Graf Cayley dari suatu grup Abelian menggunakan SageMath

Oleh: Subiono, Departemen Matematika-FASAD-ITS, 2020

Suatu sumber alamia graf, dikenal sebagai ***graf Cayley***, berasal dari teori grup. Teori representasi menggairahkan kita untuk menganalisis nilai-eigen dari graf Cayley setidaknya untuk grup Abelian.

Definisi Misalkan G adalah suatu grup berhingga. Yang dimaksud dengan **himpunan bagian simetri** dari G adalah suatu himpunan bagian $S \subseteq G$ yang memenuhi:

1. $1 \notin S$
2. bila $s \in S$, maka $s^{-1} \in S$.

Bila S adalah himpunan bagian simetri dari G, maka graf dari G terkait dengan S adalah graf dengan himpunan simpul G dan dengan sisi $\{g, h\}$ menghubungkan g dengan h bila $gh^{-1} \in S$ atau ekivalen $hg^{-1} \in S$.

Catatan: Dalam definisi S bisa himpunan kosong, dalam hal yang demikian graf Cayley tidak mempunyai sisi.

Kita bisa memferifikasi bahwa graf Cayley terhubung (setiap dua simpul terhubung oleh suatu lintasan) bila dan hanya bila S **membangun** G.

Contoh
Misalkan $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dan $S = \{\pm[1]_4\}$. Untuk mendapatkan ***graf Cayley*** terkait dengan S dalam Sagemath sebagai berikut:

1. Buat grup Abelian $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
2. Kontruksi grup permutasi G_p dari grup Abelian G.
3. Tentukan generator dari grup G_p.
4. Dari generator yang tersedia buat himpunan simetri S.
5. Terkait dengan grup G_p, buat matriks ketetanggaan A dengan generator S.
6. Dari matriks ketetanggaan A buat graf Cayleynya.

In [2]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([4])
Gp = G.permutation_group()
g0= Gp.gens()
g1=g0[0]
S=[g1,g1^-1]
S1=set(S)
print("Himpunan simetri: S =",S1)
```

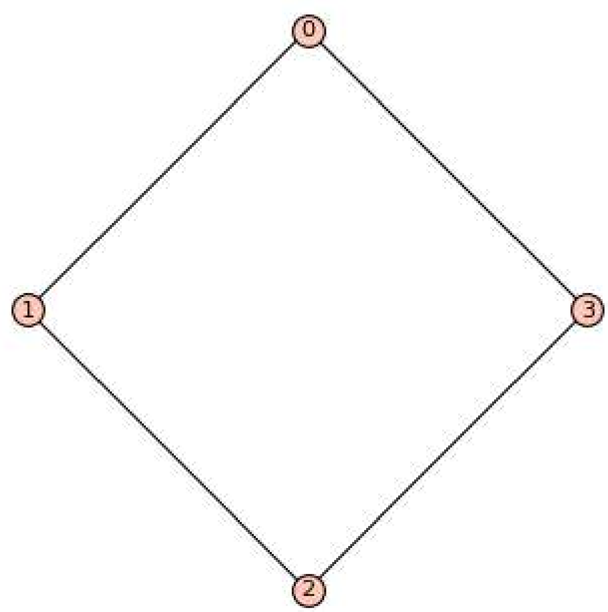
```
Himpunan simetri: S = {(1,4,3,2), (1,2,3,4)}
```

In [3]:
```
A = Gp.cayley_graph(generators=S,simple=True).adjacency_matrix()
pretty_print(html("Matriks ketetanggaan $A=%s$"%latex(A)))
```

Matriks ketetanggaan $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

In [4]:
```
Gamma = Graph(A)
pretty_print(html("Graf $\\Gamma$ dari matriks ketetanggaan $A$ :"))
Gamma.show(layout="circular",dpi = 80)
```

Graf Γ dari matriks ketetanggaan A :



In [ ]:

Perintah SageMath untuk menghasilkan jenis ***graf Cayley*** sedikit rumit. Kita pasti ingin memastikan untuk memilih opsi "sederhana" dan untuk memilih himpunan pembangun simetris, sebagaimana diberikan oleh dua contoh graf Cayley dari grup Abelian $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ untuk himpunan simetri $S_1 = \{\pm 1, \pm 2\}$ dan $S_2 = \{\pm 1, \pm 3\}$ sebagai berikut berikut:

In [4]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([6])
Gp = G.permutation_group()
g1,g2 = Gp.gens()
S1=[g1*g2,(g1*g2)^-1,(g1*g2)^2,(g1*g2)^-2]
print("Himpunan Simetri S1 =",set(S1))
```

```
Himpunan Simetri S1 = {(3,5,4), (1,2)(3,4,5), (3,4,5), (1,2)(3,5,4)}
```

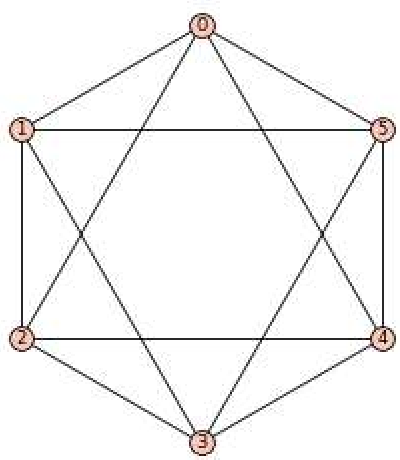
In [5]:
```
A1 = Gp.cayley_graph(generators=S1,simple=True).adjacency_matrix()
```

In [6]:
```
pretty_print(html(" Matriks ketetanggaan $A_1 = %s$"%latex(A1)))
```

Matriks ketetanggaan $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

In [7]:
```
Gamma1 = Graph(A1)
pretty_print(html("Graf $\\Gamma_1$ dari matriks Adjancency $A_1$ :"))
Gamma1.show(layout="circular", dpi = 60)
```

Graf Γ_1 dari matriks Adjancency A_1 :



In [8]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([6])
Gp = G.permutation_group()
g1,g2 = Gp.gens()
S2=[g1*g2,(g1*g2)^-1,(g1*g2)^3,(g1*g2)^-3]
print("Himpunan Simetri S2 = ",set(S2))
```

```
Himpunan Simetri S2 =  {(1,2)(3,4,5), (1,2), (1,2)(3,5,4)}
```

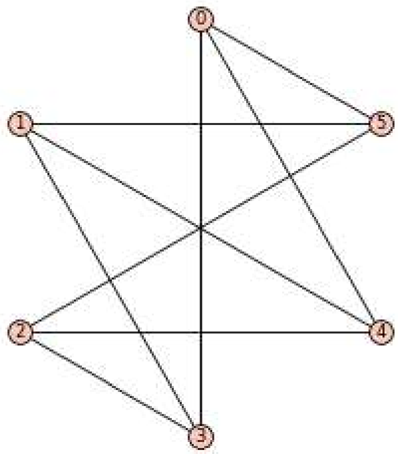
In [9]:
```
A2 = Gp.cayley_graph(generators=S2,simple=True).adjacency_matrix()
```

In [10]:
```
pretty_print(html(" Matriks Ketetanggaan $A_2 = %s$"%latex(A2)))
```

Matriks Ketetanggaan $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

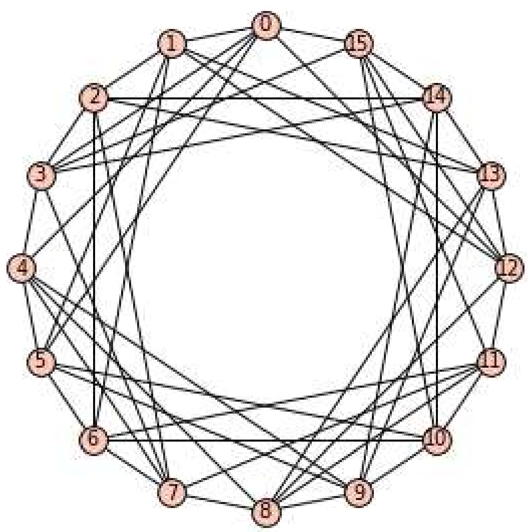
In [11]:
```
Gamma2 = Graph(A2)
pretty_print(html("Graf $\\Gamma_2$ dari matriks Ketetanggaan $A_2$ :"))
Gamma2.show(layout="circular", dpi = 60)
```

Graf Γ_2 dari matriks Ketetanggaan A_2 :



Selanjutnya dibahas graf Cayley Γ dari $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, dengan himpunan generator $S = \{\pm(0,1), \pm(1,0), \pm(1,1)\}$. Kita implementasikan hal ini dalam SageMath sebagai berikut:

In [12]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([4,4])
GP = G.permutation_group()
g0 = GP.gens()[0]
g1 = GP.gens()[1]
S = [g0,g1, g0^(-1), g1^(-1),(g0*g1)^(-1),g0*g1]
Gamma = GP.cayley_graph(side='left', generators = S)
A = Gamma.adjacency_matrix()
Gamma1 = Graph(A, format = "adjacency_matrix")
Gam = Gamma1.show(layout="circular", dpi = 70)
pretty_print(html("Graf Cayley dari \
$\\mathbb{Z}/4\\mathbb{Z}\\times\\mathbb{Z}/4\\mathbb{Z}$\
 yang dibangun oleh $S$"))
Gam
```



Graf Cayley dari $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ yang dibangun oleh S

In [ ]:

Berikut ini diberikan graf Cayley dari grup $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ dengan himpunan simetri $S = \{[8]_{24}, [16]_{24}, [3]_{24}, [21]_{24}\}$.

In [13]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([24])
Gp = G.permutation_group()
g1,g2 = Gp.gens()
S2 = [g1,g1^-1,g2,g2^-1]; S2
```

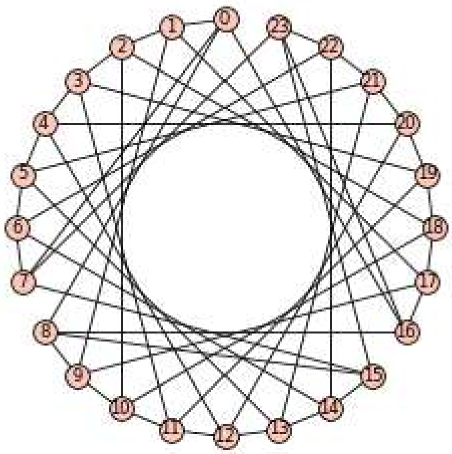
Out[13]:
```
[(4,5,6,7,8,9,10,11), (4,11,10,9,8,7,6,5), (1,2,3), (1,3,2)]
```

In [14]:
```
A2 = Gp.cayley_graph(generators=S2,simple=True).adjacency_matrix()
show(A2)
```

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right.
$$

In [16]:
```
Gamma2 = Graph(A2)
pretty_print(html("Graf $\\Gamma$ dari matriks Ketetanggaan $A_2$ :"))
Gamma2.show(layout="circular", dpi = 60)
```

Graf Γ dari matriks Ketetanggaan A_2 :



Sebagai penutup dari tulisan ini, diberikan bebrapa komentar:

1. Pembahasan graf Cayley yang dibahas untuk grup komutatif/Abelian G.
2. Dari grup komutatif yang diberikan ditentukan grup permutasinya, yaitu G_p.
3. Dari grup permutasi yang telah didapat ditentukan generator-generatornya.
4. Selanjutnya dari generator yang tesedia dibentuk himpunan simetri S. Tentunya dalam hal ini S tidak tunggal.
5. Selanjutnya dibuat matriks ketetanggaan A dari grup permutasi berdasarkan generator S.
6. Dibuat graf Cayley dari grup komutatif G berdasarkan matriks ketetanggaan A.
7. Apakah untuk grup non-Abelian (tidak komutatif) bisa dibuat graf Cayleynya? Jawabannya bisa hal ini terkait dengan pelabelan graf pada sisi-sisinya.

TERIMAKSIH ATAS PERHATIANNYA! SEMOGA BERMANFAAT.

In [ ]:
```
# Produk Langsung dan Grup Abelian

from IPython.display import Audio, Image, YouTubeVideo
id = 'HSX69ByJppo'
YouTubeVideo(id=id, width=600, height=500)
```

In [5]:
```
A=[1,2,3,4,5,6,7,8]
A
```

Out[5]: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

In [9]:
```
G = AdditiveAbelianGroup([24])
Gp = G.permutation_group()
g1,g2 = Gp.gens()
S2 = [g1,g1^-1,g2,g2^-1]; S2
```

Out[9]:
```
[(4,5,6,7,8,9,10,11), (4,11,10,9,8,7,6,5), (1,2,3), (1,3,2)]
```

In [11]:
```
g1.order()
```

Out[11]:
```
8
```

In [12]:
```
g2.order()
```

Out[12]:
```
3
```

In [13]:
```
g2^3
```

Out[13]:
```
()
```

In [ ]: