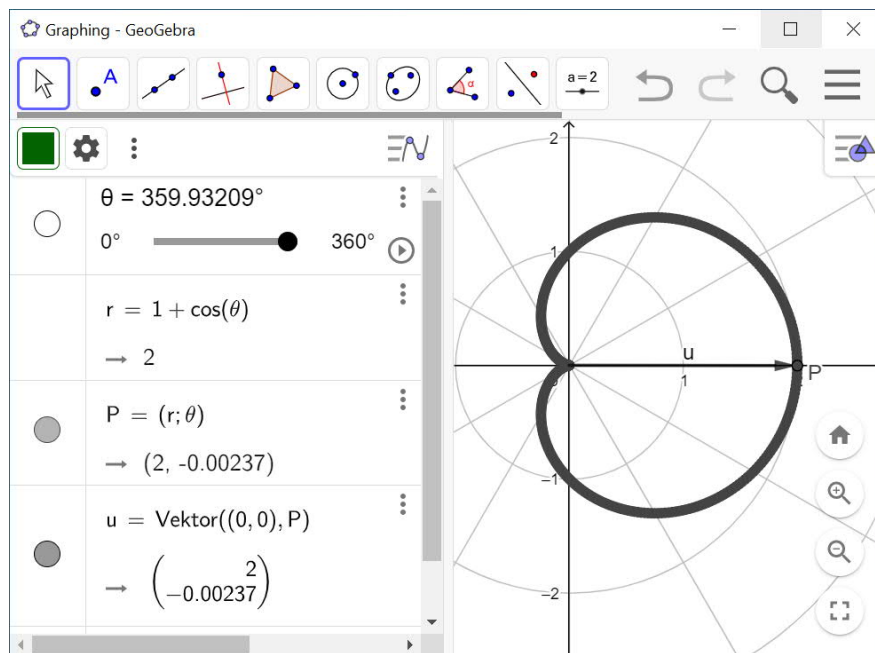
Dalam Geogebra buat slider θ dengan $0 \leq \theta \leq 4\pi$. Selanjutnya buat $P = (r; \theta)$, perhatikan pada P ada titik koma (;) bukan koma (,). Berikutnya buat vektor u dengan perintah: $u = \text{Vektor}((0,0), P)$. Hasil gambar grafiknya berupa animasi dengan mengaktifkan slider θ . Hasil gambar grafik sebagai berikut:



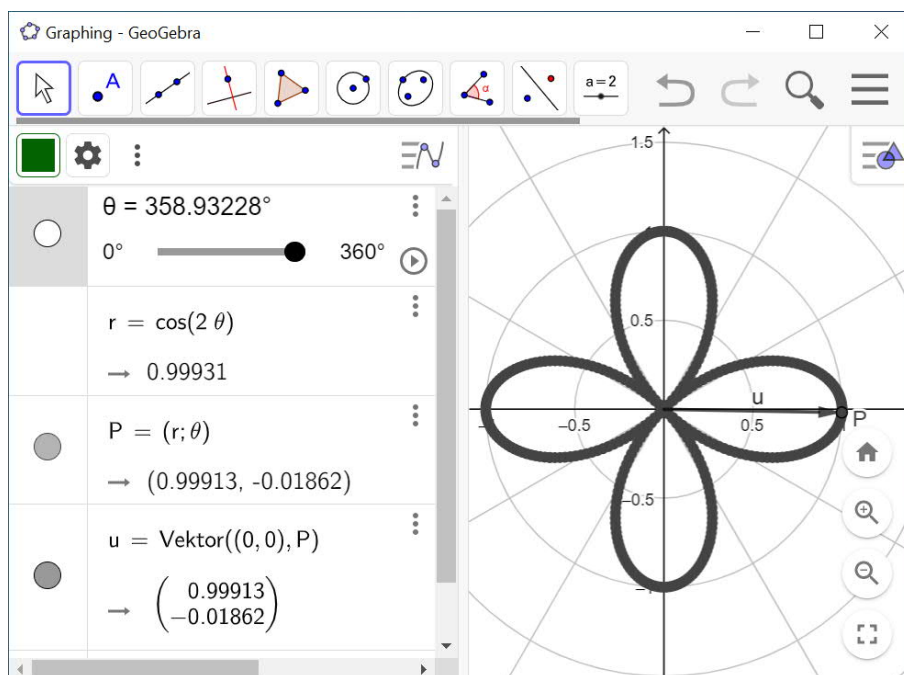
Berikut ini gambar grafik suatu lingkaran dalam koordinat kutub:



Berikut ini gambar grafik suatu kardioida dalam koordinat kutub:



Berikut ini gambar grafik suatu 4-daun bunga mawar dalam koordinat kutub:



Kita akhiri pembahasan Koordinat Kutub. Pembaca dipersilahkan mencoba beberapa kurva lain yang telah dikenalnya dalam koordinat kutub.

7.10 Penggunaan Turunan pada metode Newton-Rapshon

Metode Newton adalah teknik untuk mendekati akar persamaan bentuk $f(x) = 0$. Yang diperlukan adalah perkiraan awal untuk akar, yang disebut x_1 , dan formula berulang:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0, \quad (1)$$

$x_1, x_2, x_3, \dots$ diharapkan konvergen ke akar yang diinginkan.

Persamaan (1) diturunakn dari persamaan garis melauai titik $(x_0, f(x_0))$ dengan gradien $m = f'(x_0)$ yaitu

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Garis pada Persamaan (2) memotong sumbu- x sehigga didapat:

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (3)$$

Sebelum mengakhiri pembahasan Metoda Newton-Raphson, kita ingatkan lagi beberapa hal. Diberikan suatu fungsi f yang kontinu differensiabel di $[a, b]$ dan $x_f \in [a, b]$ dengan $f(x_f) = 0$ dan $x_0 \in [a, b]$. Beberapa hal kita diskusikan melalui pertanyaan berikut:

1. Apakah nilai awal sebarang $x_0 \in [a, b]$ menjamin bahwa untuk beberapa $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ menjamin bahwa $x_n \rightarrow x_f$?
2. Apakah selalu bila nilai awal x_0 cukup dekat dengan x_f , maka dijamin $x_n \rightarrow x_f$ untuk beberapa $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$?
3. Tetapi sebaliknya bila x_0 semakin jauh dengan x_f , maka tidak mungkin $x_n \rightarrow x_f$ untuk suatu $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.
4. Untuk menjawab hal ini lihat di website: <https://www.geogebra.org/m/pefb23xn>, disini pembhasan ditulis menggunakan perangkat lunak GeoGebra Klasik versi : 6.0.593.0-offline (07 Juli 2020).

Untuk menjawab hal ini lihat di website: <https://www.geogebra.org/m/k77mzwth>, disini pembahasan ditulis menggunakan perangkat lunak GeoGebra Klasik versi : 6.0.646.0-offline (04 Juni 2021).

7.11 Integral dan beberapa Penggunaannya

Pada bagian ini dibahas integral dalam Geogebra. Perintah Integral(<Fungsi>,<Variabel>) memberikan integral tak tentu (atau antiderivatif) dari f terhadap x . Berikut contohnya:

	$f(x) = x^2 + 2x - 1$	
	$g(x) = \text{Integral}(f, x)$	
	$\rightarrow \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$	

Hal ini memperlihatkan bahwa $\int (x^2 + 2x - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + c$.

1 Hitung integral : $\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Jawab:

●	$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$
●	$g(x) = \text{Integral}(f, x)$
	$\rightarrow 4 \left(\frac{1}{3} \sqrt{x+1} (x+1) - \sqrt{x+1} \right)$

Hal ini memperlihatkan bahwa $\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}} dx = 4(\sqrt{x+1}(x-1) - \sqrt{x+1}) + c$.

2. Hitung integral : $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$.

Jawab:

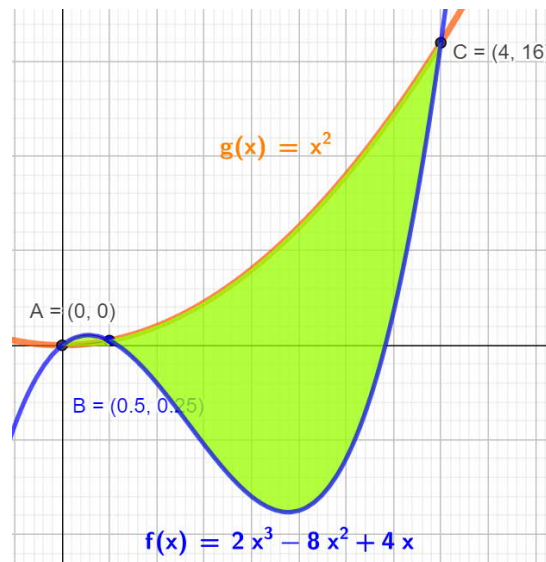
●	$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$
●	$g(x) = \text{Integral}(f, x)$
	$\rightarrow 2 \left(\frac{1}{\tan(\frac{1}{2} x) + 1} + \frac{1}{2} x \right)$

Jadi $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = 2 \left(\frac{1}{\tan(\frac{1}{2} x) + 1} + \frac{1}{2} x \right) + c$.

3. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2$

Jawab

Pertama ditentukan dulu titik potong kedua kurva $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2$ dengan menggunakan grafik dalam Geogebra sebagai berikut:



Terlihat grafik $f(x)$ dan $g(x)$ berpotongan di $x(A) = 0, x(B) = 0,5$ dan $x(C) = 4$. Luas yang daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2$ adalah daerah yang berwarna hijau dan luas dihitung menggunakan Geogebra sebagai berikut:

	$a = \text{IntegralDiantata}(f, g, x(A), x(B))$ $\rightarrow 0.15625$
	$b = \text{IntegralDiantata}(g, f, x(B), x(C))$ $\rightarrow 32.15625$
	$c = a + b$ $\rightarrow 32.3125$

Terlihat luasnya adalah 32,3125 satuan luas. Pembaca dipersilahkan menghitung luas ini menggunakan :

$$\text{Luas} = \int_{x(A)}^{x(B)} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x(B)}^{x(C)} (g(x) - f(x)) dx.$$

Melalui fasilitas CAS, Geogebra juga mampu menghasilkan komputasi simbolik untuk menghitung integral. Berikut ini contoh-contohnya:

1. Hitung $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$
2. Hitung $\int e^{ax} \sin(bx) dx$
3. Hitung $\int \sin x^2 dx$

Hasilnya adalah sebagai berikut:

1	$\text{Integral}\left(\frac{1}{1+\sin(x)^2}, -\pi, \pi\right)$ $\rightarrow \pi \sqrt{2}$
2	$\text{Integral}(e^{a \cdot x} \cdot \sin(b \cdot x), x)$ $\rightarrow e^{ax} \left(a \frac{\sin(bx)}{a^2 + b^2} - b \frac{\cos(bx)}{a^2 + b^2} \right) + c_1$
3	$\text{Integral}(\sin(x^2), x)$ $\rightarrow \frac{-1}{2+2i} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\text{erf}\left(\frac{-1+i}{2} \sqrt{2} x\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2-2i} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\text{erf}\left(\frac{-1-i}{2} \sqrt{2} x\right)}{\sqrt{2}} + c_2$

Terlihat bahwa

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = \pi\sqrt{2},$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \left(a \frac{\sin(bx)}{a^2 + b^2} - b \frac{\cos(bx)}{a^2 + b^2} \right) + c_1,$$

dan

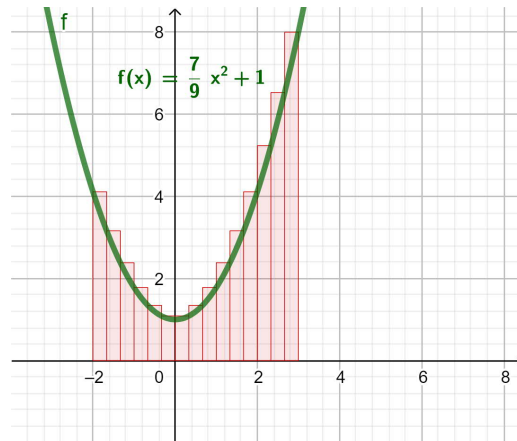
$$\int \sin x^2 dx = \frac{-1}{2+2i} \sqrt{\pi} \frac{\text{erf}\left(\frac{-1+i}{2} \sqrt{2} x\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2-2i} \sqrt{\pi} \frac{\text{erf}\left(\frac{-1-i}{2} \sqrt{2} x\right)}{\sqrt{2}} + c_2.$$

7.12. Jumlahan Reimann Atas/Bawah

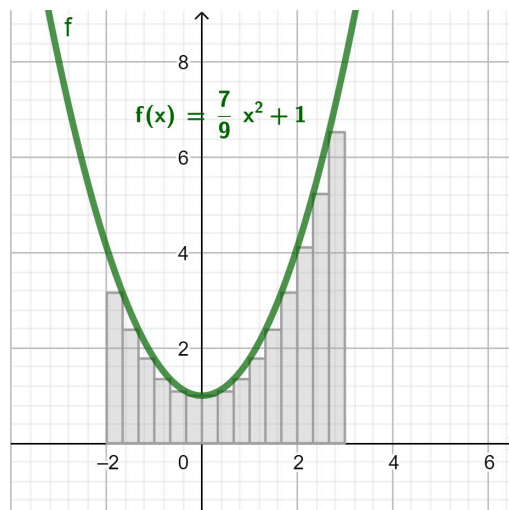
Fungsi Reimann Atas menampilkan perkiraan jumlah Riemann sisi atas/bawah Fungsi $f(x)$ menampilkan perkiraan jumlah Riemann sisi atas/bawah $\int_a^b f(x) dx$ menggunakan sebanyak n partisi interval:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \Delta x (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

Berikut ini fungsi Reimann kanan dalam Geogebra: **JumlahAtas(f(x),a,b,n)** atau **JumlahBawah(f(x),a,b,n)**.



Jumlahan Reimann atas dari $f(x) = \frac{7}{9}x^2 + 1$



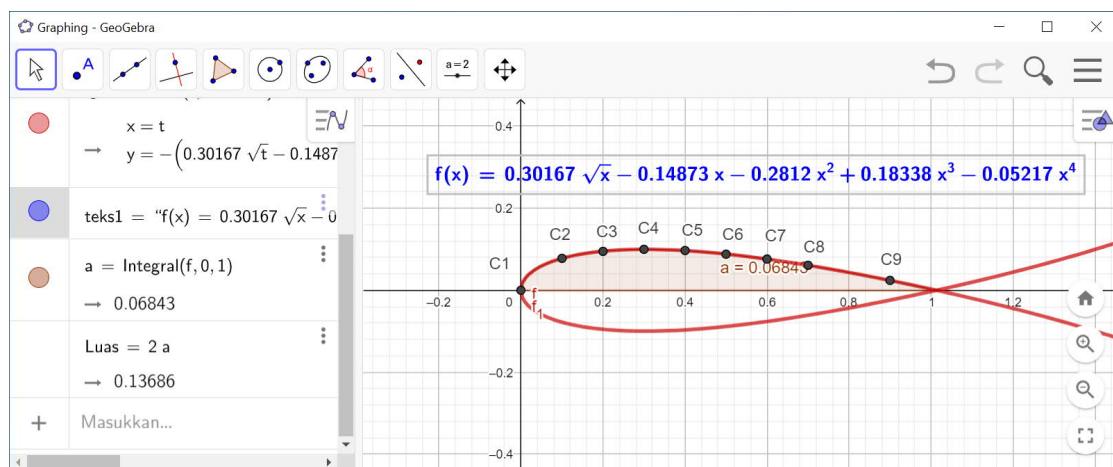
Jumlahan Reimann bawah dari $f(x) = \frac{7}{9}x^2 + 1$

Kita hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = \frac{7}{9}x^2 + 1$ dan sumbu- x untuk nilai $x = -2$ sampai dengan $x = 3$ dengan menggunakan Jumlahan Reimann Bawah dan Atas dengan $n = 9000$. Sebagai berikut:

☐	$b = \text{JumlahBawah}(f, -2, 3, 9000)$ → 14.07127
☐	$a = \text{JumlahAtas}(f, -2, 3, 9000)$ → 14.07688

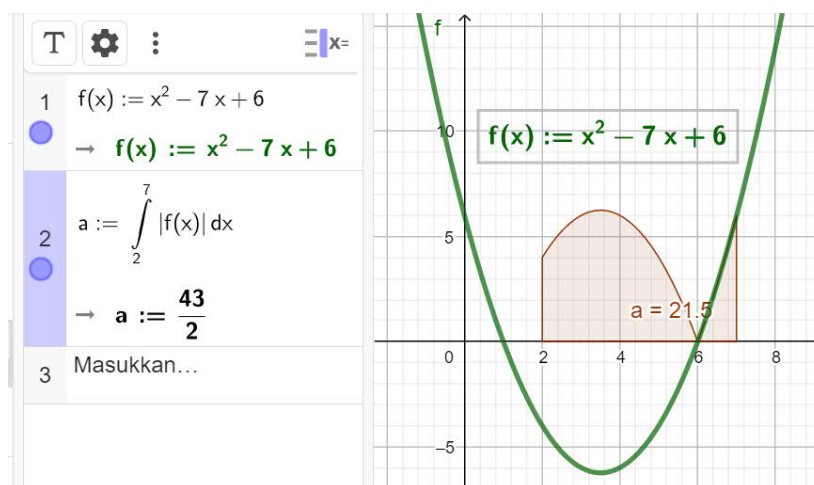
Terlihat untuk hasil Jumlahan Reimann Bawah dan Atas untuk $n = 9000$ nilainya hampir sama. Untuk dua digit desimal nilai keduanya adalah 14,07. Jadi $\int_{-2}^3 \left(\frac{7}{9}x^2 + 1\right) dx \approx 14,07$.

Kembali pada pembahasan sayap pesawat. Kita hitung luas penampang pesawat sebagai berikut:



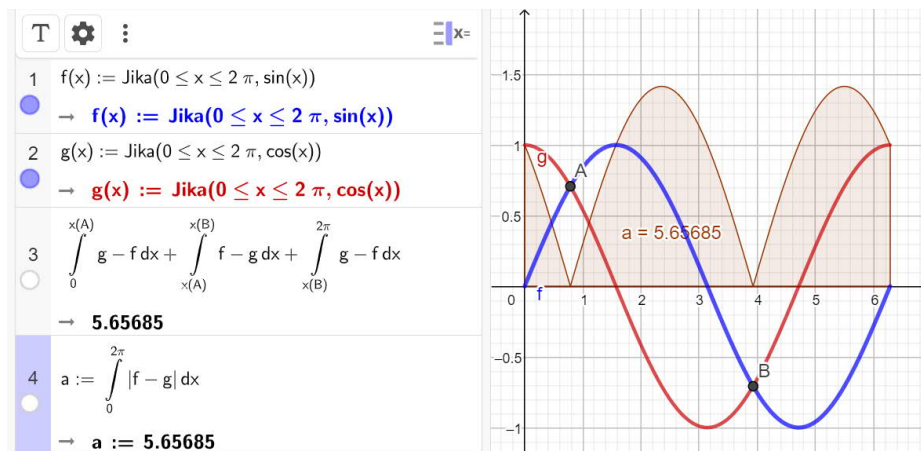
Terlihat, hasil perhitungan Luas penampang sayap pesawat adalah 0,13686 satuan luas.

Contoh berikut menghitung luas dataran yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 7x + 6$ dan sumbu- x dari $x = 2$ sampai dengan $x = 7$. Karena nilai dari y bisa positif dan negatif pada interval $[2, 7]$, maka luas dataran yang diinginkan adalah $\int_2^7 |x^2 - 7x + 6| dx$. Hasil ini kita hitung menggunakan Geogebra sebagai berikut:



Terlihat hasil nilai luasnya adalah $\frac{43}{2}$ satuan luas.

Contoh berikut menghitung luas dataran yang dibatasi oleh kurva $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ dari $x = 0$ sampai dengan $x = 2\pi$. Nilai dari luas dataran yang diinginkan adalah $\int_0^{2\pi} |f - g| dx$. Hasil ini kita hitung menggunakan Geogebra sebagai berikut:



Terlihat nilai luasnya adalah : 5,65685 satuan luas.

Berikut ini dibahas Teorema Nilai Rata-rata Integral (Mean Value Theorem of Integration), sebagai berikut:

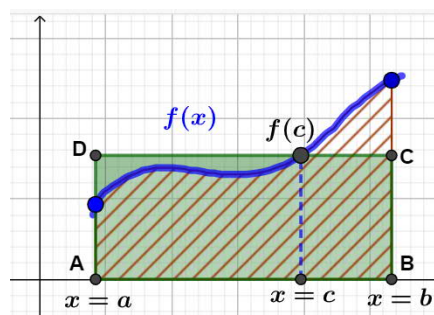
Diberikan f kontinu pada interval $[a, b]$. Ada suatu nilai $c \in (a, b)$ yang memenuhi

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

atau dalam bentuk yang ekuivalen dengan

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Pada persamaan yang terakhir ini, $f(c)$ merupakan nilai rata-rata integral dari $f(x)$. Sedangkan pada persamaan yang sebelumnya, bila $f(x) > 0$ untuk $x \in [a, b]$, mempunyai interpretasi luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$ dan sumbu- x dari $x = a$ sampai dengan $x = b$ sama dengan luas persegi panjang dengan Panjang $b - a$ dan tinggi $f(c)$. Lihat gambar berikut!



Dari gambar dan pernyataan menunjukkan bahwa: $\text{Luas ABCD} = f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$.

Selanjutnya kita membuktikan Teorema Rata-rata Tengah Integral sebagai berikut:

Kita menggunakan Teorema Nilai Rata-rata differensial yaitu $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Selanjutnya, misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, untuk $x \in [a, b]$. Karena f kontinu pada $[a, b]$, maka g kontinu pada $[a, b]$ dan terdifferensial pada (a, b) . Sehingga kita mempunyai $g'(x) = f(x)$. Kita gunakan Teorema Nilai Rata-rata Differensial pada g didapat : $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$ atau

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)dx - 0}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}. \quad \blacksquare$$

Contoh

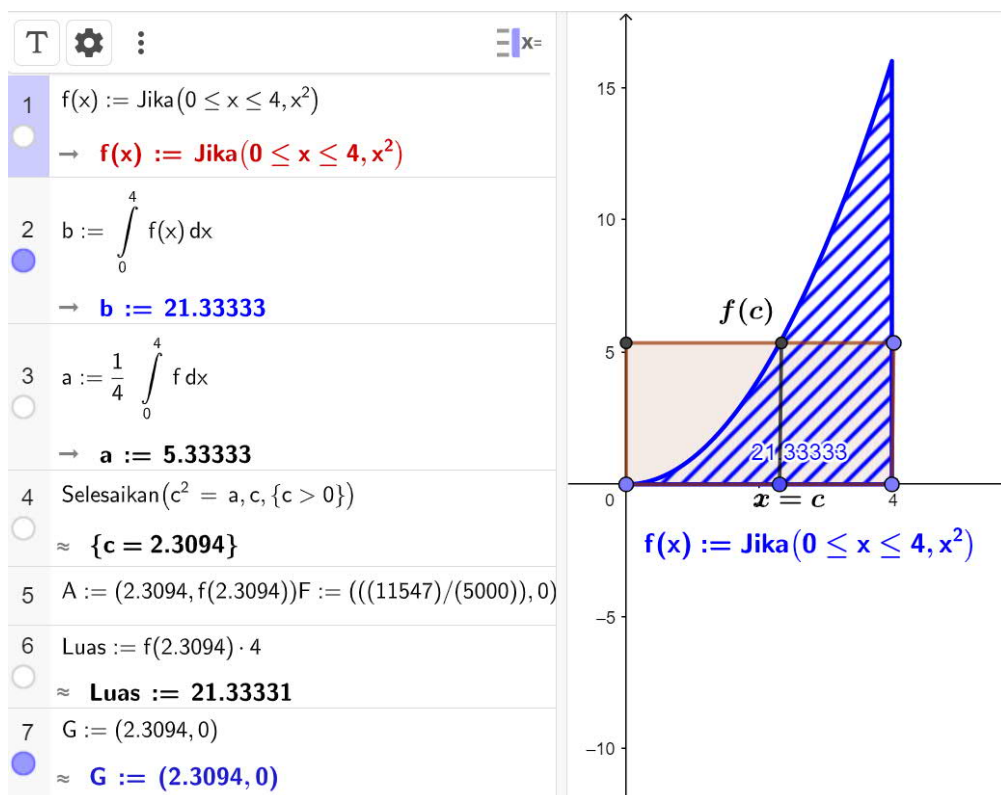
Karena

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 0) = \frac{64}{3},$$

nilai rata-rata dari f pada $[0,4]$ adalah

$$f(c) = \frac{\frac{64}{3}}{4-0} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}.$$

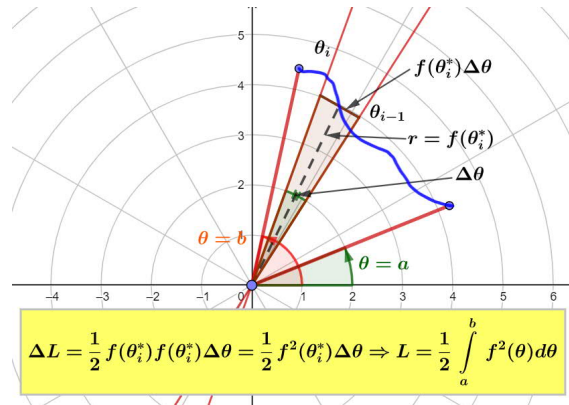
Dengan demikian $\frac{16}{3} = c^2$, jadi $c = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Secara grafik, hal ini bisa kita lakukan dalam Geogebra sebagai berikut:



Terlihat bahwa $\int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3} \approx 21,3333$ dan $c = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,3094$.

7.13. Luas Kurva dalam Koordinat kutub

Berikutnya kita membahas luas daerah pada koordinat kutub yang dibatasi oleh kurva $r = f(\theta)$ dari $\theta = a$ sampai $\theta = b$ yang diberikan oleh gambar berikut:



Contoh 1

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $r = 1$ dari $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$.

Jawab

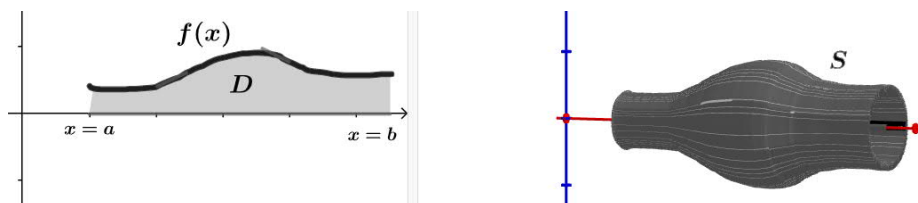
$$L = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Hasil ini sesuai dengan pengetahuan luas lingkaran adalah πr^2 , dalam hal ini $r = 1$.

7.14. Volume Benda Puta menggunakan cara cakram, cincin dan irisan [9]

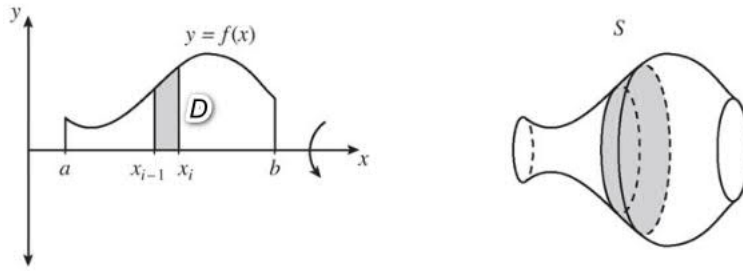
Perhatikan kembali daerah D di bawah grafik fungsi tak-negatif kontinu f pada interval $[a, b]$. Pada bagian ini kita akan tertarik untuk menghitung, bukan luas D , melainkan volume benda padat yang dihasilkan ketika daerah D diputar terhadap sumbu- x .

Untuk memvisualisasikan benda padat ini, bayangkan bahwa sumbu- x adalah kawat dan daerah D adalah selembar kertas yang menempel pada kawat. Sekarang bayangkan memutar-mutar kawat sumbu- x di antara jari-jari kita. Potongan kertas akan berputar di sekitar sumbu- x , menyapu S padat tiga dimensi, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 7.12.1. Misalkan V menunjukkan volume S . Kita ingin menghitung V .



Gambar 7.12.1: Ketika daerah R diputar terhadap sumbu- x , menghasilkan permukaan padat S

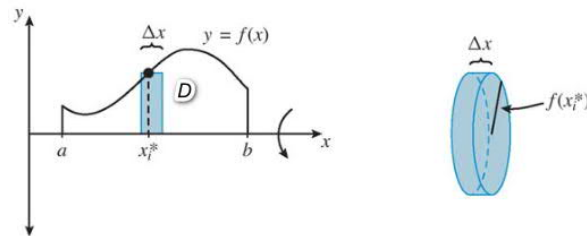
Seperti sebelumnya, kita membagi interval $[a, b]$ menjadi n bagian, masing-masing dengan lebar $\Delta x = (b - a)/n$, dengan titik-titik pembagian $x_i = a + i \Delta x$. Garis $x = x_i$ sekali lagi membagi D menjadi strip vertikal tipis, tetapi sekarang kita ingin mengetahui bagaimana setiap strip berkontribusi pada permukaan benda padat S . Gambar 7.12.2 menunjukkan strip ke- i , dan potongan solid S yang dihasilkan ketika diputar pada sumbu- x . Jika kita misalkan V_i adalah volume irisan S ini, maka



Gambar 7.12.2: Strip vertikal ke- i di D menghasilkan sepotong S .

$$V = \sum_{i=1}^n V_i.$$

Untuk mendekati V_i , kita memilih titik sampel $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, dan seperti sebelumnya kita meratakan bagian atas strip vertikal ke- i dari D untuk mendapatkan persegi panjang $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $0 \leq y \leq f(x_i^*)$. Ketika persegi panjang ini diputar terhadap sumbu- x , ini menghasilkan sebuah cakram, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 7.12.3.



Gambar 7.12.3: Perkiraan strip vertikal ke- i dengan persegi panjang, yang menghasilkan suatu cakram.

Kita akan menggunakan volume cakram ini sebagai perkiraan untuk V_i . Jari-jari cakram sama dengan tinggi persegi panjang yaitu $f(x_i^*)$ dan tingginya sama dengan lebar persegi panjang, Δx . Jadi, volume cakram adalah $\pi f(x_i^*)^2 \Delta x$. Menggunakan fakta ini sebagai perkiraan untuk V_i , dan menambahkan kontribusi dari semua irisan, kita mendapatkan

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \approx \sum_{i=1}^n \pi f(x_i^*)^2 \Delta x$$

Akhirnya, untuk mendapatkan jawaban yang tepat, kita tentukan $n \rightarrow \infty$ yang ekuivalen dengan $\Delta x \rightarrow 0$. Jumlah terakhir di atas adalah jumlah Riemann, jadi limitnya adalah integral tertentu:

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f(x_i^*)^2 \Delta x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \quad (7.12.1)$$

Dengan cara yang sama, bila diberikan suatu kurva $x = g(y)$ dan $y \in [c, d]$. Bila benda dibatasi oleh $g(y)$ dan $y = c, y = d$ diputar pada sumbu- y , maka volume benda pejal hasil putaran V diberikan oleh:

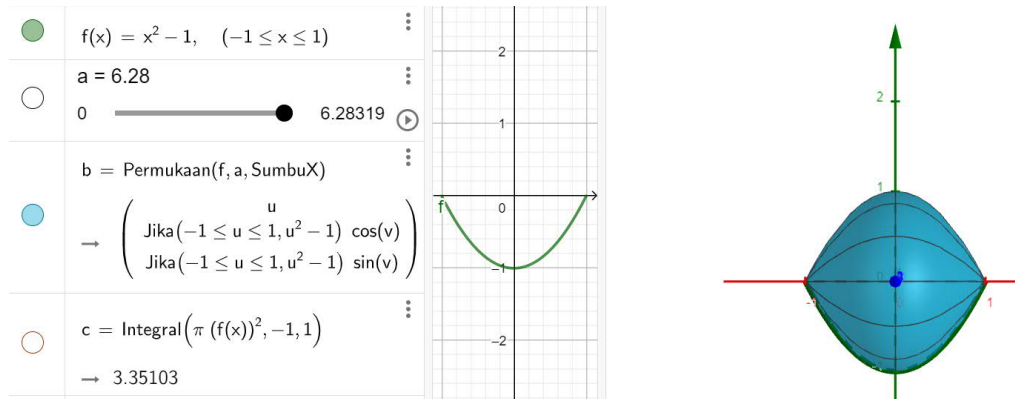
$$V = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

Contoh 1

Kurva $y = x^2 - 1$ diputar terhadap sumbu- x dengan sudut putar 2π . Hitung volume benda pejal yang dihasilkan ketika luas permukaan yang terdapat di antara kurva dan sumbu- x diputar terhadap sumbu- x sebesar 2π .

Jawab

Kita menghitung volumenya sebagaimana gambar berikut:



Terlihat volume benda pejal hasil putaran adalah:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx \approx 3,35101.$$

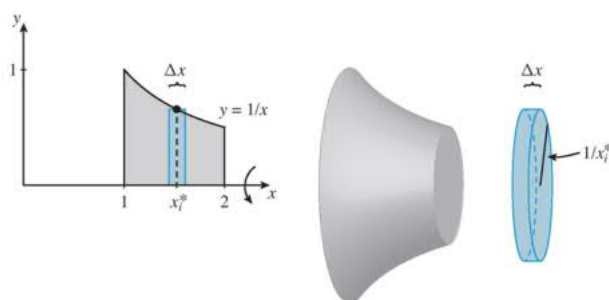
Contoh 2 [9]

Tentukan volume padatan yang dihasilkan ketika daerah di bawah kurva berikut diputar terhadap sumbu- x :

$$(a) y = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2, \quad (b) y = x^2, 0 \leq x \leq 1.$$

Jawab

Daerah di bagian (a) ditunjukkan di sebelah kiri pada Gambar 7.12.4, dan benda padat yang dihasilkan ketika daerah ini diputar terhadap sumbu- x ditunjukkan di tengah.



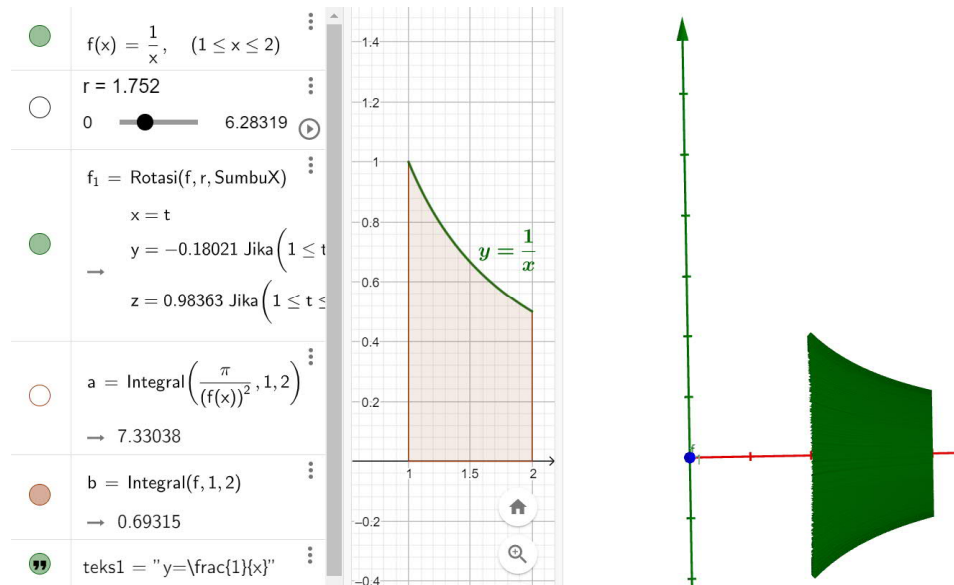
Gambar 7.12.4: Menghitung volume benda padat pada bagian (a)

Seperti biasa, kita mengiris wilayah menjadi strip vertikal dan memperkirakan setiap strip dengan persegi panjang. Persegi panjang ke- i ditunjukkan dengan warna biru di sebelah kiri pada gambar, dan itu menghasilkan cakram di sebelah kanan. Volume cakram ini adalah $\pi \left(\frac{1}{x_i^*}\right)^2 \Delta x$. Menambahkan

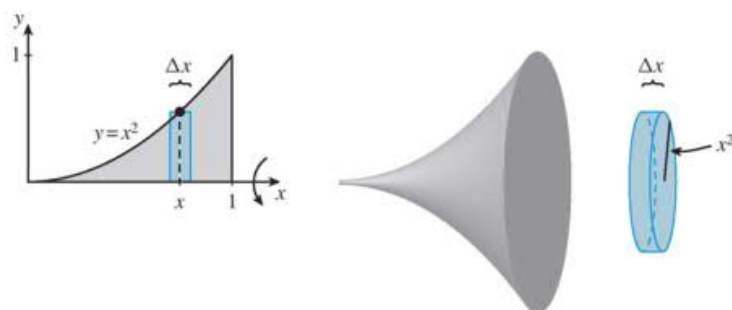
volume cakram ini dan menentukan $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$, kita menemukan bahwa volume padatan adalah

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi}{(x_i^*)^2} \Delta x = \int_1^2 \frac{\pi}{x^2} dx = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Kita kerjakan bagian (a) ini menggunakan Geogebra sebagai berikut:



Gambar 7.12.5 menunjukkan informasi serupa untuk bagian (b). Kali ini kita akan melewati jumlah Riemann dan langsung menuju integral tertentu.



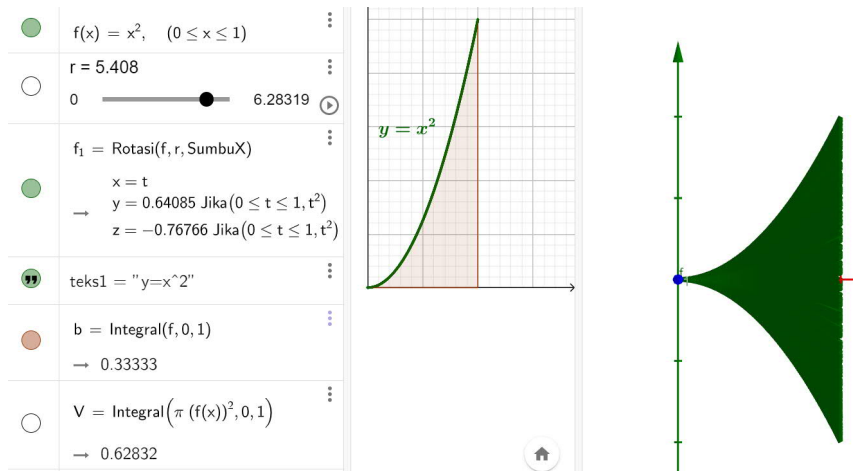
Gambar 7.12.5: Menghitung volume benda padat pada bagian (b)

Karena kita tahu bahwa subskrip i dan superskrip akan dihilangkan ketika kita menyiapkan integral, kita tidak perlu repot-repot memasukkannya dalam Gambar 7.12.5. Jadi, titik sampel untuk persegi panjang di sebelah kiri pada gambar hanya disebut x , dan volume cakram di sebelah kanan adalah $\pi(x^2)^2 \Delta x = \pi x^4 \Delta x$.

Jadi volume benda padat adalah

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Hasil bagian (b) dikerjakan dengan Geogebra sebagai berikut:



Dalam penyelesaian kita untuk Contoh 2 [9], daripada hanya menerapkan persamaan (7.12.1), kita telah memilih dalam setiap kasus untuk menggambar dari mana integral tertentu yang diperlukan dapat dikerjakan. Salah satu alasan untuk melakukan ini adalah agar lebih mudah mengingat rumus integral. Tetapi alasan yang lebih penting adalah bahwa metode ini memungkinkan untuk menghitung berbagai volume yang serupa dengan yang telah kita hitung, tetapi tidak benar-benar sesuai dengan pola turunan persamaan (7.12.1). Persamaan tersebut tidak berlaku langsung pada volume dalam contoh berikut, tetapi dapat dihitung dengan meniru metode yang digunakan dalam Contoh 2 [9].

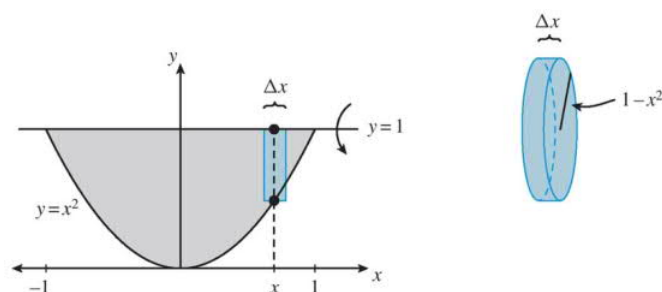
Contoh 3 [9]

Temukan volume padatan yang dihasilkan ketika daerah berikut diputar di sekitar garis yang ditentukan:

- Daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ and $y = 1$, diputar disekitar garis $y = 1$.
- Daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ and $y = 1$, diputar pada sumbu- x .
- Daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, $y = 1$ dan sumbu- y diputar pada sumbu- y .

Jawab

Menetapkan $x^2 = 1$ dan menyelesaikannya, kita menemukan bahwa kurva $y = x^2$ dan $y = 1$ berpotongan di $x = \pm 1$. Dengan demikian, daerah pada bagian (a) adalah yang ditunjukkan pada Gambar 7.12.6.



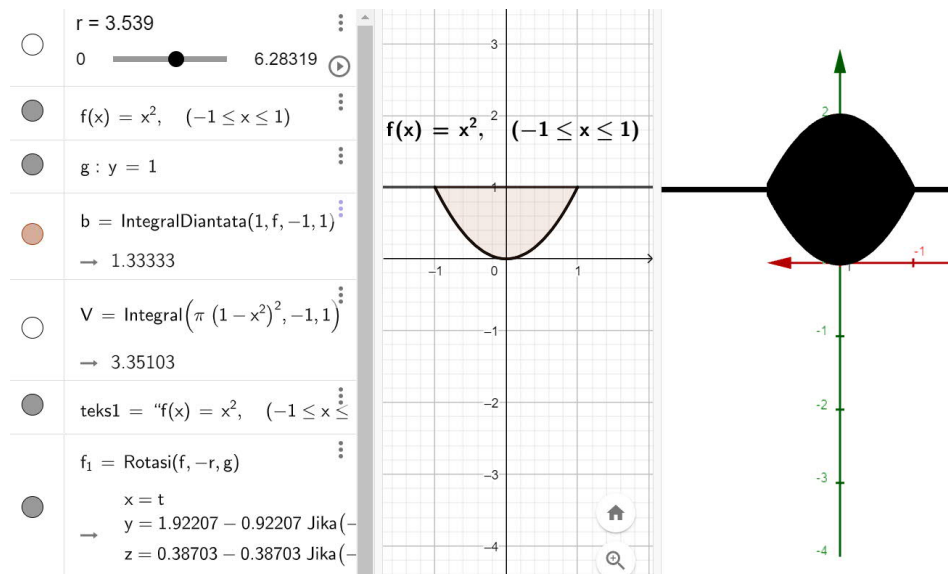
Gambar 7.12.6: Menghitung volume benda padat pada bagian (a)

Kita diminta untuk memutar daerah ini terhadap garis $y = 1$, bukan sumbu- x , jadi rumus (7.12.1) tidak berlaku, tetapi kita akan dapat mengerjakan integral yang diperlukan dari gambar. Seperti biasa, kita

memperkirakan garis vertikal wilayah ini dengan persegi panjang, dan seperti pada bagian (b) Contoh 2 [9], label yang telah kita tetapkan ke titik sampel untuk persegi panjang ini hanyalah x , bukan x_i^* . Ketika persegi panjang ini diputar di sekitar garis $y = 1$, itu menghasilkan cakram yang ditunjukkan di sebelah kanan pada Gambar 7.12.6. Jari-jari cakram adalah tinggi persegi panjang, yaitu $1 - x^2$, dan lebarnya adalah Δx , jadi volumenya adalah $\pi(1 - x^2)^2 \Delta x$. Dengan menjumlahkan volume cakram-cakram ini dan kemudian mengambil batasnya ketika banyaknya cakram mendekati $\infty \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$, kita simpulkan bahwa volume benda padat adalah

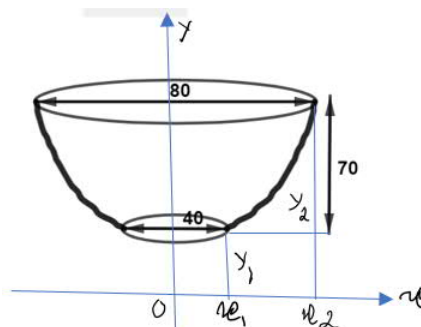
$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx = \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{16\pi}{15}.$$

Hasil dalam Geogebra sebagai berikut:



Contoh 4

Gambar berikut menunjukkan suatu mangkok dengan ukuran-ukuran yang ditentukan dalam mm (mili meter), persamaan kurva diberikan oleh $y = ax^3$.



Hitung volume mangkok dalam cm^3 .

Jawab

Pertama kita menentukan persamaan mangkok dan batas-batas nilai x . Jari-jari dasar mangkok adalah $x_1 = 2$ dan jari-jari atas $x_2 = 4$. Tinggi mangkok $t = 7$. Sehingga didapat:

$$y_1 = a(2)^3 = 8a, y_2 = a(4)^3 = 64a \text{ dan } y_2 - y_1 = 7 \Rightarrow 64a - 8a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}.$$

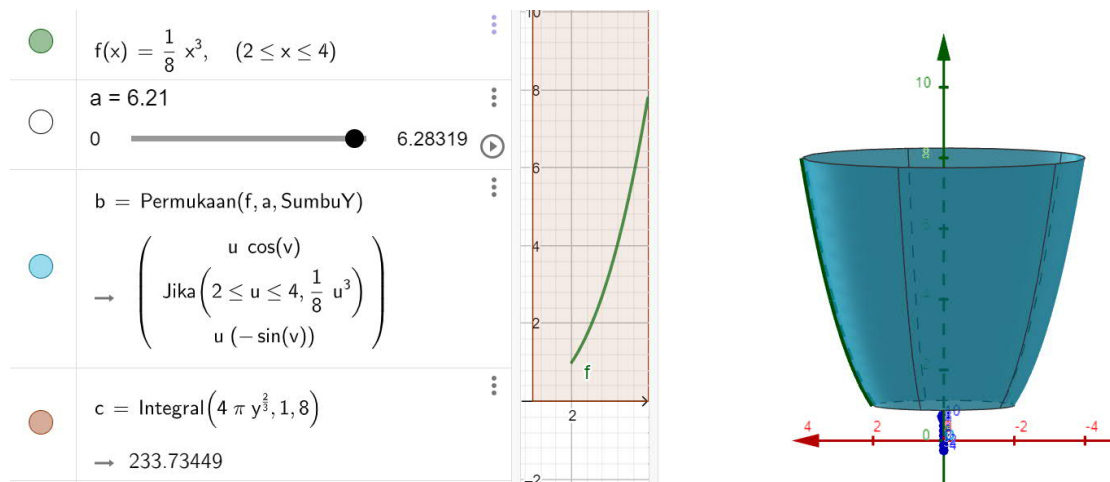
Jadi persamaan kurva mangkok adalah $y = \frac{1}{8}x^3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ dan $y_1 = 1$, $y_2 = 8$. Atau

$$x^2 = 4y^{\frac{2}{3}}, \quad y_1 = 1, y_2 = 8.$$

Volume mangkok diberikan oleh:

$$V = \pi \int_1^8 x^2 dy = \pi \int_1^8 4y^{\frac{2}{3}} dy.$$

Integral tsb, kita hitung dengan menggunakan Geogebra sebagai gambar berikut:



Jadi

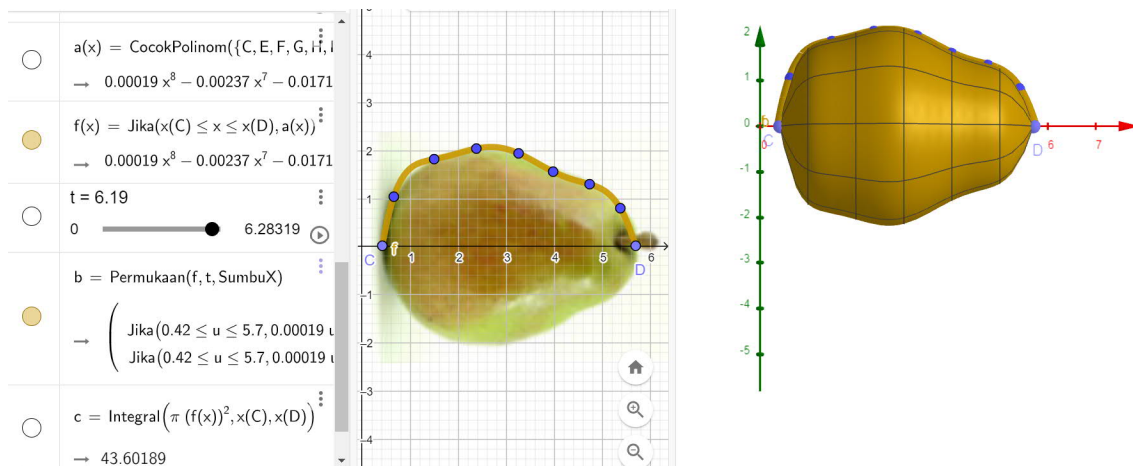
$$V = \pi \int_1^8 x^2 dy = \pi \int_1^8 4y^{\frac{2}{3}} dy \approx 233.73449.$$

Contoh 5



Buat Data titik pada permukaan Buah Pear dari gambar diatas. Selanjut tentukan model persamaannya dan hitung volume dari buah pear.

Jawab



Terlihat volume buah peer adalah $\approx 43,60189$ satuan isi.

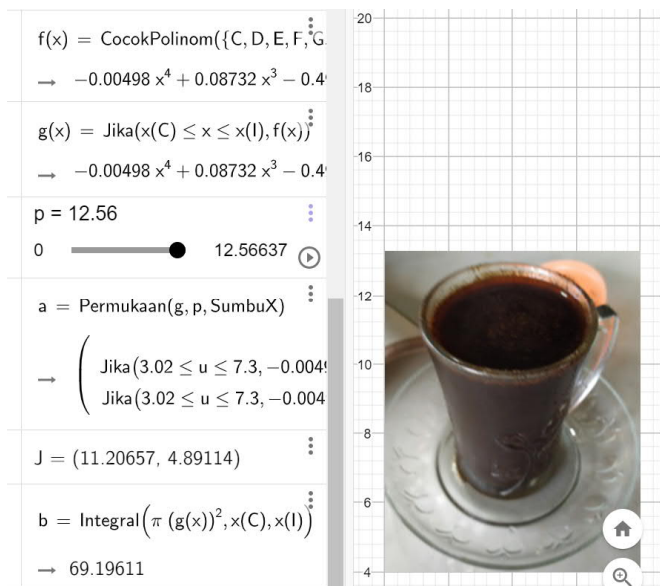
Menghitung volume Secangkir kopi Cha Im (Prof. Chairul Imron)



Kita menghitung cangkir berisi kopi sebagai berikut:

1. Kita salin gambar dalam Graphing Geogebra
2. Buat beberapa data titik pada permukaan Gambar.
3. Tentukan fungsi polinomial yang terdekat dengan semua data titik
4. Buat permukaan benda putar dari fungsi yang telah tersedia
5. Hitung vilumenya menggunakan integral $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$,

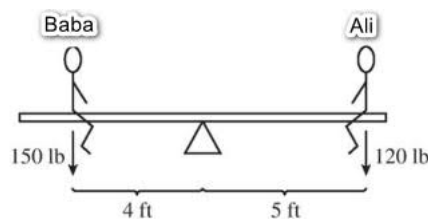
Berikut ini hasilnya:



Terlihat volume cangkir Cha Im adalah $\approx 69,19611$ satuan isi.

7.15. Pusat suatu Massa [9]

Ali dan Baba sedang duduk di jungkat-jungkit. Ali beratnya 120 pon dan Baba beratnya 150, jadi jungkat-jungkit tidak seimbang ketika mereka duduk sama jauh dari pusat. Tetapi mereka menemukan bahwa mereka dapat menyeimbangkannya jika mereka mengubah posisi mereka. Secara khusus, setelah beberapa percobaan mereka menemukan bahwa jika Ali 5 kaki dari pusat jungkat-jungkit dan Bob adalah 4 kaki dari pusat, seperti pada Gambar 7.12.4,

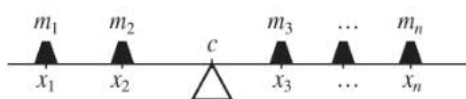


Gambar 7.12.4: Ali dan Baba menciptakan torsi yang sama dan berlawanan, sehingga jungkat-jungkit seimbang.

maka jungkat-jungkit seimbang.

Untuk memahami mengapa jungkat-jungkit seimbang dalam situasi ini, kita harus mempertimbangkan konsep torsi. Jungkat-jungkit ditopang pada suatu titik di tengah yang disebut titik tumpu. Ketika Ali duduk 5 kaki di sebelah kanan titik tumpu, gravitasi menyebabkan dia menekan jungkat-jungkit pada titik itu dengan gaya 120 lb, dan jika Baba tidak ada, gaya ini akan menyebabkan jungkat-jungkit berputar searah jarum jam pusat titik tumpu. Torsi gaya ini dari titik tumpu adalah ukuran sejauh mana gaya akan menyebabkan jungkat-jungkit berputar. Ini dihitung sebagai besarnya gaya dikalikan jarak dari titik tumpu. Jadi, berat Ali pada jungkat-jungkit menciptakan torsi $120 \times 5 = 600$ ft. lb di sekitar titik tumpu. Demikian pula, Baba, duduk 4 kaki di sebelah kiri titik tumpu dan beratnya 150 pon, menciptakan torsi $150 \times 4 = 600$ ft. lb dalam arah yang berlawanan, persis menyeimbangkan torsi yang diciptakan oleh Ali. Kita dapat menunjukkan bahwa torsi Baba berlawanan arah dari Ali dengan mengatakan bahwa Baba menciptakan torsi searah jarum jam sebesar 600 ft. lb. Efek rotasi bersih dari kumpulan gaya ditemukan dengan menambahkan torsi. Dalam situasi kita, torsi total pada jungkat-jungkit adalah $600 - 600 = 0$ ft. lb, dan karena itu jungkat-jungkit tidak berputar sama sekali; itu seimbang.

Sekarang mari kita generalisasi. Pertimbangkan balok horizontal yang ditandai sebagai garis bilangan. Ada benda yang massanya $m_1, m_2, \dots, m_n$ bertumpu pada balok di titik $x_1, x_2, \dots, x_n$ (lihat Gambar 7.12.5).



Gambar 7.12.5: Sebuah balok dengan beberapa massa di atasnya.

Kita akan menganggap bahwa massa balok itu sendiri dapat diabaikan. Berat suatu benda sebanding dengan massanya, sehingga benda ke- i mendorong balok ke bawah di titik x_i dengan gaya $m_i g$, di mana g adalah konstanta. Jika balok bertumpu pada titik tumpu di titik c , maka gaya ini menghasilkan torsi searah jarum jam sebesar $(x_i - c)m_i g$ terhadap titik tumpu. Perhatikan bahwa jika $x_i < c$ maka torsi ini negatif, menunjukkan bahwa gaya akan menyebabkan rotasi berlawanan arah jarum jam.

Kita ingin menentukan di mana kita harus menempatkan titik tumpu sehingga balok akan seimbang. Agar balok seimbang, torsi total harus 0:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c)m_i g = 0.$$

Kita sekarang dapat memecahkan persamaan ini untuk c untuk menemukan titik di mana balok akan seimbang. Kita mulai dengan memperluas penjumlahan:

$$0 = \sum_{i=1}^n (x_i - c)m_i g = \sum_{i=1}^n x_i m_i g - \sum_{i=1}^n c m_i g = g \sum_{i=1}^n x_i m_i - c g \sum_{i=1}^n m_i.$$

Selesaikan c , kita menemukan bahwa balok akan seimbang jika titik tumpu berada di titik

$$c = \frac{g \sum_{i=1}^n x_i m_i}{g \sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (7.12.1)$$

Titik ini disebut pusat massa kumpulan benda. Perhatikan bahwa penyebut pecahan di sebelah kanan dalam persamaan (7.12.1) hanyalah massa total benda. Pembilang disebut momen pertama massa (sekitar titik asal) untuk kumpulan benda.

Persamaan (7.12.1) memberitahu kita bagaimana menemukan pusat massa dari kumpulan terbatas benda-benda yang diatur pada garis bilangan, jika massa setiap benda terkonsentrasi pada suatu titik. Tetapi massa umumnya menyebar, tidak terkonsentrasi pada satu titik. Dengan demikian, akan lebih realistis untuk membayangkan penyebaran massa terus menerus di beberapa bagian dari garis bilangan. Sebagai contoh, perhatikan sebuah kawat dengan kerapatan bervariasi yang memanjang pada interval $[a, b]$ pada garis bilangan. Kita akan mengasumsikan bahwa untuk $a \leq x \leq b$, kerapatan kawat di titik x adalah $d(x)$, di mana d adalah fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$. Kita ingin menemukan pusat massa kawat ini.

Kita mulai dengan menunjukkan bagaimana jumlah Riemann dapat digunakan untuk mendapatkan jawaban perkiraan. Untuk bilangan bulat positif besar n , kita dapat membayangkan memotong kawat menjadi n bagian kecil. Jika kita memperlakukan potongan-potongan ini sebagai n titik massa, maka kita dapat menggunakan persamaan (7.12.1) untuk menemukan nilai perkiraan untuk pusat massa kawat. Untuk memotong kawat menjadi beberapa bagian, kita membagi interval $[a, b]$ menjadi n interval yang lebih kecil, masing-masing dengan lebar $\Delta x = (b - a)/n$, dengan titik-titik pembagian

$x_i = a + i\Delta x$. Untuk $1 \leq i \leq n$, potongan kawat ke- i adalah bagian yang terletak pada interval $[x_{i-1}, x_i]$. Untuk memperkirakan massa potongan kawat ini, kita memilih titik sampel $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ dan menganggap bahwa kerapatannya adalah konstanta $d(x_i^*)$ sepanjang interval. Karena densitas adalah massa per satuan panjang, massa potongan kawat ke- i kira-kira $m_i = d(x_i^*)\Delta x$. Dengan memperlakukan potongan kawat ke- i sebagai massa titik yang terletak di titik x_i^* dan menerapkan persamaan (7.12.1), kita menemukan bahwa pusat massa kawat kira-kira

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i d(x_i^*)\Delta x}{\sum_{i=1}^n d(x_i^*)\Delta x}. \quad (7.12.2)$$

Dengan bertambahnya n , n potongan kawat menjadi lebih kecil, dan pendekatan ini, yang didasarkan pada perlakuan potongan-potongan ini sebagai titik, menjadi lebih akurat. Pembilang dan penyebut dari (7.12.2) keduanya merupakan jumlah Riemann, sehingga $n \rightarrow \infty$ atau ekuivalen dengan $\Delta x \rightarrow 0$ keduanya mendekati integral. Jadi, pusat massa yang tepat adalah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i d(x_i^*)\Delta x}{\sum_{i=1}^n d(x_i^*)\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i d(x_i^*)\Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n d(x_i^*)\Delta x} = \frac{\int_a^b x d(x) dx}{\int_a^b d(x) dx}. \quad (7.12.3)$$

Penyebut pecahan terakhir dalam persamaan (7.12.3) adalah massa total kawat, dan pembilangnya adalah momen massa pertama tentang titik asal.

Misalnya, seutas kawat memanjang dari 0 hingga 5 pada garis bilangan, dan kerapatan di titik x adalah $d(x) = 3x$. Maka massa kawat adalah

$$\int_0^5 d(x) dx = \int_0^5 3x dx = \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^5 = \frac{75}{2},$$

dan momen pertama massa adalah

$$\int_0^5 x d(x) dx = \int_0^5 3x^2 dx = \frac{3}{3} x^3 \Big|_0^5 = 125.$$

Jadi pusat massanya berada di

$$\frac{125}{\frac{75}{2}} = \frac{10}{3}.$$

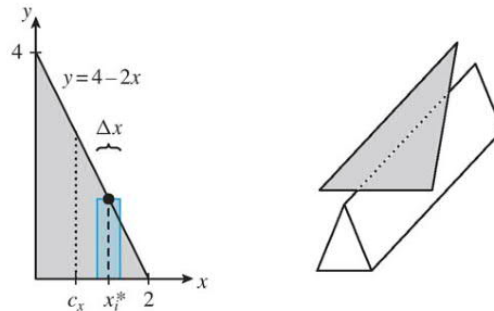
Dengan kata lain, kawat akan seimbang pada titik tumpu pada titik $10/3$.

Sangat menarik untuk mengetahui apa yang terjadi dalam kasus kawat dengan kerapatan konstan. Misalkan kawat memanjang dari a ke b pada garis bilangan, dan rapat massa pada setiap titik dalam interval $[a, b]$ adalah D . Maka menurut persamaan (7.12.3), pusat massa adalah

$$\frac{\int_a^b x D dx}{\int_a^b D dx} = \frac{\int_a^b x dx}{\int_a^b dx} = \frac{\frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b}{x \Big|_a^b} = \frac{\frac{1}{2} (b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{a + b}{2}.$$

Dengan kata lain, kawat seimbang pada titik tengahnya. Tentu saja, jika dipikir-pikir jawaban ini sudah jelas, tetapi bagus untuk melihat bahwa persamaan (7.12.3) mengarah ke jawaban yang jelas ini.

Sejauh ini kita telah membahas penyeimbangan objek satu dimensi. Mari kita coba pindah ke objek dua dimensi. Misalkan pelat tipis dengan kerapatan seragam menutupi segitiga dengan titik $(0,0)$, $(2,0)$, dan $(0,4)$ pada bidang. Hipotenusa segitiga ini terletak pada garis $y = 4 - 2x$. Untuk sembarang bilangan c_x antara 0 dan 2, kita dapat menggambar garis vertikal $x = c_x$ pada pelat. Kita kemudian meletakkan pelat di atas tepi pisau, dengan garis $x = c_x$ bertumpu pada tepi pisau, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7.13.6. Untuk nilai c_x berapa pelat akan seimbang pada ujung pisau?



Gambar 7.13.6: Menyeimbangkan pelat segitiga di ujung pisau.

Untuk menemukan titik keseimbangan ini, kita memotong pelat segitiga menjadi n strip vertikal tipis dan memperkirakan strip ini dengan persegi panjang seperti biasa; persegi panjang ke- i ditunjukkan pada Gambar 7.13.6. Persegi panjang tersebut memiliki lebar Δx dan tinggi $4 - 2x_i^*$ sehingga luasnya adalah $(4 - 2x_i^*)\Delta x$. Karena densitas pelat seragam, berat strip ke- i dari pelat sekitar $(4 - 2x_i^*)K\Delta x$ untuk beberapa K konstan. Ini berarti bahwa ketika pelat bertumpu pada tepi pisau, gaya gravitasi pada strip pelat ini memberikan torsi sekitar $(x_i^* - c_x)(4 - 2x_i^*)K\Delta x$ di tepi ujung pisau. Menambahkan torsi untuk semua strip dan mengambil batas saat jumlah strip mendekati ∞ , kita melihat bahwa torsi total adalah

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^* - c_x)(4 - 2x_i^*)K\Delta x &= \int_0^2 (x - c_x)(4 - 2x)K dx \\ &= K \int_0^2 x(4 - 2x) dx - Kc_x \int_0^2 (4 - 2x) dx \end{aligned}$$

Agar pelat seimbang di tepi pisau, torsi total ini harus 0. Jadi, untuk menemukan titik keseimbangan, kita atur torsi sama dengan 0 dan selesaikan untuk c_x :

$$c_x = \frac{\int_0^2 x(4 - 2x) dx}{\int_0^2 (4 - 2x) dx} = \frac{\int_0^2 x(4 - 2x) dx}{\int_0^2 (4 - 2x) dx}.$$

Perhatikan persamaan rumus ini dengan rumus dalam Persamaan (7.12.3): penyebut pecahan terakhir adalah luas total pelat, dan pembilangnya adalah momen pertama luas terhadap garis $x = 0$ yaitu di sekitar sumbu- y . Menghitung integral, kita menemukan bahwa titik keseimbangan adalah

$$c_x = \frac{\int_0^2 x(4 - 2x) dx}{\int_0^2 (4 - 2x) dx} = \frac{\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2}{\left[4x - x^2\right]_0^2} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}.$$

Kita dapat melakukan perhitungan serupa untuk menemukan garis horizontal di mana pelat akan seimbang. Menulis ulang hipotenusa dalam bentuk $x = 2 - \frac{y}{2}$ dan meniru perhitungan di atas, kita menemukan bahwa momen pertama luas terhadap garis $y = 0$ adalah

$$\int_0^4 y \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = \left[y^2 - \frac{1}{6}y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Karena kita telah menghitung luasnya adalah 4, kita simpulkan bahwa pelat akan seimbang pada garis $y = c_y$, di mana

$$c_y = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{4}{3}.$$

Menyatukan semuanya, kita telah menunjukkan bahwa pelat akan seimbang pada garis horizontal atau garis vertikal melalui titik $(2/3, 4/3)$. Titik $(2/3, 4/3)$ disebut pusat segitiga (centroid).

Secara umum, jika suatu daerah didefinisikan oleh pertidaksamaan $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$, di mana f dan g kontinu pada $[a, b]$ dan untuk semua $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, maka koordinat- x dari centroid diberikan oleh rumus

$$c_x = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{A},$$

dimana A adalah luas daerah. Rumus serupa berlaku untuk koordinat- y dari pusat massa suatu daerah.

Kita menutup bahasan ini dengan mencatat hubungan antara centroid dan volume:

Teorema 7.13.1 (Teorema Centroid Kedua Pappus). Jika suatu daerah pada bidang diputar terhadap suatu sumbu yang tidak melalui daerah tersebut, maka volume benda padat yang dihasilkan sama dengan luas daerah tersebut dikalikan jarak yang ditempuh oleh pusat massa daerah tersebut ketika berputar terhadap sumbu putar.

Bukti. Kita membuktikan teorema dalam kasus suatu daerah berbentuk $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$ yang diputar pada sumbu- y . Disini kita mengasumsikan bahwa $0 < a < b$, f dan g continue pada $[a, b]$, dan untuk semua $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$.

Bila luas daerah adalah A , maka koordinat- x dari centroid adalah

$$c_x = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{A}.$$

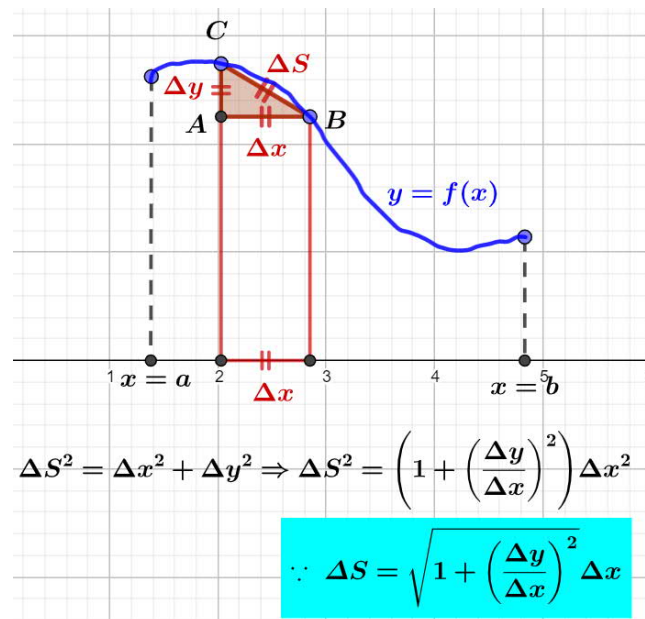
Ketika pusat massa diputar terhadap sumbu- y , ia menelusuri lingkaran dengan jari-jari c_x , jadi jarak yang ditempuhnya adalah keliling lingkaran ini, $2\pi c_x$. Jadi, hasil kali luas daerah dan jarak yang ditempuh pusat massa adalah

$$A \cdot 2\pi c_x = A \frac{2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{A} = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx.$$

Tapi ini adalah volume padatan yang dihasilkan ketika daerah diputar terhadap sumbu- y , dihitung dengan kulit silinder. ■

7.16 Panjang suatu Kurva

Pembahasan berikutnya dari integral menghitung panjang suatu kurva untuk nilai-nilai yang ditentukan. Kita membahasnya melalui gambar berikut:



Panjang kurva $y = f(x)$ untuk $x = a$ dan $x = b$ adalah S , dengan $\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, maka $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Jadi panjang S adalah:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Bila kita gunakan persamaan parameter $x(t) = f(t)$ dan $y(t) = g(t)$ pada interval $[a, b]$, maka

$$S = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Sekarang perhatikan fungsi kutub $r = f(\theta)$. Kita menggunakan persamaan $x = f(\theta) \cos(\theta)$ dan $y = f(\theta) \sin(\theta)$ untuk membuat persamaan parametrik berdasarkan fungsi kutub. Kita menghitung $x'(\theta)$ dan $y'(\theta)$ seperti yang dilakukan sebelumnya saat menghitung $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$. Dalam hal ini didapat $y'(\theta) = f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)$ dan $x'(\theta) = f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta)$. Sehingga didapat

$$y'(\theta)^2 = f'(\theta)^2 \sin^2(\theta) + 2f'(\theta) \sin(\theta)f(\theta) \cos(\theta) + f(\theta)^2 \cos^2(\theta)$$

dan

$$x'(\theta)^2 = f'(\theta)^2 \cos^2(\theta) - 2f'(\theta) \sin(\theta)f(\theta) \cos(\theta) + f(\theta)^2 \sin^2(\theta)$$

Jadi

$$\begin{aligned}
 x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= f'(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + f'(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + f(\theta)^2 \sin(\theta)^2 f(\theta)^2 \cos(\theta)^2 \\
 &= f'(\theta)^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) + f(\theta)^2 (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) \\
 &= f'(\theta)^2 + f(\theta)^2.
 \end{aligned}$$

Hasil ini membawa kita ke rumus panjang busur dalam koordinat polar. Misalkan $r = f(\theta)$ merupakan fungsi dalam koordinat polar dengan f kontinu pada interval terbuka I yang memuat interval tutup $[\alpha, \beta]$, di mana grafik hanya menelusuri dirinya sekali. Panjang busur S dari grafik pada $[\alpha, \beta]$ adalah:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta.$$

Contoh 2

Hitung panjang kurva $y = (x - 1)^2 + 1$ dari $x = -1$ ke $x = 3$.

Jawab :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^3 \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx \\
 &= \left(\frac{-1}{4} \ln(-2x + \sqrt{4x^2 - 8x + 5} + 2) + 2 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4x^2 - 8x + 5} \right) \Big|_{-1}^3 \\
 &= \frac{6\sqrt{17} + \ln(8\sqrt{17} + 33)}{4} \approx 9,29357
 \end{aligned}$$

Kita hitung dengan menggunakan fasilitas CAS dalam Geogebra sebagai berikut:

1 $\int \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx$
 $\rightarrow \frac{-1}{4} \ln(-2x + \sqrt{4x^2 - 8x + 5} + 2) + 2 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{4x^2 - 8x + 5} + c_1$

2 $\int_{-1}^3 \sqrt{1 + 4(x - 1)^2} dx$
 $\rightarrow \frac{8\sqrt{17} + \ln(8\sqrt{17} + 33)}{4}$

3 \$2\$
 ≈ 9.29357

Hasil ini bisa langsung dihitung menggunakan perintah **Panjang** pada fasilitas CAS dalam Geogebra sebagaimana ditampilkan dalam gambar berikut:

1 $c(x) := x^2 - 2x + 2$
 $\approx c(x) := x^2 - 2x + 2$

2 $\text{Panjang}(c, -1, 3)$
 Urai: $\frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} - 4) + 2\sqrt{17}$

3 \$2\$
 ≈ 9.29357

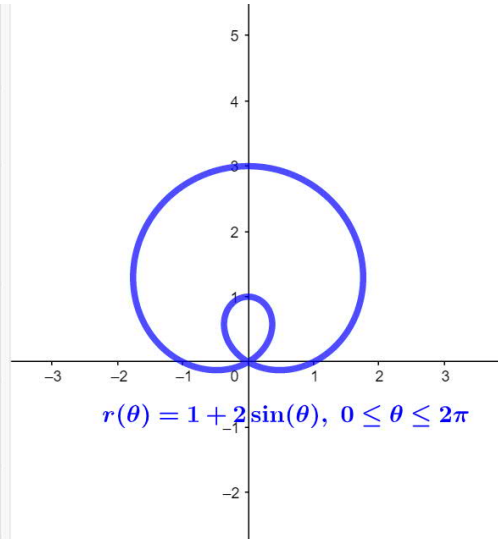
Contoh 3

Hitung panjang kurva $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ pada interval $[0, 2\pi]$.

Jawab

Kita hitung dengan fasilitas CAS dengan hasil pendekatan sebagai berikut:

1	$r(\theta) := 1 + 2\sin(\theta)$
2	$\rightarrow r(\theta) := 2 \sin(\theta) + 1$
3	Turunan(r, θ) $\rightarrow 2 \cos(\theta)$
4	$a := \sqrt{2^2 + r^2}$ $\rightarrow a := \sqrt{(2 \sin(\theta) + 1)^2 + (2 \cos(\theta))^2}$
5	SederhanaTrigono(a) $\rightarrow \sqrt{4 \cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta) + 4 \sin(\theta) + 1}$
6	SederhanaTrigono($\$4\$$) $\rightarrow \sqrt{4 \sin(\theta) + 5}$
7	Integral($\$5\$, 0, 2\pi$) ≈ 13.36489



Terlihat bahwa Panjang kurva $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ pada interval $[0, 2\pi]$ adalah $\approx 13,36489$.

Contoh 4

Tentukan panjang salah satu lengkungan cycloid. Dari $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, kita peroleh turunan $x'(t) = 1 - \cos t$ dan $y'(t) = \sin t$, sehingga panjangnya adalah

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \end{aligned}$$

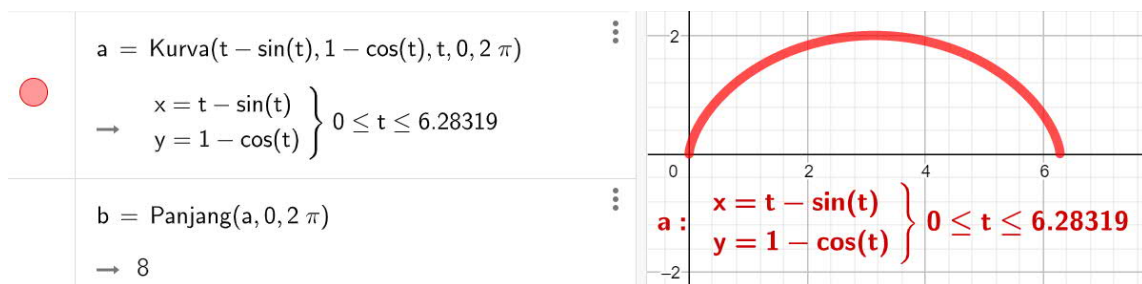
Sekarang kita menggunakan rumus $\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos(t)}{2}$ atau $4 \sin^2 \frac{t}{2} = 2 - \cos t$, sehingga kita mendapatkan

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt
 \end{aligned}$$

Karena $\sin^2 \frac{t}{2} \geq 0$, untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$, maka

$$S = \int_0^{2\pi} 2 \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 8.$$

Kita melakukan hasil yang telah dihitung menggunakan Geogebra sebagaimana gambar berikut:



Menghitung Panjang Pintu Gerbang di St. Louis

Kita akan menghitung Panjang pintu gerbang di St. Louis yang diberikan oleh gambar berikut [5]:

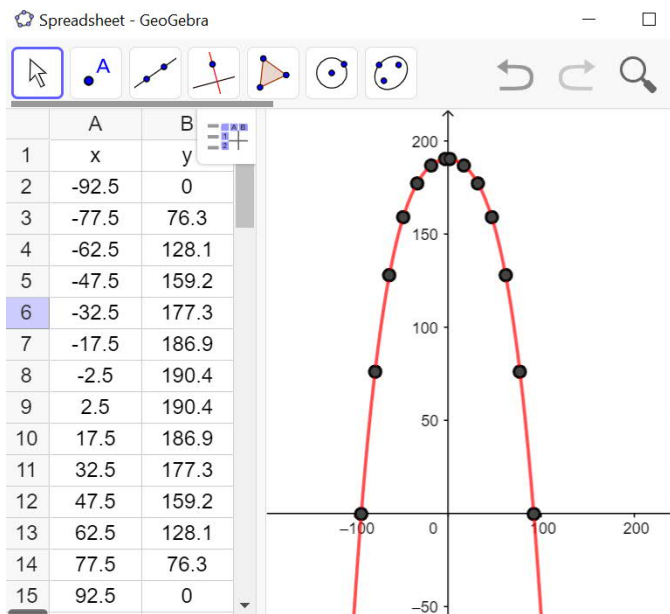


Dimungkinkan untuk mengukur posisi lengkungan. Nilai-nilai ini diberikan pada Tabel 1. Gunakan nilai-nilai ini untuk menentukan panjang busur Pintu Gerbang di St. Louis dan kita akan memeriksa keakuratan hasilnya.

Tabel 1: Data Koordinat Pintu Gerbang di St. Louis [5]

Width: x position (m)	Height: y position (m)
-92.5	0.0
-77.5	76.3
-62.5	128.1
-47.5	159.2
-32.5	177.3
-17.5	186.9
-2.5	190.4
2.5	190.4
17.5	186.9
32.5	177.3
47.5	159.2
62.5	128.1
77.5	76.3
92.5	0.0

Input data Tabel 1 dalam Spreadsheet Geogebra dan Buat Daftar Titik. Selanjutnya lakukan Analisis Regresi Dua Variabel. Pilih Mode Regresi Polinomial dengan derajat 4, sehingga didapat gambar berikut:



Selanjutnya, polynomial hasil regresi data koordinat Pintu Gerbang St.Louis dan panjangnya diberikan sebagaimana ditampilkan oleh gambar berikut:

Fungsi

$$g(x) = \text{CocokPolinom}(12, 4)$$

$$\rightarrow 0x^4 + 0x^3 - 0.01091x^2 - 0x + 190.44866$$

Angka

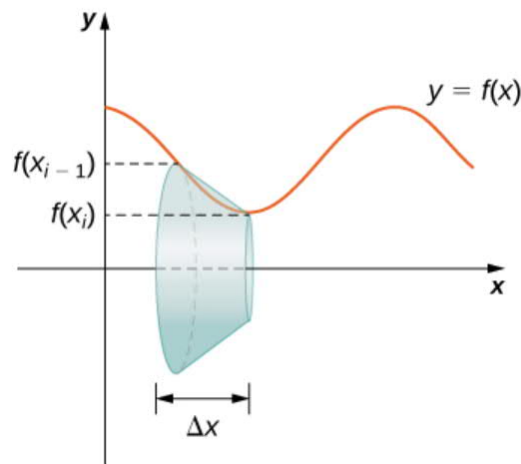
$$a = \text{Panjang}(g, x(A), x(N))$$

$$\rightarrow 452.0303$$

Terlihat bahwa hasil perhitungan Panjang Pintu Gerbang St.Louis adalah ≈ 452.0303 m. Pembaca disilahkan untuk membandingkan hasilnya dengan pembahasan di [5].

7.17. Luas Permukaan Benda Putar

Misalkan kurva $y = f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ diputar pada sumbu- x , sebagaimana ditampilkan oleh gambar berikut:



Luas permukaan kecil hasil putaran diberikan oleh

$$\Delta P = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad (\text{merupakan volume kerucut dipotong}).$$

Sekarang, seperti yang kita lakukan dalam pengembangan rumus panjang busur, kita menerapkan Teorema Nilai Rata-rata untuk memilih $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian rupa sehingga $f'(x_i^*) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Ini memberi kita

$$\Delta P = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x.$$

Selanjutnya, karena $f(x)$ kontinu, dengan menggunakan Teorema Nilai Antara, ada titik $x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian rupa sehingga $f(x_i^{**}) = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$, jadi kita peroleh

$$\Delta P = 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x.$$

Maka perkiraan luas permukaan seluruh permukaan benda putar diberikan oleh

$$P \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x.$$

Ini hampir terlihat seperti jumlah Riemann, kecuali kita memiliki fungsi yang dievaluasi pada dua titik yang berbeda, x_i^* dan x_i^{**} pada interval $[x_{i-1}, x_i]$. Meskipun kita tidak memeriksa detailnya di sini, ternyata karena $f(x)$ mulus (*smooth*) dan kontinu, jika kita berikan $n \rightarrow \infty$, limitnya menghasilkan sama dengan jumlah Riemann bahkan dengan dua titik evaluasi yang berbeda. Ini masuk akal secara intuitif, baik x_i^* dan x_i^{**} berada dalam interval $[x_{i-1}, x_i]$, jadi masuk akal bahwa bila $n \rightarrow \infty$, baik x_i^* dan x_i^{**} mendekati suatu nilai x .

Sehingga dengan mengambil limit untuk $n \rightarrow \infty$, kita mempunyai

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^{**}) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Dengan cara yang sama, misalkan $g(y)$ merupakan fungsi mulus tak negatif pada interval $[c, d]$. Maka, luas permukaan permukaan benda putar yang dibentuk dengan memutar grafik $g(y)$ pada sumbu- y diberikan oleh

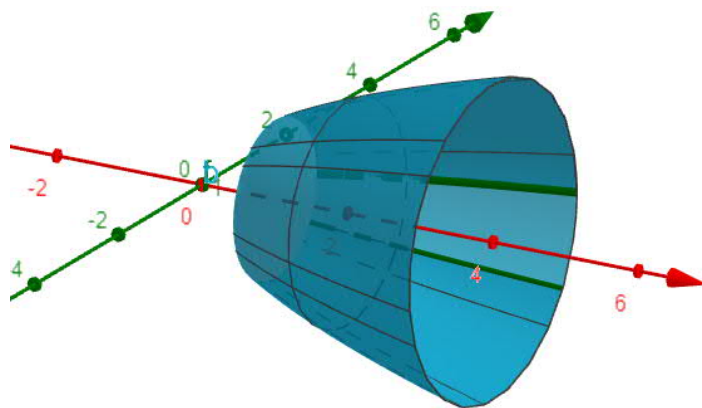
$$P = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Contoh 1

Diberikan $f(x) = \sqrt{x}$ pada interval $[1, 4]$. Tentukan luas permukaan yang dihasilkan dengan memutar grafik $f(x)$ pada sumbu- x .

Jawab

Gambar berikut adalah hasil permukaan benda putar:



Luas Permukaan benda putar ditampilkan oleh gambar berikut:

1	f
☐	→ Jika $(1 \leq x \leq 4, \sqrt{x})$
2	$\int_1^4 2\pi f \sqrt{1 + \text{Turunan}(f)^2} dx$
☐	→ 30.84649

Terlihat luas permukaan benda putar adalah $\approx 30,84649$ satuan luas.

BAB VIII: Pemodelan Matematika

Pada Bab ini diberikan pengantar Pemodelan Matematika dengan menggunakan fasilitas yang dipunyai oleh Geogebra.

Pemodelan matematika adalah aplikasi matematika untuk menggambarkan masalah dunia nyata dan menyelidiki pertanyaan penting yang muncul darinya. Menggunakan alat matematika, masalah dunia nyata diterjemahkan ke masalah matematika, yang meniru masalah dunia nyata. Sebuah solusi dari masalah matematika diperoleh, yang ditafsirkan dalam bahasa masalah dunia nyata untuk membuat prediksi tentang dunia nyata [7].

Dengan masalah dunia nyata, maksudnya adalah masalah dari biologi, kimia, teknik, ekologi, lingkungan, fisika, ilmu sosial, statistik, pengelolaan satwa liar dan sebagainya. Pemodelan matematika dapat digambarkan sebagai suatu kegiatan yang memungkinkan seorang matematikawan untuk menjadi ahli biologi, kimiawan, ekologi, ekonom tergantung pada masalah yang dia tangani. Tujuan utama seorang pemodel adalah untuk melakukan eksperimen pada representasi matematis dari masalah dunia nyata, sebagai ganti melakukan eksperimen di dunia nyata [7].

8.1 Pengantar Model Kontinu

Model kontinu adalah sistem yang input dan outputnya dapat berubah setiap saat. Suatu model kontinu terdiri dari variabel kontinu tak-bebas, bervariasi dengan beberapa variabel kontinu bebas lainnya. Kita menggunakan persamaan diferensial biasa orde pertama (atau sistem persamaan diferensial biasa orde pertama) untuk memodelkan sistem kontinu, jika kita memiliki beberapa informasi atau asumsi tentang laju perubahan variabel tak-bebas sehubungan dengan variabel bebas. Sistem kontinu dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial, jika variabel tak-bebas bergantung pada lebih dari satu variabel bebas.

8.2 Pembentukan Berbagai Model Kontinu

8.2.1 Penanggalan Carbon [7]

Penanggalan karbon (*Carbon 14 dating*) adalah metode yang dikembangkan oleh W.F. Libby di University of Chicago pada tahun 1947, yang dapat digunakan untuk menentukan tanggal secara akurat sampel arkeologi untuk menentukan umur tanaman (fosil kayu) atau bahan apa pun yang mendapatkan karbonnya dari udara. Carbon 14 (C^{14}), isotop radioaktif carbon, adalah hasil dari pemboman konstan oleh radiasi dari matahari di atmosfer. Selama pemboman ini, neutron menabrak atom nitrogen 14 dan mengubahnya menjadi carbon [7].

Dalam organisme hidup, tingkat penyerapan C^{14} menyeimbangkan tingkat disintegrasi C^{14} . Ketika organisme mati dan tubuh diawetkan, ia tidak menyerap C^{14} tetapi disintegrasi terus berlanjut. Seperti disebutkan sebelumnya, C^{14} bersifat radioaktif dan memiliki waktu paruh (waktu yang dibutuhkan oleh suatu zat yang mengalami peluruhan untuk berkurang menjadi setengahnya) 5730 tahun. Para ilmuwan menggunakan informasi ini. Metode penanggalan karbon melibatkan pengukuran kekuatan sampel arkeologi atau fosil C^{14} dan kemudian membandingkannya dengan kekuatan C^{14} yang diharapkan di atmosfer, untuk menghitung usia yang akurat.

Misalkan suatu sampel arkeologi ditemukan yang usianya perlu ditentukan. Misalkan $A(x)$ adalah jumlah C^{14} yang ada dalam sampel pada setiap waktu x , maka

$$\frac{dA}{dx} = -\lambda A, \quad (\text{mengikuti hukum peluruhan radioaktif}) \quad (8.1)$$

di mana λ adalah konstanta peluruhan sampel.

Lakukan integral, kita mempunyai

$$A(x) = A_0 e^{-\lambda x},$$

di mana $A_0 = A(0)$ adalah jumlah C^{14} yang ada dalam sampel saat ditemukan. Dari persamaan (8.1), kita dapat memperoleh rasio disintegrasi C^{14} saat ini dalam sampel arkeologi, yang diberikan oleh

$$M(x) = -\frac{dA}{dx} = \lambda A_0 e^{-\lambda x}.$$

Sehingga didapat

$$\frac{M(x)}{M(0)} = e^{-\lambda x}, \quad M(0) = \lambda A_0,$$

adalah tingkat (rate) awal disintegrasi. Dengan demikian kita mempunyai

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{M_0}{M(x)}. \quad (8.2)$$

Dari (8.2), kita dapat menentukan usia, asalkan kita dapat mengukur $M(x)$ dan $M(0)$. $M(0)$ harus sama dengan laju disintegrasi C^{14} dalam jumlah sampel arkeologi atau fosil (kayu hidup) yang sebanding.

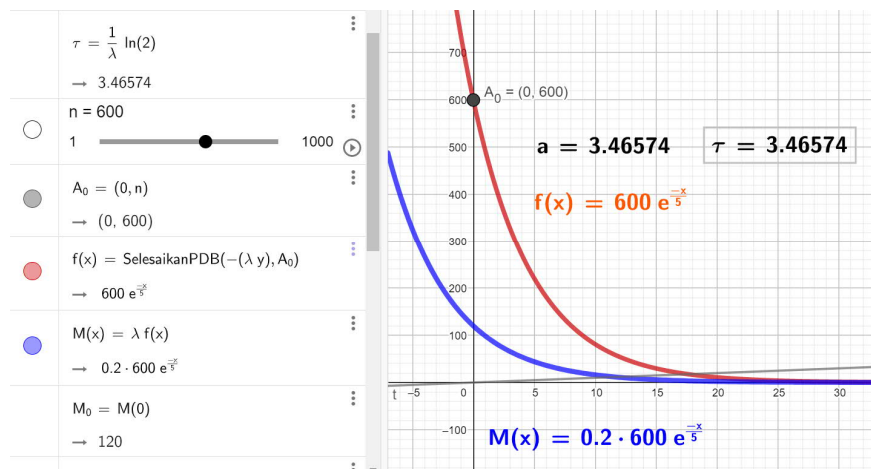
Waktu paruh sampel yang diteliti dapat diperoleh dari persamaan (8.2). Karena waktu paruh adalah jumlah waktu yang diperlukan oleh zat yang berkurang untuk mereduksi menjadi setengahnya, kita dapatkan

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda \tau},$$

dimana τ adalah waktu paruh yang diberikan oleh

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0,6931}{\lambda}.$$

Berikut ini hasil dalam Geogebra:



Terlihat dari (8.2) bila $x = \tau$ didapat $x(\tau) = \tau = 3,46474$.

Contoh permasalahan, sebuah tulang fosil ditemukan mengandung 0,1% dari jumlah aslinya C^{14} . Tentukan umur fosil tersebut.

Jawab

Kita menggunakan persamaan $A(x) = A_0 e^{-\lambda x}$ untuk menentukan nilai konstanta peluruhan λ kita menggunakan fakta bahwa $\frac{1}{2}A_0 = A(5730)$ atau $\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-5730\lambda}$. Sehingga kita mempunyai $\frac{1}{2} = e^{-5730\lambda}$. Dengan demikian $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,00012097$. Jadi $A(x) = A_0 e^{-0,00012097x}$. Dengan $A(x) = 0,001A_0$, kita mempunyai $0,001A_0 = A_0 e^{-0,00012097x}$ atau $0,001 = e^{-0,00012097x}$. Sehingga kita dapatkan $x = \frac{\ln 1000}{0,00012097} \approx 57.100$ tahun. Kita gunakan Geogebra sebagai berikut:

$$I1 = \text{NilaiPenyelesaian}\left(e^{-5730x} = \frac{1}{2}\right) \\ \approx \{x = 0.0001209680943\}$$

$$I2 = \text{NilaiPenyelesaian}\left(e^{-0.0001209680943x} = 0.001\right) \\ \approx \{x = 57103.9439693159002\}$$

8.2.2 Distribusi Obat dalam Tubuh [7]

Ilmu yang mempelajari pergerakan obat dalam tubuh disebut farmakokinetik. Ilmu farmakokinetik menggunakan persamaan matematika dan menggunakannya untuk menggambarkan pergerakan obat melalui tubuh.

Kita sekarang mempelajari masalah sederhana dalam farmakologi, di mana kita akan berurusan dengan hubungan dosis-respon obat. Dalam masalah ini, obat yang ada dalam sistem mengikuti hukum tertentu. Mari kita asumsikan bahwa laju penurunan konsentrasi obat berbanding lurus dengan kuadrat dari jumlah yang ada dalam tubuh dan C_0 adalah dosis awal obat yang diberikan kepada pasien pada waktu $t = 0$. Model matematika dinamika ini diberikan oleh

$$\frac{dC(t)}{dt} = -kC(t)^2. \quad (8.3)$$

di mana k adalah konstanta tergantung pada obat yang digunakan, dan nilainya dapat diperoleh dari percobaan. Menyelesaikan (8.3), kita mendapatkan

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + C_0 kt},$$

dimana $C(0) = C_0$. Misalkan dosis yang sama dari obat C_0 diberikan ke tubuh pada interval waktu yang sama, T . Kemudian, segera setelah dosis kedua, konsentrasi obat di dalam tubuh adalah

$$C_1 = C_0 + \frac{C_0}{1 + C_0 kT}.$$

Setelah dosis ketiga, konsentrasi obat di dalam tubuh adalah

$$C_2 = C_0 + \frac{C_1}{1 + C_1 kT}.$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$C_n = C_0 + \frac{C_{n-1}}{1 + C_{n-1}kT}, \quad (8.4)$$

yang merupakan persamaan beda tak-linier. Sekarang,

$$C_{n+1} - C_n = \frac{C_n - C_{n-1}}{(1 + kTC_n)(1 + kTC_{n-1})}. \quad (8.4)$$

Dari (8.4), kita menyimpulkan bahwa $C_n > C_0$, yang berarti $C_{n+1} - C_n$ dan $C_n - C_{n-1}$ memiliki tanda yang sama. Memperhatikan bahwa C_n adalah fungsi naik dari n , kita mencoba mencari nilai batas konsentrasi dengan mengambil limit pada kedua sisi (8.4), yaitu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(C_0 + \frac{C_{n-1}}{1 + C_{n-1}kT} \right)$$

Sehingga kita mempunyai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_0 + \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1}}{1 + kT \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1}}$$

atau

$$C_\infty = C_0 + \frac{C_\infty}{1 + kTC_\infty},$$

dimana $C_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1}$. Sehingga kita mempunyai persamaan kuadrat dalam C_∞ , yaitu

$$kTC_\infty^2 - kTC_0C_\infty - C_0 = 0.$$

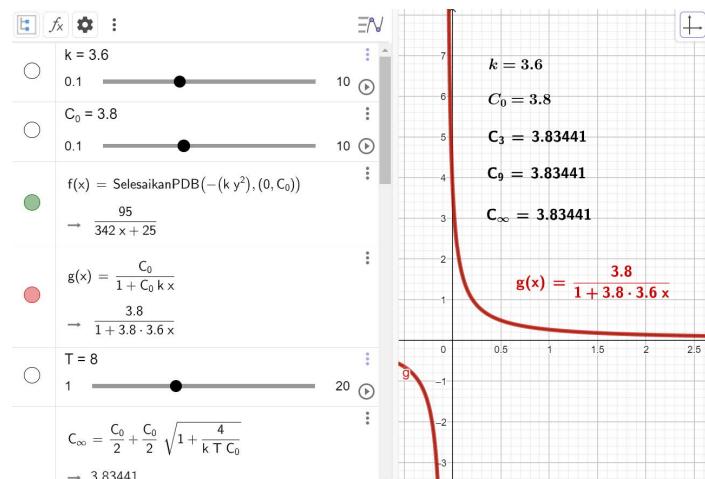
Dengan menyelesaikan persamaan kuadrat ini, kita mempunyai

$$C_\infty = \frac{kTC_0 \pm \sqrt{k^2T^2C_0^2 + 4kTC_0}}{2kT}.$$

Selanjutnya, kita mengambil hanya bagian positif saja, didapat

$$C_\infty = \frac{kTC_0 + \sqrt{k^2T^2C_0^2 + 4kTC_0}}{2kT} = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{kTC_0}}.$$

Ini menyiratkan bahwa $C_0 < C_n < C_\infty$, yaitu, konsentrasinya terbatas. Hasil ini kita berikan dengan simulasi data dalam Geogebra sebagai berikut:



3.2.3 Model Matematika Infeksi Influenza (Dalam Inang) [7]

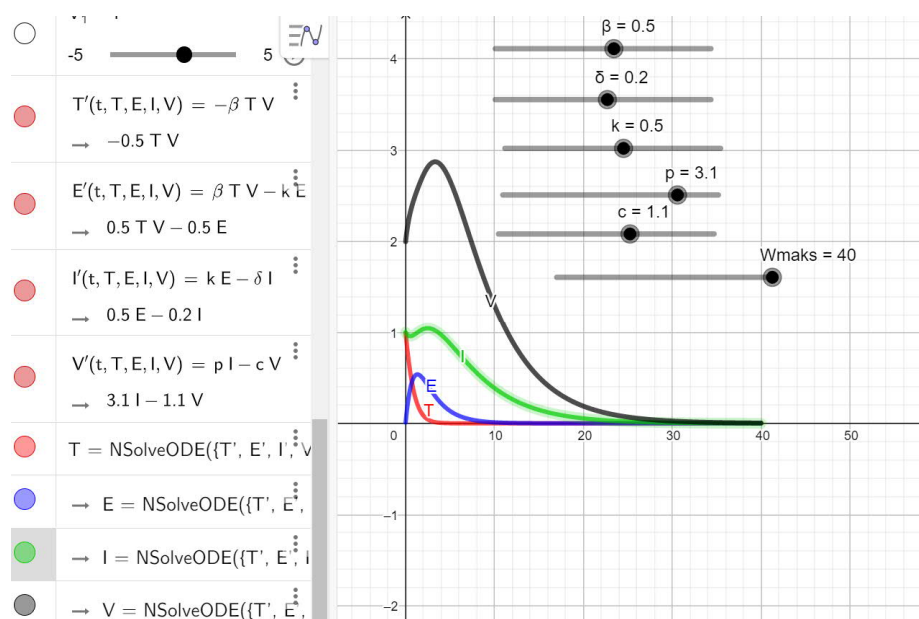
Infeksi influenza A memiliki kecenderungan untuk menyebabkan pandemik sesekali dengan angka kematian yang berpotensi tinggi. Infeksi awal hanya mempengaruhi saluran pernapasan bagian atas dan divisi atas *bronkus*. Namun, pada kasus yang parah, infeksi akan menyebar ke paru-paru bagian bawah. Model matematika dasar untuk menangkap dinamika virus influenza A dalam inang diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\beta TV \\ \frac{dI}{dt} &= \beta TV - \delta I \\ \frac{dV}{dt} &= pI - cV\end{aligned}$$

dimana T adalah sel target (yaitu, sel epitel saluran pernapasan), I adalah sel yang terinfeksi dan V adalah virus influenza A. Sel target terinfeksi oleh virus, yang segera mulai memproduksi virion (partikel virus) dengan tingkat (rate) β . Sel-sel yang terinfeksi mati dengan tingkat (rate) δ (oleh apoptosis). Sel-sel yang terinfeksi I menghasilkan virion mengalami kematian alami dengan tingkat (rate) c . Misalkan sel yang baru terinfeksi menjalani tahap laten E sebelum menjadi menular. Dalam hal ini, model yang dimodifikasi akan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\beta TV \\ \frac{dE}{dt} &= \beta TV - kE \\ \frac{dI}{dt} &= kE - \delta I \\ \frac{dV}{dt} &= pI - cV\end{aligned}$$

Model Matematika Influenza kita selesaikan secara numerik dan kita simulasikan dalam Geogebra sebagai berikut:



8.2.4 Model Epidemi [7]

Sebelum membahas model matematika epidemi, kita membahas beberapa sejarah tentang epidemi. Kita membahas hanya dua topik; Epidemi di Athena dan Pandemi Influenza. Beberapa pandemic lainnya bisa di lihat di [11]

8.2.4.1 Epidemi di Athena: 430-427 SM [11]

Pada musim panas tahun 430 SM, epidemi yang sangat ganas melanda kota Athena di Yunani. Menurut sejarawan Athena kontemporer Thucydides (yang sendiri menderita penyakit itu dan merupakan sumber informasi terpenting tentang penyakit itu), epidemi pertama-tama mempengaruhi daerah pelabuhan yang berdekatan (Piraeus) dan kemudian pindah ke pusat kota atas. Epidemi terjadi di awal Perang Peloponnesia, konflik besar antara negara-kota Athena dan Sparta dan sekutu masing-masing, yang dimulai pada 431. Penyakit itu menyertai pasukan militer Athena dalam kampanye 430 dan 429 mereka, baik di laut maupun melawan Chalcidian dari Trakia. Epidemi kembali dengan kuat pada tahun 427, setelah tampaknya mereda pada tahun 428. Kemudian menghilang, setidaknya dari catatan tertulis, meskipun mungkin telah menyebar ke barat sejauh Roma dalam dekade-dekade berikutnya.

Antara 25 dan 35 persen penduduk Athena mungkin telah meninggal dalam epidemi bencana ini, yang melanda semua segmen dan kelompok umur penduduk. Thucydides pada satu titik, misalnya, mengacu pada 1.050 kematian dalam detasemen 4.000 infanteri berat (hoplites).

Epidemi ini secara tradisional disebut "Wabah Athena," tapi hampir pasti bukan wabah pes atau pneumonia. Identifikasi penyebabnya (dalam istilah biomedis modern) masih belum pasti, meskipun cacar (atau mungkin campak) tampaknya paling mungkin. (Lihat "Masalah Sejarah yang Belum terselesaikan.")

MAKNA

Beberapa signifikansi epidemi Athena berasal dari waktu dan tempatnya, karena Athena di zaman klasiknya telah menjadi fokus studi Barat selama berabad-abad. Perang Peloponnesia telah lama melambangkan benturan sistem nilai yang dianggap penting bagi tradisi peradaban Barat. Thucydides, yang menceritakan kisahnya, menjadi salah satu contoh utama penulisan sejarah Barat. Tradisi pendidikan klasik yang mendominasi elit Barat selama beberapa abad (setidaknya sebelum pertengahan abad ke-20) meyakinkan bahwa para elit tersebut mungkin lebih mengenal Athena pada abad kelima SM. dibandingkan dengan sebagian besar dunia kontemporer mereka. Pidato Gettysburg Abraham Lincoln (1863) menggemakan tema dari Thucydides. Oleh karena itu, bagi banyak generasi orang Eropa dan Amerika yang berpendidikan baik, Wabah Athena adalah titik referensi yang akrab.



Gambar 8.2.4.1: Thucydides, 465-395 SM (Perpustakaan Kongres)

Pada masanya epidemi ini jelas merupakan peristiwa yang luar biasa, diperhatikan dengan cara yang tidak epidemi lainnya. Setidaknya dalam jangka pendek itu melemahkan Athena sementara negara-

kota terlibat dalam perang yang sangat serius dengan musuh yang kuat. Kelemahan itu menyebabkan meningkatnya kritik terhadap kebijakan lama pemimpin demokrasi Athena Pericles. Lawannya memperhatikan bahwa kebijakan perang Pericles termasuk memindahkan orang ke Athena dari pedesaan sekitar Attica, yang tampaknya memperburuk situasi epidemi.

Thucydides juga menceritakan gangguan serius dalam menghormati hukum dan norma-norma sosial setelah epidemi, dan itu mungkin pada gilirannya memainkan peran jangka panjang dalam apa yang dilihat banyak sarjana sebagai “runtuhnya moralitas Athena” selama dan setelahnya. Perang Peloponnesia (Baik 1983, 464).

Efek jangka pendek pada demografi Athena kemungkinan besar serius. Robert Sallares telah menyarankan bahwa wanita hamil mungkin menderita tingkat kematian yang sangat tinggi pada tahun 430-427, dengan hasil bahwa pada tahun-tahun perang penting tahun 412-409 Athena mengalami kesulitan mempertahankan tenaga militer. Klaim yang lebih besar bahwa epidemi memulai penurunan kekaisaran Athena (“pukulan terhadap masyarakat Athena yang tidak pernah pulih sepenuhnya,” dari McNeill 1976, 105) tampaknya lebih kecil kemungkinannya dan tentu saja lebih sulit untuk dibuktikan. (Lihat juga “Masalah Sejarah yang Belum terselesaikan.”)

LATAR BELAKANG

Penyakit yang dijelaskan oleh Thucydides mungkin menemukan Athena sebagai wilayah tanah perawan; tempat yang penduduknya tidak pernah terpapar sebelumnya. Tingginya angka kematian akibat penyakit itu, dan fakta bahwa Thucydides mengatakan bahwa gejalanya baru bagi orang-orang dan pengetahuan medis mereka, keduanya merupakan karakteristik epidemi tanah perawan. Selain itu, kemunculannya di tengah-tengah perang besar berarti bahwa orang-orang berpindah-pindah, baik dengan kekuatan militer maupun karena kebijakan Athena memusatkan populasi pedesaan di dalam kota. Peluang untuk penularan dengan demikian diperbesar.

BAGAIMANA ITU DIPAHAMI PADA SAATNYA

Penyakit ini membingungkan orang-orang Athena. Mereka tidak melihat alasan yang jelas untuk itu. Penyakit itu datang selama satu tahun yang sebelumnya tampak sehat, dan menyerang yang kuat sama mudahnya dengan yang lemah. Beberapa mencari penyebab jahat, percaya bahwa musuh Spartan telah meracuni reservoir. Banyak lagi yang percaya pada ketidaksenangan para dewa, tetapi pelaksanaan ritual untuk menenangkan mereka tidak berpengaruh. Orang-orang sezaman memperhatikan beberapa fenomena yang terkait dengan penyakit ini. Itu jelas menular; dokter yang merawat orang sakit berada pada risiko tertentu sebagai akibatnya. Dalam nada yang sama, Thucydides mencatat bahwa daerah yang paling padat penduduknya, kota bagian atas, sangat menderita. Dia juga mengamati bahwa orang-orang yang pernah terkena penyakit itu ternyata memperoleh kekebalan dari serangan lebih lanjut. Dan dia secara menyeluruh menggambarkan gejala penyakit, meskipun dia melakukannya sebagai orang awam yang cerdas, bukan dokter (lihat “Bacaan Sumber 1”).

BACAAN SUMBER 1

Sejarawan Athena kontemporer Thucydides, seorang saksi mata epidemi, menjelaskan dampaknya:

Tahun itu kemudian diakui telah bebas dari penyakit yang belum pernah terjadi sebelumnya; dan beberapa kasus seperti yang terjadi, semua ditentukan dalam hal ini. Namun, sebagai aturan, tidak ada penyebab yang nyata; tetapi orang-orang dalam keadaan sehat tiba-tiba diserang oleh panas yang hebat di kepala, dan kemerahan dan peradangan di mata, bagian dalam, seperti tenggorokan atau lidah, menjadi berdarah

dan mengeluarkan napas yang tidak wajar dan berbau busuk. Gejala ini diikuti dengan bersin dan suara serak, setelah itu rasa sakit segera mencapai dada, dan menghasilkan batuk yang keras. Ketika menetap di perut, itu mengganggu; dan keluarnya empedu dari segala jenis yang disebutkan oleh dokter terjadi, disertai dengan kesusahan yang sangat besar. Dalam kebanyakan kasus juga diikuti muntah-muntah yang tidak efektif, menghasilkan kejang hebat, yang dalam beberapa kasus berhenti segera setelah itu, pada kasus lain jauh lebih lambat. Secara eksternal tubuh tidak terlalu panas saat disentuh, juga tidak pucat dalam penampilannya, tetapi kemerahan, pucat, dan pecah menjadi pustula dan bisul kecil. Tetapi bagian dalamnya terbakar sehingga pasien tidak tahan untuk mengenakan pakaian atau linen bahkan dari deskripsi yang paling ringan, atau bahkan telanjang. Apa yang paling mereka sukai adalah menceburkan diri ke dalam air dingin, seperti yang memang dilakukan oleh beberapa orang sakit yang terabaikan, yang menceburkan diri ke dalam tangki hujan dalam penderitaan kehausan yang tak terpadamkan, meskipun tidak ada bedanya apakah mereka minum sedikit. atau banyak. Selain itu, perasaan sengsara karena tidak bisa istirahat atau tidur tidak pernah berhenti menyiksa mereka. Tubuh sementara itu tidak terbangun selama distemper berada pada puncaknya, tetapi bertahan dengan keajaiban melawan kerusakannya; jadi ketika mereka menyerah, seperti dalam kebanyakan kasus, pada hari ketujuh atau kedelapan karena peradangan internal, mereka masih memiliki kekuatan di dalamnya. Tetapi jika mereka melewati tahap ini, dan penyakitnya turun lebih jauh ke dalam perut, menyebabkan ulserasi hebat di sana disertai dengan diare parah, ini menyebabkan kelemahan yang umumnya berakibat fatal. Karena kelainan pertama kali menetap di kepala, menyebar dari sana ke seluruh tubuh, dan bahkan di tempat yang tidak terbukti mematikan, ia masih meninggalkan bekas di ekstremitas; karena itu menetap di bagian jamban, jari tangan dan kaki, dan banyak yang lolos dengan kehilangan ini, beberapa juga dengan mata mereka. Yang lain lagi diliputi dengan kehilangan ingatan pada pemulihan pertama mereka, dan tidak mengenal diri mereka sendiri atau teman-teman mereka. (Thucydides 1982, 115–116).

Dipahami (Thucydides melaporkan) bahwa penyakit itu berasal dari "Ethiopia," yang berarti Afrika di bawah Mesir, contoh lain dari tekad untuk menemukan penyakit di suatu tempat selain dari rumah; itu kemudian, katanya, datang untuk menginfeksi Mesir, Libya, dan Kekaisaran Persia sebelum muncul di Athena. Beberapa orang Athena ingat pepatah lama bahwa kematian akan menyertai perang dengan Spartan Dorian. (Dorians adalah salah satu dari beberapa cabang etnis yang berbeda dari Yunani kuno. Spartan adalah Dorians; Athena adalah Ionia, dan menganggap Spartan sebagai sedikit berbeda.) Yang lain mengingat sebuah ramalan yang dikonsultasikan oleh Spartan di mana dewa berjanji untuk bersama mereka Spartan dalam perang. Bahwa Sparta tampaknya tidak terlalu terpengaruh oleh epidemi ini memberikan kepercayaan pada kepercayaan itu.

TANGGAPAN

Bagi orang Athena abad kelima tidak ada perbedaan yang jelas antara kedokteran dan agama, sehingga tanggapan kota dan para dokternya menggabungkan unsur-unsur masing-masing. Seni medis tampaknya tidak berdaya, dan tidak ada pengobatan yang diterapkan secara konsisten bekerja untuk lebih dari beberapa korban. Ritual dan ritual yang dilakukan untuk dewa penyembuhan seperti Asklepios tidak membantu. Dalam keputusan mereka, orang-orang (terutama yang miskin dari pedesaan tanpa perumahan yang memadai di kota) berkumpul di sekitar air mancur umum mencari bantuan air dan tubuh mereka tergeletak di jalan-jalan.

Dalam masa kematian yang tinggi seperti itu, membuang mayat orang yang meninggal menjadi masalah, karena jumlah mereka dan kekurangan tenaga kerja yang disebabkan oleh perang dan epidemi. Adat penguburan diabaikan. Orang-orang yang "tidak tahu malu" (seperti yang disebut Thucydides) meletakkan mayat di atas tumpukan kayu yang didirikan untuk orang lain, dan Thucydides juga melaporkan melemahnya moralitas dan penghormatan terhadap hukum secara umum.

BACAAN SUMBER 2

Thucydides merefleksikan efek epidemi pada perilaku publik:

Ini juga bukan [pembuangan mayat secara ilegal] satu-satunya bentuk pemborosan tanpa hukum yang berasal dari wabah. Orang-orang sekarang dengan tenang melakukan apa yang sebelumnya mereka lakukan di sudut dan tidak hanya sesuka hati, melihat transisi cepat yang dihasilkan oleh orang-orang dalam kemakmuran yang tiba-tiba mati dan mereka yang sebelumnya tidak memiliki apa-apa untuk properti mereka.



Gambar 8.2.4.2: "Wabah Athena," sebuah lukisan karya Nicolas Poussin (1594-1665). (Bettmann/Corbis)

Jadi mereka memutuskan untuk menghabiskan waktu dengan cepat dan menikmati diri mereka sendiri, menganggap hidup dan kekayaan mereka sebagai hal yang sama dalam sehari. Ketekunan dalam apa yang disebut orang sebagai kehormatan tidak populer bagi siapa pun, sangat tidak pasti apakah mereka akan terhindar untuk mencapai tujuan; tetapi telah ditetapkan bahwa kenikmatan saat ini, dan semua yang berkontribusi padanya, adalah terhormat dan berguna. Takut pada dewa atau hukum manusia tidak ada yang bisa menahan mereka. Adapun yang pertama, mereka menilai sama saja apakah mereka menyembah mereka atau tidak, karena mereka melihat semua sama-sama binasa; dan untuk yang terakhir, tidak ada yang berharap untuk hidup untuk dibawa ke pengadilan karena pelanggaran mereka, tetapi masing-masing merasa bahwa hukuman yang jauh lebih berat telah dijatuhkan kepada mereka semua dan menggantung di atas kepala mereka, dan sebelum ini jatuh, itu masuk akal. untuk menikmati hidup sedikit. (Thucydides 1982,118; pembaca mungkin ingin membandingkan kisah ini dengan "Black Death" oleh

Boccaccio, yang ditulis pada abad keempat belas; lihat bab "Pandemi Wabah Kedua, 1346–1844")

MASALAH SEJARAH YANG BELUM TERSELESAIKAN

Wabah Athena hampir pasti bukan wabah, tetapi identifikasi positif dari penyakit yang bertanggung jawab tetap sulit dipahami. Deskripsi oleh Thucydides tidak menyebutkan bubo yang khas dari penyakit pes, sementara durasi kasus individu membuat wabah pneumonia yang fatal dengan cepat sama tidak mungkin. Kandidat lain, tifus, tidak menular dari orang ke orang, tergantung penyebarannya pada vektor serangga (kutu), sedangkan epidemi Athena tampaknya bergerak terlalu cepat (terutama jika melompat ke Athena dari wilayah Persia) untuk menjadi apa pun kecuali di udara. Robert Sallares, dalam tinjauan yang cermat terhadap ekologi luas dari situasi tersebut, dengan meyakinkan menyatakan bahwa cacar adalah penyebab yang paling mungkin. Kematian yang dilaporkan dari epidemi cacar yang lebih baru di tanah perawan konsisten dengan yang dilaporkan oleh Thucydides; cacar adalah virus di udara yang bergerak lebih cepat di tempat-tempat padat penduduk (dan sebenarnya membutuhkan tingkat kepadatan populasi manusia tertentu untuk mempertahankan dirinya sendiri); dan sementara deskripsi Thucydides tidak secara khusus menyebutkan bopeng, bagian lain dari akun itu tampaknya konsisten dengan cacar. Campak, kemungkinan lain, memiliki banyak argumen kausal yang sama dengan cacar, tetapi Thucydides tidak mengacu pada karakteristik ruamnya. Beberapa penulis modern telah menyarankan dua penyakit bertindak bersamaan, tetapi Thucydides tidak berpikir demikian. Literatur sejarah dan medis modern yang luas juga telah mengajukan banyak saran lain, di antaranya tularemia (demam kelinci), glanders (terutama penyakit kuda), dan ergotisme (dari makan biji-bijian yang terinfeksi jamur). Tetapi sampai informasi lebih lanjut muncul, cacar tampaknya menjadi kandidat yang paling mungkin.

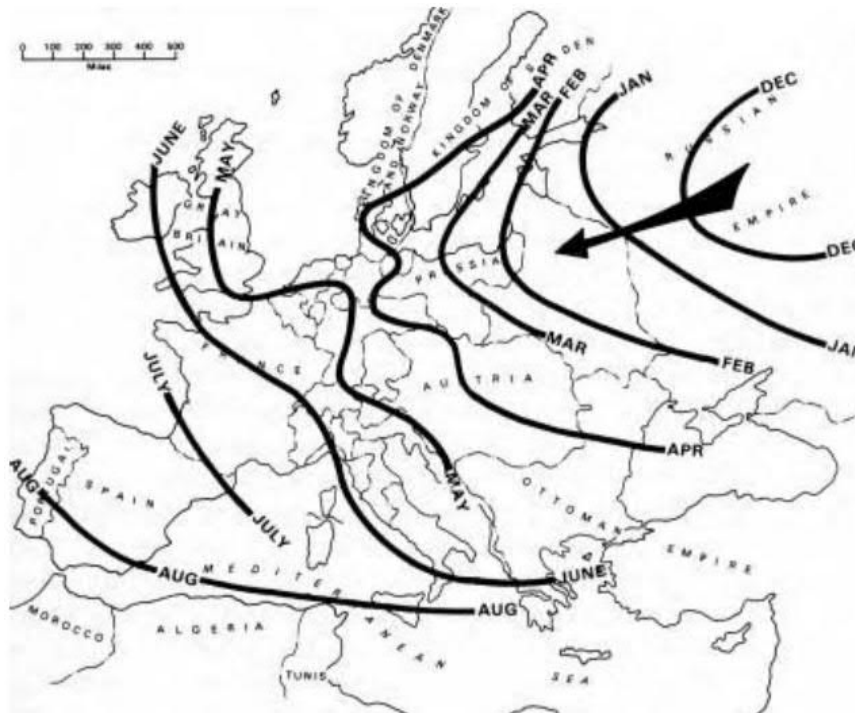
Efek jangka panjang dari epidemi ini masih bersifat dugaan. Tingkat populasi di Athena mungkin telah diturunkan pada saat yang genting sebagai akibat dari epidemi, yang mungkin telah berkontribusi pada kekalahan terakhir Athena dalam Perang Peloponnesia yang panjang melawan Sparta. Tetapi lebih sulit untuk memperdebatkan penurunan demografis yang panjang, karena populasi manusia biasanya pulih dengan cukup cepat dari satu epidemi besar; hanya guncangan epidemi yang berulang yang dapat menekan tingkat populasi untuk jangka waktu yang lama. (Lihat, misalnya, "Smallpox Epidemic in Japan, 735–737," dan "Second Plague Pandemic, 1346–1844.") Jadi, sementara epidemi 430–427 mungkin memiliki efek langsung yang serius di Athena selama Perang Peloponnesia, argumen yang menghubungkannya dengan penurunan kekuasaan Athena dalam jangka panjang pada abad keempat SM kurang jelas.

Juga sulit untuk dinilai adalah efek jangka panjang epidemi pada moral (dan moralitas) populer di Athena. Donald Kagan (2003, 78) menyatakan bahwa pengabaian adat penguburan menggambarkan "kepanikan, ketakutan, dan runtuhnya ikatan peradaban yang paling suci," dan John Fine (1983, 464) berpendapat bahwa "kengerian" semacam itu telah "berdampak jauh" pada moralitas Athena. Setidaknya, pengalaman epidemi 430–427 harus dipertimbangkan ketika isu spekulatif besar tersebut diangkat.

8.2.4.2. PANDEMI INFLUENZA, 1781-1782

Sebuah pandemi influenza melanda Eropa pada akhir 1781 dan 1782. Pertama kali diketahui di Rusia, penyakit ini berpindah dari timur ke barat, mungkin berasal dari wilayah Asia tengah Kekaisaran Rusia. Influenza mencapai Moskow pada bulan Desember 1781. Dari sana lalu lintas manusia membawanya ke pantai Laut Baltik: St. Petersburg terkena dampaknya pada Januari 1782; Finlandia, Tallinn

(Estonia), Riga (Latvia), dan Prusia Timur pada bulan Februari; Pomerania pada bulan Maret; sisa Jerman utara, Stockholm, dan Kopenhagen pada bulan April. Pada saat itu influenza telah menyertai arus lalu lintas lain ke Eropa tengah, dengan Hongaria melaporkan penyakit itu pada bulan April, dan Wina dan Praha pada bulan Mei. Pada bulan Mei influenza juga melonjak ke Inggris, mencapai London terlebih dahulu, dan kemudian (mengikuti lalu lintas laut utama antara London dan Newcastle) timur laut Inggris. Pada bulan Juni, sisa Kepulauan Inggris telah terpengaruh, seperti halnya Negara-Negara Rendah, Prancis utara, dan Jerman selatan. Tempat terakhir yang dicapai oleh influenza di Eropa adalah di Mediterania barat: Italia utara dan Prancis selatan pada bulan Juli, Spanyol dan Portugal pada bulan Agustus.



Gambar 8.2.4.3: Penyebaran influenza di Eropa pada 1781-1782. (Patterson, K. David, Pandemic Influenza 1700-1900, 1986. Dicitak ulang atas izin Rowman and Littlefield Publishers, Inc.)

Tingkat kematian dalam pandemi ini rendah, tetapi tingkat morbiditasnya/"kondisi menderita suatu penyakit atau kondisi medis" (dalam kata-kata sejarawan modern) "sangat besar" (Patterson 1986, 23). Jutaan orang, mungkin tiga perempat dari populasi Eropa, jatuh sakit dalam delapan bulan pertama tahun 1782, sebuah angka yang diilustrasikan oleh statistik lokal tertentu seperti perkiraan yang dibuat di Munich. Meskipun tingkat kematian yang rendah dari apa yang (bagi kebanyakan orang) penyakit ringan, bagi mereka yang sudah menderita gangguan pernapasan (termasuk orang tua dan konsumtif) influenza bisa berakibat fatal. Oleh karena itu, kematian di Eropa mungkin berjumlah "ratusan ribu" (Patterson 1986, 24). London Bills of Mortality melonjak ke atas pada minggu kedua dan ketiga bulan Juni ketika pandemi influenza mencapai puncaknya di sana.

MAKNA

Skalanya yang tipis membuat pandemi influenza 1781-1782 sangat penting. Meskipun sedikit diperhatikan dalam catatan sejarah, itu berdiri (sekali lagi dalam kata-kata Patterson) "di antara wabah penyakit yang paling luas dan dramatis dalam sejarah" (Patterson 1986, 20). Pengalaman Eropa dengan pandemi menyarankan dua poin tentang penyakit secara umum. Pertama, pergerakannya dari timur ke barat mungkin telah mengkonfirmasi kecurigaan bahwa Asia berbahaya, bahwa Rusia adalah

biadab, dan bahwa Turki Utsmani bahkan lebih berbahaya lagi. Kedua dan yang lebih kontroversial pada akhir abad kedelapan belas, gerakannya yang nyata melawan angin barat-ke-timur yang berlaku menyatakan bahwa itu (dan mungkin penyakit lain atau semua) dibawa oleh penularan dari orang ke orang, bukan oleh faktor lingkungan seperti arus udara. Pemikir Pencerahan umumnya menyukai penjelasan lingkungan, tetapi pengalaman seperti pandemi 1781-1782 berkontribusi pada ketegangan dan ketidakpastian yang berkelanjutan tentang penularan penyakit.

LATAR BELAKANG

Influenza, penyakit virus yang ditularkan dari orang ke orang melalui sistem pernapasan, selalu bergerak di sepanjang jalur lalu lintas manusia. Pada akhir abad kedelapan belas, ia paling mudah bergerak melalui air, sehingga jalur pandemi 1781-1782 menggambarkan rute perdagangan yang ditularkan melalui air di laut sempit Eropa. Lalu lintas darat juga penting, tetapi umumnya jauh lebih lambat; jalan ke Italia melintasi Pegunungan Alpen, atau ke Spanyol melintasi Pyrenees, lebih sulit, dan influenza mencapai negara-negara itu kemudian.

Jika pandemi influenza ini benar-benar dimulai di Asia Tengah, munculnya Rusia sebagai peserta dalam urusan Eropa (terutama yang dikemukakan oleh Peter I pada awal abad kedelapan belas) tentu membuat penularan influenza ke Eropa lebih mungkin terjadi. Ketika Peter the Great menciptakan ibu kota barunya, St. Petersburg, sebagai "jendela ke Barat" di Baltik, ia mungkin telah memfasilitasi pergerakan patogen serta perdagangan dan budaya.

BAGAIMANA ITU DIPAHAMI PADA SAATNYA

BACAAN SUMBER 1

Seorang pengamat Inggris kontemporer merangkum laporan tentang penyebaran influenza, memperhatikan luasnya yang sangat besar, serangan khususnya pada orang dewasa yang lebih tua, durasinya yang singkat, dan misteri lanjutan tentang cara penularannya:

Segera setelah ia menemukan dirinya di kota berpenduduk mana pun, ia menyebar dengan sangat cepat ke semua penduduk dengan pangkat dan kondisi apa pun; dan itu sama sekali tidak memihak pada usia, jenis kelamin, atau temperamen apa pun. Di London, bagaimanapun, itu diamati untuk mempengaruhi proporsi anak-anak yang jauh lebih kecil daripada orang dewasa. Dari tujuh ratus anak laki-laki di Rumah Sakit Kristus, hanya empat belas yang menderita penyakit itu, dan mereka sedikit saja. Itu memang umumnya ringan dengan anak-anak di mana-mana. Universalitas Influenza luar biasa, proporsi penduduk yang terkena dampaknya di beberapa tempat diperkirakan tiga perempat, di tempat lain, empat perlima dari keseluruhan . . . Namun kemarahannya tidak terlalu fatal, atau berlanjut lama. Sangat sedikit yang meninggal karenanya; dari mereka yang meninggal, sebagian besar adalah orang tua, penderita asma, atau yang telah menjadi lemah karena penyakit sebelumnya. Kelanjutan distemper di satu tempat tidak lebih dari enam minggu. . . Durasinya dengan masing-masing individu yang diserang sama beragamnya dengan tingkat kekerasan yang dilakukan. Itu jarang menahan siapa pun di atas dua minggu. . . Penularan penyakit tidak pasti: Dalam beberapa kasus diamati bahwa Influenza tidak muncul di tempat-tempat tertentu sampai seseorang atau lebih tiba di tempat-tempat itu baik benar-benar bekerja di bawah penyakit, atau datang segera dari tempat lain, yang penduduknya telah telah terpengaruh olehnya selama beberapa hari; sementara, dalam kasus lain, pengamat yang sangat penuh perhatian dan cerdas tidak dapat melacak komunikasi apa pun antara keluarga yang pertama kali diserang di kota

tempat mereka tinggal, dan tempat lain, tempat penyakit itu pertama kali muncul. (Leslie 1783, 55–58, 60).

TANGGAPAN

Banyak kasus influenza yang tidak terlihat tumpang tindih dengan berbagai penyakit lain, pilek, radang selaput lendir hidung, dan sejenisnya. Seringkali ini tidak diperlakukan sama sekali; banyak orang menggunakan kearifan tradisional dan pengobatan herbal, dan sementara dokter abad kedelapan belas mungkin telah menggunakan rejimen pendarahan-dan-pembersihan yang mereka gunakan untuk penyakit yang lebih drastis, pendekatan mereka terhadap influenza lebih sering ditujukan hanya untuk menghilangkan gejala.

BACAAN SUMBER 2

Pengamat Inggris yang sama membahas beberapa kemungkinan:

Karena efek penyakit ini berbeda pada subjek yang berbeda, tidak ada metode umum penyembuhan yang dapat diikuti secara rasional. Banyak yang memang sangat sedikit tidak sehat, sehingga membutuhkan sedikit atau tanpa obat. Tidak ada lagi yang diinginkan untuk menyembuhkan mereka, selain berpantang, selama dua atau tiga hari, dari makanan hewani dan minuman keras yang difermentasi; dan untuk menggunakan minuman yang lembut, encer, dan hangat.

Satu-satunya hal yang diperdebatkan dalam pengobatan penyakit ini adalah tentang kewajaran pendarahan. Tidak diragukan lagi, veneseksi [pendarahan] tidak selalu diperlukan atau disarankan; juga, sebaliknya, tidak menghilangkannya selalu aman. Setiap kali gejala radang selaput dada atau peripneumoni muncul, kepatutan perdarahan tidak dapat diragukan lagi. Tetapi bahkan dalam kasus di mana tidak ada gejala peradangan yang tampak jelas, banyak dokter yang terpelajar dan berpengalaman . . . memerintahkan pendarahan tanpa ragu-ragu. . . (Leslie 1783, 72-73, 75-76).

MASALAH SEJARAH YANG BELUM TERSELESAIKAN

Pandemi tahun 1781-1782 ini adalah salah satu yang paling serius dari sejumlah besar epidemi influenza dalam sejarah Barat (dan dalam beberapa kasus dunia). Pada titik ini setidaknya, identitas virus yang bertanggung jawab untuk itu tidak diketahui; hubungannya dengan pandemi influenza kemudian, terutama yang besar lainnya tahun 1889-1890 dan 1918-1919 (lihat “Pandemi Influenza, 1889–1890” dan “Pandemi Influenza, 1918-1919”), oleh karena itu tetap menjadi bahan spekulasi. Ini berbeda dari kebanyakan influenza lainnya karena keluhan musim semi dan musim panas, daripada keluhan musim gugur dan musim dingin. Ini tampaknya mempengaruhi populasi tua yang rentan lebih serius daripada orang dewasa muda yang sehat, dan dengan cara itu mungkin berbeda dari pandemi 1918-1919. Tetapi pengetahuan yang lebih tepat tentang struktur usia korbannya akan sangat membantu.

Sementara bukti menunjukkan asal Asia tengah untuk pandemi ini, beberapa orang sezamannya percaya itu dimulai di China. Yang lain mengaitkannya dengan India tenggara, di mana penyakit serupa ditemukan pada November 1781.

Selanjutnya kita membahas berbagai model epidemi di mana penekanan diberikan pada pemodelan. Epidemiologi matematika adalah penggunaan model matematika untuk memprediksi perjalanan penyakit menular dan untuk membandingkan efek dari strategi kontrol diferensial.

Dalam model epidemi, populasi dibagi menjadi tiga kelas utama, yaitu kelas rentan, dilambangkan dengan $S(t)$ (orang yang rentan terhadap penyakit atau yang dapat dengan mudah terinfeksi penyakit), kelas terinfeksi dilambangkan dengan $I(t)$ (orang yang sudah menderita penyakit), dan kelas sembuh, dilambangkan dengan $R(t)$ (orang yang telah sembuh dari penyakit). Seseorang dapat mendefinisikan lebih banyak kelas, jika situasinya menuntut, untuk modifikasi dalam model.

8.2.4.3 Model Matematika Rentan-Infektif:

Misalkan suatu populasi terdiri dari $(n + 1)$ orang dimana n orang rentan dan hanya satu yang terinfeksi, sehingga $S(t) + I(t) = n + 1, S(0) = n, I(0) = 1$. Seseorang yang rentan terinfeksi ketika dia melakukan kontak dengan orang yang terinfeksi dan secara matematis kita dapat mengatakan bahwa laju peningkatan kelas yang terinfeksi sebanding dengan produk dari orang yang rentan dan terinfeksi. Oleh karena itu, kelas rentan juga menurun pada tingkat yang sama. Sistem persamaan diferensial yang mengatur model ini adalah :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI \quad (\alpha > 0)\end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha S(n + 1 - S) \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha I(n + 1 - I)\end{aligned}$$

Mengintegralkan dan menggunakan kondisi awal kita dapatkan,

$$S(t) = \frac{n(n + 1)}{n + e^{(n+1)\beta t}} \quad \text{dan} \quad I(t) = \frac{n + 1}{ne^{-(n+1)\beta t} + 1}$$

pada $t \rightarrow \infty, S(t) \rightarrow 0$ dan $I(t) \rightarrow \infty$

Oleh karena itu, kita menyimpulkan bahwa dengan bertambahnya waktu, semua orang yang rentan akan terinfeksi.

8.2.4.4 Model Matematika *Susceptible-Infective-Susceptible*:

Penyempurnaan sederhana dari model sebelumnya telah dibuat dan dinamai model SIS dimana diasumsikan bahwa orang yang terinfeksi memiliki kemampuan untuk pulih dan pindah ke kelas rentan pada tingkat β (katakanlah). Kemudian, kita mendapatkan model SIS sebagai:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I\end{aligned}$$

Karena $S(t) + I(t) = n + 1$, kita mendapatkan:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= [\alpha(n + 1) - \beta]I - \alpha I^2 \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(n + 1) - [\beta + \alpha(n + 1)]S + \alpha S^2\end{aligned}$$

Integralkan, kita mendapatkan:

$$S(t) = \frac{-e^{\beta t c_1}(n+1) + e^{(n+1)\alpha(t+c_1)}\beta}{-e^{\beta t c_1}(n+1) + e^{(n+1)\alpha(t+c_1)}\alpha}$$

$$I(t) = \frac{(\alpha + n\alpha - \beta)e^{(n+1)t\alpha + \beta c_2}}{-e^{t\beta + (n+1)\alpha c_1} + e^{(n+1)t\alpha + \beta c_2}\alpha}$$

dimana c_1 dan c_2 sebarang konstanta integrasi. Untuk $t \rightarrow \infty$, $S(t) \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ dan $I(t) = n + 1 - \frac{\beta}{\alpha}$, asalkan $(n+1)\alpha - \beta > 0$. Oleh karena itu, dalam hal ini, sebagian kecil $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ dari orang yang rentan akan berada di sana, yang belum terinfeksi atau orang yang terinfeksi telah pulih dan menjadi rentan lagi.

8.2.4.5 Model Matematika Susceptible-Infective-Removed:

Model ini dikembangkan oleh Kermack dan McKendrick dan diberikan oleh himpunan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Seperti sebelumnya, diasumsikan bahwa yang rentan menjadi terinfeksi ketika mereka bersentuhan satu sama lain dan sebagian kecil dari kelas yang terinfeksi (βI) pulih (*recovery*) dari penyakit dan pindah ke kelas yang terinfeksi.

Model Matematika Rentan-Infektif-Dihapus-Rentan:

Penyempurnaan dari Model SIR dapat dibuat dengan mengasumsikan bahwa orang yang sembuh menjadi rentan lagi karena kehilangan kekebalan pada tingkat yang sebanding dengan populasi di kelas pemulihan R , dengan konstanta proporsionalitas. Persamaan berikut menggambarkan model matematikanya:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R$$

Di sini, α, β, γ adalah konstanta positif. Harap dicatat bahwa dalam kedua model ini (SIR dan SIRS), jumlah populasi tidak berubah, yaitu adalah,

$$S(t) + I(t) + R(t) = n + 1.$$

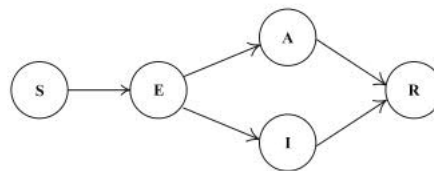
Model *Susceptible-Infective-Carry*:

Di sini, kita mempertimbangkan model demologi dengan pembawa (*carry*). Misalnya, malaria disebarkan melalui nyamuk, yang merupakan pembawa. Oleh karena itu, ketika kelas rentan bersentuhan dengan pembawa, ia menjadi terinfeksi. Harap dicatat bahwa dalam kasus ini, kelas rentan yang bersentuhan dengan kelas yang terinfeksi tidak menghasilkan kelas yang terinfeksi. Juga diasumsikan bahwa orang yang terinfeksi dapat pulih dan menjadi rentan lagi. Persamaan berikut menggambarkan model matematikanya:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SC + \beta I \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SC - \beta I \\ \frac{dC}{dt} &= -\gamma C\end{aligned}$$

8.2.4.6 Model Matematika Epidemi Influenza SEAIR:

Model Kermack-McKendrick, yang merupakan model SIR dasar, dianggap cocok untuk model epidemi influenza karena terbukti berguna dalam memprediksi beberapa aspek perjalanan wabah influenza lokal di Inggris Raya dan Rusia. Namun, model SIR dasar untuk epidemi influenza memiliki beberapa kelemahan. Model tersebut membuat asumsi penyederhanaan tertentu yang signifikansinya dapat diuji hanya setelah penelitian lapangan yang ekstensif dan mahal. Oleh karena itu, model SIR dasar diperluas ke model SEAIR dengan memperkenalkan dua kompartemen tambahan E dan A . Ketika seseorang terinfeksi virus influenza, waktu yang singkat berlalu antara infeksi dan perkembangan penyakit, yang disebut masa inkubasi. Kelas orang yang melalui tahap transisi dari terinfeksi ke menular ini disebut kelas E . Di kelas E , sejumlah besar orang tidak pernah mengalami gejala, tetapi mereka mampu menularkan penyakit. Kita menyebutnya kelas A .

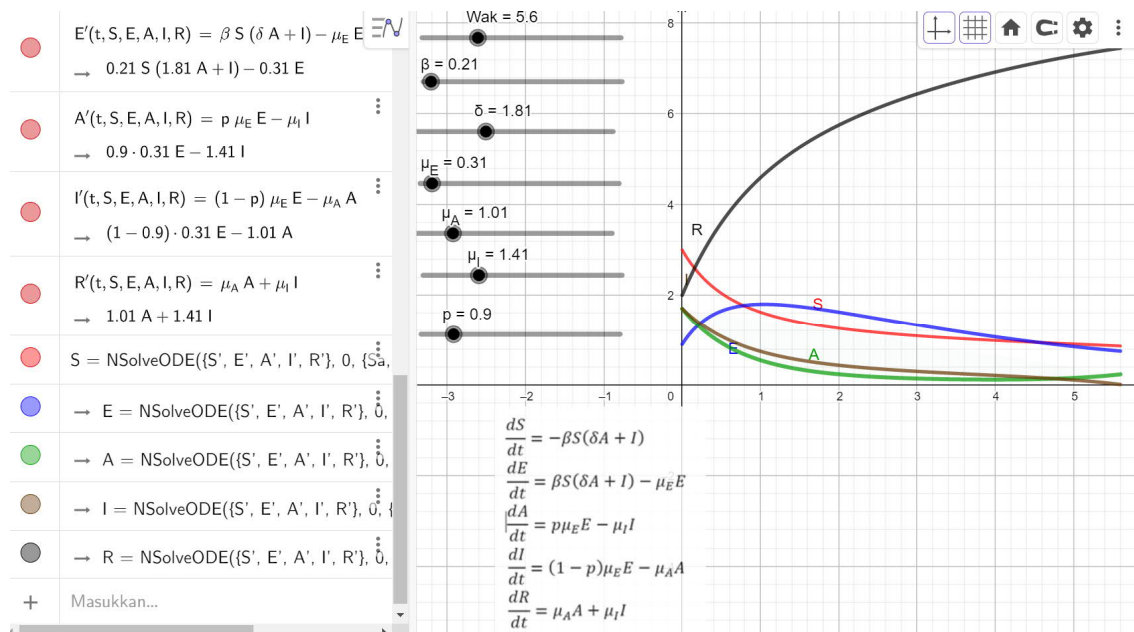


Gambar 8.2.1: Bagan alur model Kermack-McKendrick SEAIR yang dimodifikasi

Dari diagram alur (lihat Gambar 8.2.1), sistem persamaan yang menggambarkan model SEAIR diberikan oleh:

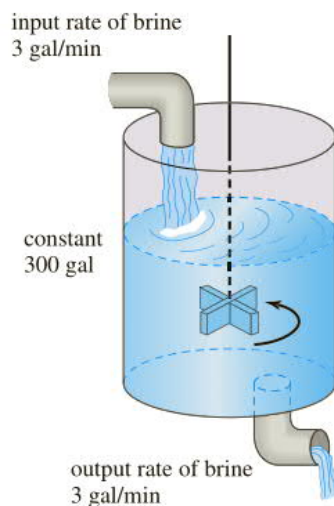
$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(\delta A + I) \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S(\delta A + I) - \mu_E E \\ \frac{dA}{dt} &= p\mu_E E - \mu_I I \\ \frac{dI}{dt} &= (1-p)\mu_E E - \mu_A A \\ \frac{dR}{dt} &= \mu_A A + \mu_I I\end{aligned}$$

Kita akan membuat simulasi dari model SEAIR menggunakan Geogebra dengan data simulasi adalah : $\beta, \delta, \mu_E, p, \mu_I$ dan μ_A .



8.2.5 Model Matematika Pencampuran Larutan [8]:

Pencampuran dua larutan garam dengan konsentrasi yang berbeda menghasilkan persamaan diferensial orde pertama untuk jumlah garam yang terkandung dalam campuran. Misalkan kita anggap bahwa tangki pencampur besar awalnya menampung 300 galon air garam (yaitu, air di mana sejumlah pon garam telah dilarutkan). Larutan air garam lainnya dipompa ke dalam tangki besar dengan kecepatan 3 galon per menit; konsentrasi garam dalam aliran-masuk ini adalah 2 pon per galon. Ketika larutan di dalam tangki diaduk dengan baik, ia dipompa keluar dengan kecepatan yang sama dengan larutan yang masuk. Lihat Gambar berikut.



Gambar : Tangki Pencampur

Jika $A(x)$ menyatakan jumlah garam (diukur dalam pound) dalam tangki pada waktu x , maka laju perubahan $A(x)$ adalah laju bersih:

$$\frac{dA}{dx} = \left(\begin{array}{c} \text{laju masukan} \\ \text{garam} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{laju keluaran} \\ \text{garam} \end{array} \right) = R_{\text{in}} - R_{\text{out}} \quad (8.2.1)$$

Laju masukan R_{in} di mana garam masuk ke tangki adalah produk dari konsentrasi masuk garam dan laju masuk cairan. Perhatikan bahwa R_{in} diukur dalam pound per menit:

$$R_{in} = (2 \text{ lb/gal}) \cdot (3 \text{ gal/min}) = 6 \text{ lb/min},$$

dimana (2 lb/gal) adalah konsentrasi garam dalam aliran masuk, (3 gal/min) adalah laju masukan air garam dan 6 lb/min adalah laju masukan garam.

Sekarang, karena larutan dipompa keluar dari tangki dengan laju yang sama dengan yang dipompa masuk, jumlah galon air garam dalam tangki pada waktu x adalah konstan konstan 300 galon. Oleh karena itu konsentrasi garam di dalam tangki dan juga di aliran keluar adalah $c(x) = \frac{A(x)}{300} \text{ lb/gal}$, jadi laju keluaran R_{out} garam adalah

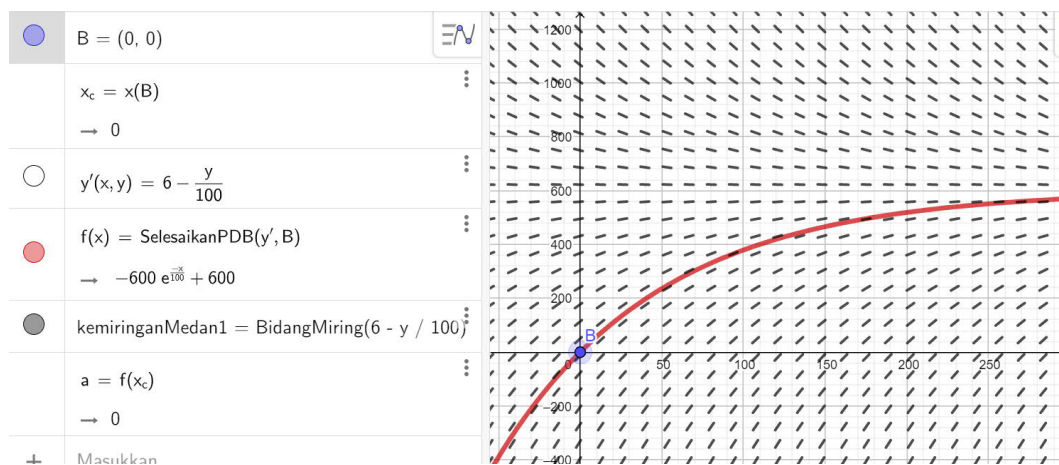
$$R_{out} = \left(\frac{A(x)}{300} \text{ lb/gal} \right) \cdot (3 \text{ gal/min}) = \frac{A(x)}{100} \text{ gal/min}$$

dimana $\left(\frac{A(x)}{300} \text{ lb/gal} \right)$ adalah konsentrasi garam dalam aliran keluar, (3 gal/min) dan $\frac{A(x)}{100} \text{ lb/min}$ adalah laju keluaran garam.

Maka laju bersih (8.2.1) menjadi

$$\frac{dA(x)}{dx} = 6 - \frac{A(x)}{100}. \quad (8.2.2)$$

Kita, akan selesaikan (8.2.2) untuk $A(x_c)$ dan kita simulasikan untuk beberapa nilai x_c yang kita sajikan dalam bidang phase menggunakan Geogebra, hasilnya sebagai berikut:



Nilai x_c bisa berubah dengan menggerakkan/menggeser titik B .

Jika r_{in} dan r_{out} menunjukkan laju masukan dan keluaran umum dari larutan air garam (jangan bingungkan simbol ini dengan R_{in} dan R_{out} , yang merupakan laju masukan dan keluaran garam), maka ada tiga kemungkinan: $r_{in} = r_{out}$, $r_{in} > r_{out}$ dan $r_{in} < r_{out}$. Dalam dua kasus terakhir, jumlah galon air garam dalam tangki meningkat ($r_{in} > r_{out}$) atau menurun ($r_{in} < r_{out}$) pada laju bersih $r_{in} - r_{out}$. Untuk lebih memahami hal ini pembaca dipersilahkan mengerjakan Latihan berikut:

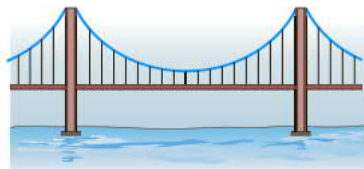
1. Misalkan suatu tangki pencampur besar awalnya menampung 300 galon air di mana 50 pon garam telah dilarutkan. Larutan air garam lainnya dipompa ke dalam tangki dengan laju 3 gal/menit, dan ketika larutan diaduk dengan baik, larutan tersebut kemudian dipompa keluar dengan laju lebih lambat yaitu 2 galon/menit > 0 . Jika konsentrasi larutan yang masuk adalah

2 lb/gal, tentukan persamaan diferensial untuk jumlah garam $A(x)$ dalam tangki pada waktu $x > 0$. Selesaikan juga masalah ini menggunakan Geogebra.

2. Tentukan persamaan diferensial dalam Soal 1, jika larutan yang diaduk dengan baik dipompa keluar dengan laju lebih cepat 3,5 gal/menit? Selesaikan juga masalah ini menggunakan Geogebra.
3. Generalisasi model yang diberikan dalam persamaan (8.2.2) bagian ini dengan mengasumsikan bahwa tangki besar awalnya berisi N_0 jumlah galon air garam, r_{in} dan r_{out} adalah laju input dan output dari air garam, masing-masing (diukur dalam galon per menit), c_{in} adalah konsentrasi garam dalam aliran masuk, $c(x)$ konsentrasi garam dalam tangki serta aliran keluar pada waktu x (diukur dalam pon garam per galon), dan $A(x)$ adalah jumlah garam dalam tangki pada waktu $x > 0$. Selesaikan juga masalah ini menggunakan Geogebra.

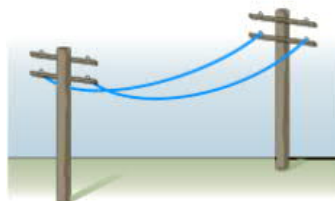
8.2.6 Model Matematika KABEL TEGANTUNG [8]:

Misalkan kabel, kawat, atau tali berat yang fleksibel digantungkan di antara dua penyangga vertikal. Contoh fisiknya dapat berupa salah satu dari dua kabel yang menopang dasar jalan jembatan gantung seperti yang ditunjukkan pada Gambar berikut:



Gambar: Kabel jembatan gantung

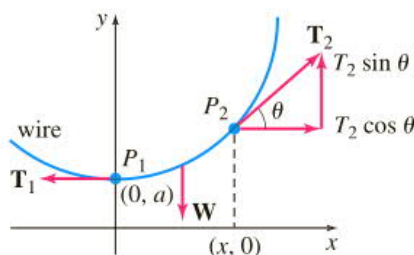
atau kabel telepon panjang yang digantung di antara dua tiang seperti yang ditunjukkan pada Gambar berikut:



Gambar: Kabel digantung di antara penyangga vertikal

Tujuan kita adalah membangun model matematika yang menggambarkan bentuk yang diasumsikan oleh kabel semacam itu.

Untuk memulai, mari kita setuju untuk memeriksa hanya sebagian atau elemen kabel antara titik terendah P_1 dan sembarang titik P_2 . Seperti digambar dengan warna biru pada Gambar berikut:



Gambar: Elemen kabel

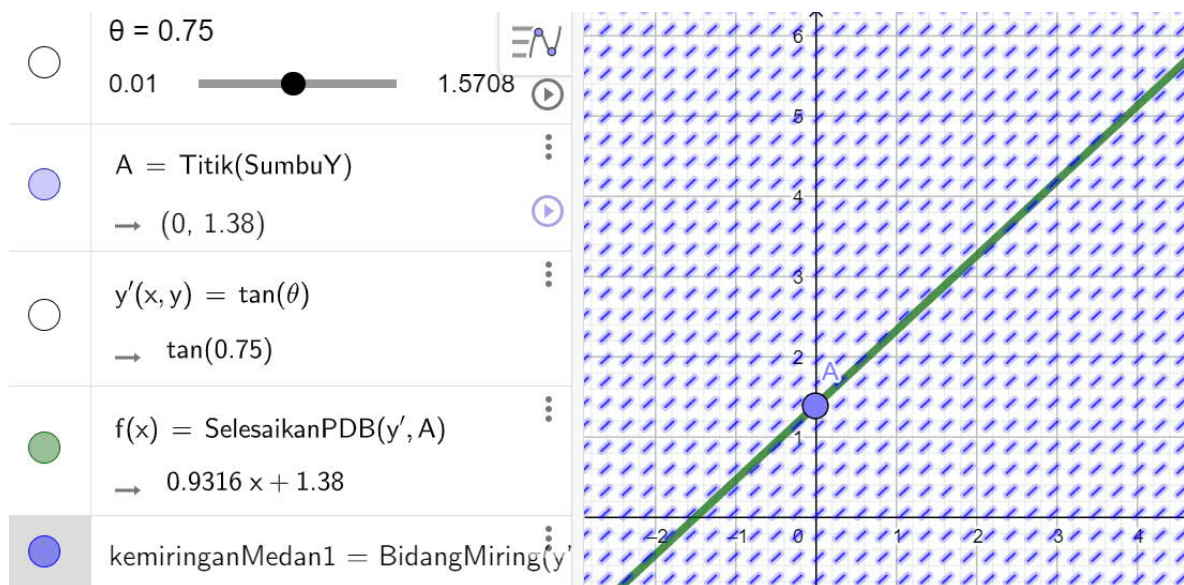
elemen kabel ini adalah kurva dalam sistem koordinat persegi panjang dengan sumbu y dipilih untuk melewati titik terendah P_1 pada kurva dan sumbu x dipilih unit di bawah P_1 . Tiga gaya bekerja pada kabel: tegangan $\mathbf{T}_1$ dan $\mathbf{T}_2$ pada kabel yang bersinggungan dengan kabel masing-masing di P_1 dan P_2 , dan bagian $\mathbf{W}$ dari beban vertikal total antara titik P_1 dan P_2 . Misalkan $T_1 = |\mathbf{T}_1|$, $T_2 = |\mathbf{T}_2|$ dan $W = |\mathbf{W}|$ menunjukkan besaran vektor-vektor. Sekarang tegangan $\mathbf{T}_2$ berubah menjadi komponen horizontal dan vertikal (jumlah skalar) $T_2 \cos \theta$ dan $T_2 \sin \theta$. Karena kesetimbangan statis kita dapat menulis

$$T_1 = T_2 \cos \theta \text{ dan } W = T_2 \sin \theta.$$

Dengan membagi persamaan terakhir dengan yang pertama, kita menghilangkan T_2 dan mendapatkan $\tan \theta = \frac{W}{T_1}$. Tetapi karena $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$, kita sampai pada

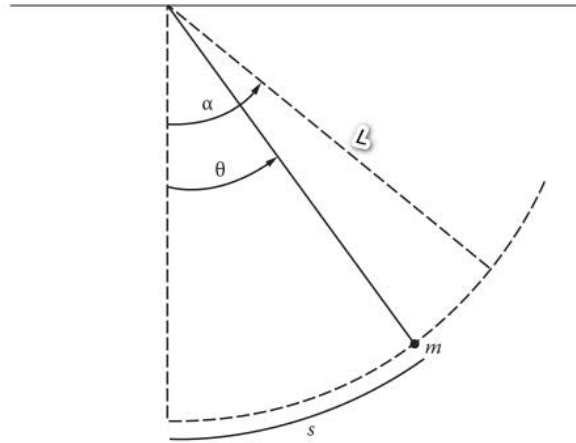
$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1} \quad (8.2.3)$$

Persamaan diferensial orde pertama sederhana ini berfungsi sebagai model untuk bentuk kabel fleksibel seperti kabel telepon yang tergantung karena beratnya sendiri dan bentuk kabel yang menopang dasar jalan jembatan gantung. Kita selesaikan (8.2.3) dan mensimulasikan untuk $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ dalam Geogebra sebagai berikut:



8.2.7. Model Matematika dari suatu Pendulum [12]

Perhatikan sebuah bandul yang terdiri dari sebuah balok bermassa m di ujung sebuah batang yang massanya diabaikan dan panjangnya L . Jika balok ditarik ke satu sisi melalui sudut dan dilepaskan (Gambar 8.2.7.1),



Gambar 8.2.7.1: Pendulum massa m

maka dengan prinsip kekekalan energi kita peroleh

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(L \cos \theta - L \cos \alpha). \quad (8.2.7.1)$$

Karena $s = L\theta$ dan $v = \frac{ds}{dt} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, persamaan ini memberikan

$$\frac{1}{2}L^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = gL(\cos \theta - \cos \alpha). \quad (8.2.7.2)$$

dan pada penyelesaian untuk dt dan dengan mempertimbangkan fakta bahwa θ berkurang dengan bertambahnya t (untuk t kecil), kita dapatkan

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

Jika T adalah periode, yaitu waktu yang diperlukan untuk satu osilasi penuh, maka

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_L^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

atau

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^L \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}. \quad (8.2.7.3)$$

Nilai T dalam rumus ini jelas bergantung pada α , yang merupakan alasan mengapa jam bandul bervariasi dalam laju penyimpanannya saat batang berayun melalui sudut yang lebih besar atau lebih kecil. Rumus (8.2.7.3) untuk periode dapat dinyatakan lebih banyak memenuhi sebagai berikut. Karena dengan salah satu rumus setengah sudut trigonometri yang kita miliki

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

dan

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

kita bisa menulis

$$\begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^L \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^L \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad k = \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (8.2.7.4)$$

Kita sekarang mengubah variabel dari θ ke Φ dengan menempatkan $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \sin \Phi$, sehingga Φ meningkat dari 0 menjadi $\frac{\pi}{2}$ seiring θ meningkat dari 0 ke α , dan

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \Phi d\Phi$$

atau

$$d\theta = \frac{2k \cos \Phi d\Phi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}} d\Phi.$$

Ini memungkinkan kita untuk menulis (8.2.7.4) dalam bentuk

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}} d\Phi = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \quad (8.2.7.5)$$

dimana

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}} d\Phi$$

adalah fungsi dari k dan ϕ disebut **integral elipstik jenis pertama**. Integral elipstik jenis kedua adalah

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi} d\Phi,$$

muncul sehubungan dengan masalah menemukan keliling elips. Integral elipstik ini tidak dapat dihitung dalam bentuk fungsi dasar. Karena mereka cukup sering muncul dalam aplikasi fisika dan teknik, nilainya sebagai fungsi numerik k dan ϕ sering diberikan dalam tabel matematika.

Pembahasan kita tentang masalah bandul sampai saat ini terfokus pada persamaan orde pertama (8.2.7.2). Untuk beberapa tujuan, lebih mudah untuk menangani persamaan orde kedua yang diperoleh dengan menurunkan (8.2.7.2) terhadap t :

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta. \quad (8.2.7.6)$$

Jika sekarang kita ingat bahwa $\sin \theta$ kira-kira sama dengan θ untuk nilai yang sangat kecil θ , maka (8.2.7.6) menjadi (kurang lebih)

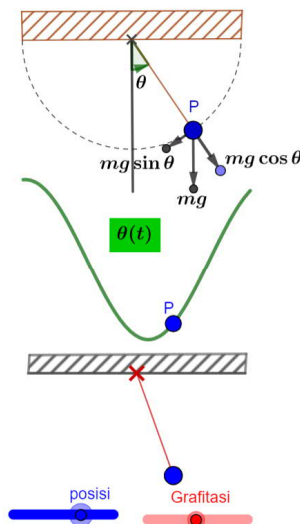
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (8.2.7.7)$$

Penyelesaian (8.2.7.7) diberikan oleh

$$\theta(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

Apa yang kita bahas ini kita lakukan dalam Geogebra. Pembaca bisa mengikuti hasil simulasi dinamis dari gerakan bandul di Website berikut:

[Pendulum Sederhana – GeoGebra](#)



Titik P massa m digantungkan pada batang oleh senar dengan panjang tetap L dan massa diabaikan sehingga P bergerak sepanjang lingkaran jari – jari L dalam bidang datar. Pada titik P bertindak gaya gravitasi g dan tidak ada gesekan. Maka dengan menggunakan hukum Newton didapat Persamaan Differensial Biasa (PDB) tak – linear :

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Pada dasarnya Persamaan (1) secara analitik sulit diselesaikan, maka dari itu dilakukan pelinearan disekitar $\theta \approx 0$ sehingga didapat PDB linear :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (2)$$

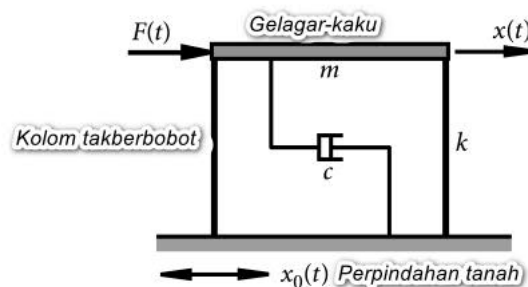
Penyelesaian Persamaan (2) diberikan oleh :

$$\theta(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right). \quad (3)$$

Persamaan (3) dinamakan Persamaan Sederhana Pendulum. Untuk $c_1 = c_2 = 1$, $L = 4$ dan gravitasi : $8 \leq g \leq 10$, maka animasi dari pendulum diberikan oleh gambar sebelah kiri.

8.2.8 Model Persamaan Gerakan [13]

Pada bagian ini, dipelajari getaran bangunan geser satu lantai seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.2.8.1, yang dianggap sebagai model sistem derajat kebebasan tunggal (DKT).

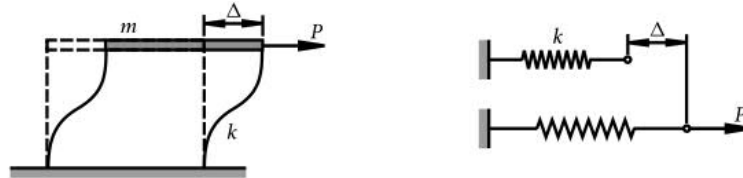


Gambar 8.2.8.1: Bangunan geser satu lantai.

Sebuah bangunan geser satu lantai terdiri dari sebuah gelagar kaku dengan massa m , yang ditopang oleh kolom dengan kekakuan gabungan k . Kolom diasumsikan tidak berbobot, tidak dapat diperpanjang dalam arah aksial (vertikal), dan kolom hanya dapat menerima gaya geser tetapi tidak menerima momen lentur. Dalam arah horizontal, kolom bertindak sebagai pegas kekakuan k . Akibatnya, gelagar hanya dapat bergerak dalam arah horizontal, dan gerakannya dapat dijelaskan oleh

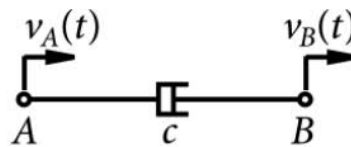
satu variabel $x(t)$; maka dari itu sistem disebut sistem derajat kebebasan tunggal (DKT). Jumlah derajat kebebasan adalah jumlah total variabel yang diperlukan untuk menggambarkan gerak suatu sistem.

Kekakuan gabungan k kolom dapat ditentukan sebagai berikut. Terapkan gaya statis horizontal P pada gelagar. Jika perpindahan gelagar adalah Δ seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.2.8.2, maka kekakuan gabungan kolom adalah $k = \frac{P}{\Delta}$.



Gambar 8.2.8.2: Penentuan kekakuan kolom.

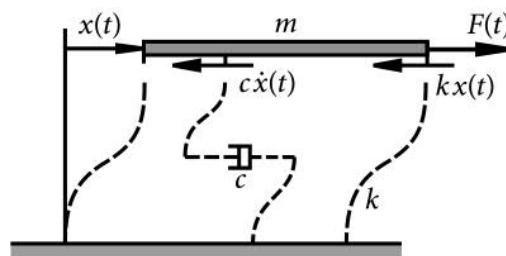
Gesekan internal antara gelagar dan kolom digambarkan oleh peredam dashpot kental dengan koefisien redaman c . Peredam dashpot ditunjukkan secara skematis pada Gambar 8.2.8.3 dan memberikan gaya redaman $c(v_B - v_A)$, di mana v_A dan v_B adalah kecepatan masing-masing titik A dan B , dan $(v_B - v_A)$ adalah kecepatan relatif antara titik B dan A . Gaya redaman berlawanan dengan arah kecepatan relatif.



Gambar 8.2.8.3: Peredam dashpot.

1 Getaran Bangunan Geser di Bawah Gaya yang Diterapkan Secara Eksternal $F(t)$

Dalam hal ini, gelagar dikenai gaya eksternal $F(t)$, yang dapat menjadi model beban angin. Pertimbangkan getaran gelagar; diagram benda bebasnya digambarkan pada Gambar 8.2.8.4.



Gambar 8.2.8.4: Diagram benda bebas bangunan di kenakan gaya yang diterapkan secara eksternal.

Gelagar dikenai gaya geser (gaya elastis) $kx(t)$, gaya redaman viskos $c\dot{x}(t)$, dan beban yang diterapkan secara eksternal $F(t)$. Persamaan gerak diatur oleh Hukum Kedua Newton

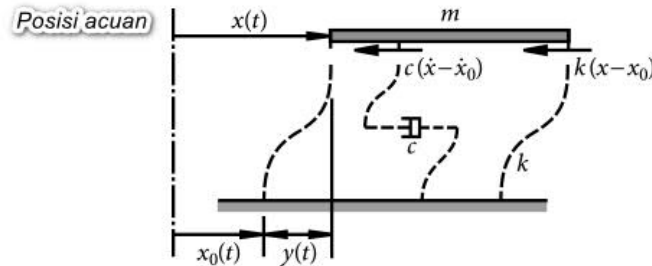
$$ma = \sum F \Rightarrow m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + F(t),$$

atau

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (8.2.8.1)$$

2 Getaran Gedung Geser di bawah Eksitasi Dasar $x_0(t)$

Dalam hal ini, dasar (pondasi) bangunan dikenai perpindahan dinamis $x_0(t)$, yang dapat menjadi model gempa dan merupakan fungsi yang diketahui. Diagram benda bebas gelagar ditunjukkan pada Gambar 8.2.8.5.



Gambar 8.2.8.5: Diagram benda bebas bangunan di pengaruhi eksitasi dasar.

Gaya geser (elastis) dan gaya redaman yang diterapkan pada gelagar diberikan oleh:

$$\text{Gaya geser} = k \cdot (\text{Perpindahan relatif antara gelagar dan alas}) = k(x - x_0),$$

$$\text{Gaya redaman} = c \cdot (\text{Kecepatan relatif antara gelagar dan alas}) = c(\dot{x} - \dot{x}_0).$$

Hukum Kedua Newton mensyaratkan bahwa

$$ma = \sum F \Rightarrow m\ddot{x}(t) = -k[x(t) - x_0(t)] - c[\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)].$$

Misalkan $y(t) = x(t) - x_0(t)$, yang merupakan perpindahan relatif antara gelagar dan alas, menjadi variabel terikat yang baru. Kemudian mendiferensialkan terhadap t menghasilkan $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)$, $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)$. Dalam hal perpindahan relatif $y(t)$, persamaan geraknya diberikan oleh

$$m(\ddot{y}(t) + \ddot{x}_0(t)) = -ky(t) - c\dot{y}(t),$$

yaitu

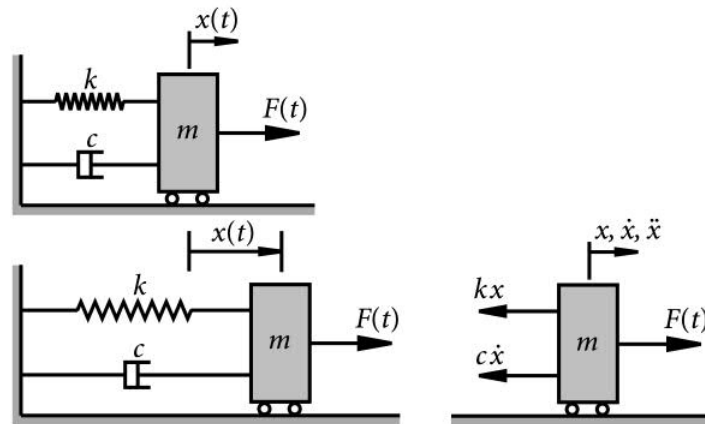
$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{x}_0(t). \quad (8.2.8.2)$$

di mana $\ddot{x}_0(t)$ adalah dasar atau percepatan tanah. Pembebanan pada gelagar yang dihasilkan dari eksitasi tanah (gempa bumi) adalah $F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$ yang sebanding dengan massa gelagar dan percepatan tanah.

Kedua sistem (8.2.8.1) dan (8.2.8.2) adalah persamaan diferensial biasa linier orde dua dengan koefisien konstan.

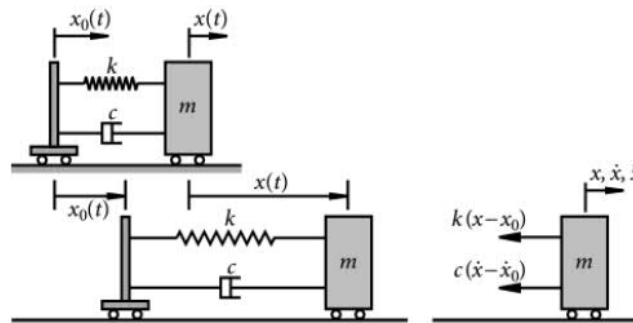
Secara umum, sistem derajat-kebebasan linier tunggal dapat dimodelkan dengan sistem pegas-peredam massa mekanis. Contoh bangunan geser satu lantai di bawah beban eksternal atau eksitasi dasar dapat dijelaskan dengan menggunakan sistem pegas-peredam massa ekuivalen berikut.

1 Sistem Derajat Kebebasan Tunggal dipengaruhi Kekuatan yang Diterapkan Secara Eksternal

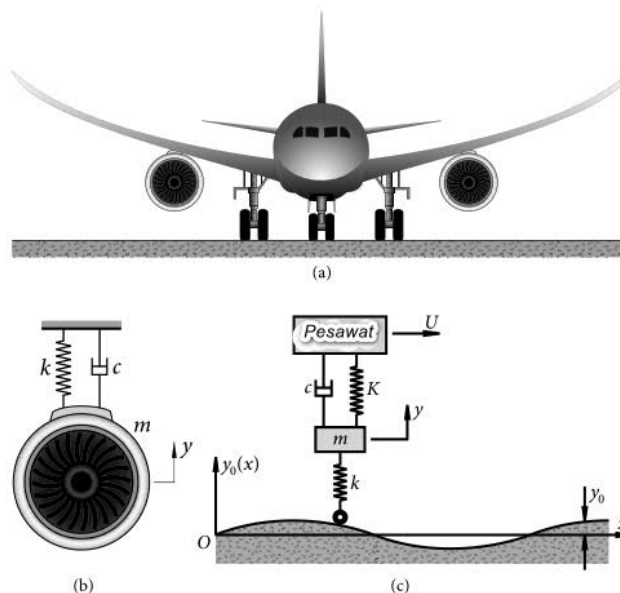


Gambar 8.2.8.6: Sistem pegas-peredam massa dipengaruhi gaya yang diterapkan secara eksternal.

2 Sistem Derajat Kebebasan Tunggal dipengaruhi Eksitasi Dasar



Gambar 8.2.8.7: Sistem pegas peredam massa dipengaruhi eksitasi dasar.



Gambar 8.2.8.8: Pemodelan matematis mesin jet dan *landing gear*.

Untuk mendapatkan karakteristik dan perilaku dinamis utama, banyak sistem rekayasa dapat diidealkan sebagai sistem derajat kebebasan tunggal. Sebagai contoh, perhatikan pesawat yang ditunjukkan pada 8.2.8.7(a).

- Mesin jet didukung oleh sayap pesawat, yang dapat dimodelkan sebagai kantilever dengan penampang variabel. Getaran mesin jet dalam arah vertikal dapat dimodelkan sebagai sistem derajat kebebasan tunggal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.2.8.7(b).
- Roda pendaratan pesawat dapat dimodelkan sebagai massa m yang dihubungkan ke pesawat oleh pegas kekakuan K dan peredam koefisien redaman c . Pegas dengan kekakuan k digunakan untuk memodelkan gaya pada ban. Pesawat bergerak dengan kecepatan konstan U pada permukaan kasar dengan profil $y_0(x)$. Dengan asumsi bahwa pesawat bergerak dalam arah horizontal saja, roda pendarat dimodelkan sebagai sistem derajat kebebasan tunggal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.2.8.7(c).

Pembaca bisa melihat suatu animasi balok yang dikaitkan pegas dan coba turunkan model matematikanya. Link web mekanika Pegas di :

[Mekanika Pegas – GeoGebra](#)

Daftar Pustaka

- [1] WikipediA, " <https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>", 1 July 2020. [Online]. Available: <https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. [Accessed 1 July 2020].
- [2] Dörte Haftendorn, "Kurven erkunden und verstehen Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen", Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2017
- [3] Markus Hohenwarter, Daniel Jarvis and Zsolt Lavicza, "Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute", International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 16, No 2, 2009
- [4] Gerard A. Venema, "Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra", MAA, the Mathematical Association of America, 2013
- [5] Jonas hall and Thomas Lingefjärd, "MatheMatical Modeling, Applications with geogebra", John Wiley & Sons. Inc, 2017
- [6] Ron Larson, "Applied Calculus for the Life and Social Sciences", Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009
- [7] Sandip Banerjee, "MATHEMATICAL MODELING, Models, Analysis and Applications", CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, 2014
- [8] Dennis G. Zill, "A First Course in Differential Equations with Modeling Applications, Eleventh Edition", Cengage Learning 20 Channel Center Street Boston, MA 02210 USA, 2018
- [9] Daniel J. Velleman, "CALCULUS A RIGOROUS FIRST COURSE", DOVER PUBLICATIONS, INC. Mineola, New York, 2016
- [10] Garret J. Etgen, "CALCULUS ONE AND SEVERAL VARIABLES", John Wiley & Sons, 2007
- [11] J. N. Hays, "EPIDEMICS AND PANDEMICS Their Impacts on Human History", ABC-CLIO, Inc., 2005
- [12] George F. Simmons, "DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS AND HISTORICAL NOTES, Third Edition", CRC Press Taylor & Francis Group, 2017
- [13] Wei-Chau Xie. "Differential Equations for Engineers", Cambridge University Press, 2010