Aljabar Linear Suatu Gerbang Untuk Memahami Matematika dan Aplikasinya

Version 1.0

12 Pebruari 2016

Subiono

Subiono — Email: subiono2008@matematika.its.ac.id

Alamat: Jurusan Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Sukolilo Surabaya
Indonesia

Copyright

Kata Pengantar

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji hanyalah milikmu ya Allah yang telah meberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatnya di hamparan bumi yang dihuni manusia. Sholawat dan Salam kepadamu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.

Buku ini disusun dengan maksud untuk digunakan sebagi buku rujukan mata kuliah Aljabar Linear Elementer dan Aljabar Linear pada Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Materi disusun untuk kebutuhan struktur dalam Kurikulum tahun 2009-2014 guna menunjang matakuliah yang ada pada semester yang lebih tinggi. Selain dari pada itu materi dari buku ini disusun supaya pengguna yang lainnya bisa memanfaatkan buku ini sesuai dengan yang dibutuhkannya.

Dalam buku ini diberikan beberapa konsep pengertian dari materi yang disajikan setelah itu diikuti dengan beberapa contoh untuk mempermudah pemahaman, selain itu juga diberikan beberapa contoh aplikasi yang mungkin dan beberapa soal sebagai latihan.

Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang dari sempurnah bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus. Kritik dan saran bisa disampaikan ke alamat email : `subiono2008@matematika.its.ac.id`

Buku ini dapat diperoleh secara gratis oleh siapapun tanpa harus membayar kepada penulis. Hal ini berdasarkan pemikiran penulis untuk kebebasan seseorang mendapatkan suatu bacaan yang tersedia secara bebas dengan maksud "kemanfaatan" dan "kejujuran". Yang dimaksud dengan kemanfaatan adalah bergunanya bacaan ini untuk kemudahan pembaca memperoleh informasi penting yang diperlukannya dan untuk pembelajaran. Sedangkan kejujuran adalah ikatan moral dari pembaca untuk tidak memdistribusi buku in dengan tujuaan yang tidak bermanfaat.

Penulis menulis buku ini berdasarkan pemikiran "kebebasan menulis" (tidak harus menggunakan media cetak penerbit) dengan asas "kemanfaatan" menggunakan media yang tersaji masa kini. Beberapa alat bantu untuk penulisan buku ini juga didapat secara gratis, yaitu perangkat lunak LaTeX dan WinEdt sebagai salah satu media LaTeX editor. Beberapa gambar yang ada dalam buku ini menggunakan perangkat lunak LaTexDraw yang juga didapat secara gratis. Begitu juga beberapa bahan rujukan didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk menyelesaikan beberapa contoh yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak SAGE versi 6.9, perangkat lunak ini juga didapat dari internet secara gratis.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon kepada Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari Versi 1 yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 12 Pebruari 2016

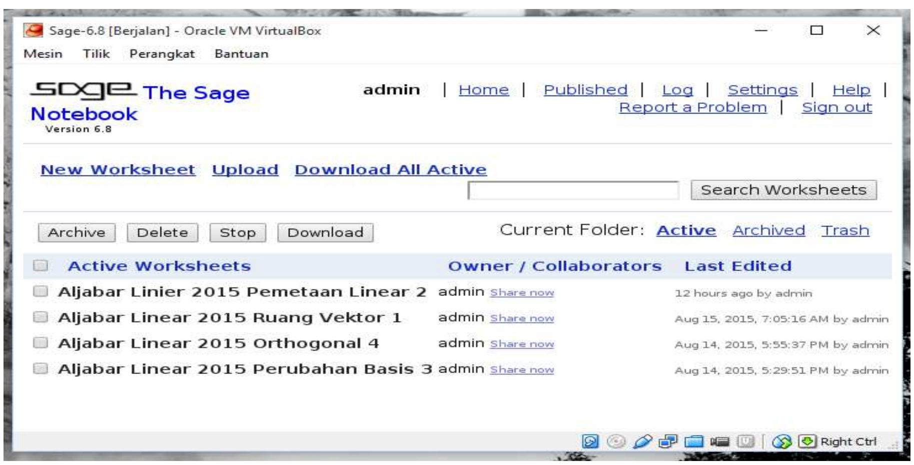
Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Pengenalan Vektor

Dalam bab ini dikenalkan pengertian vektor, khususnya vektor pada bidang $\mathbb{R}^2$ dan pada ruang $\mathbb{R}^3$. Beberapa pengertian dan hasil-hasil pembahasan nantinya digunakan dalam bab berikutnya khususnya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Beberapa contoh yang dibahas



Gambar 1.1: Tampilan Sage Notebook Ver. 6.9

juga dihitung menggunakan perangkat lunak Sage Notebook Version 6.9. Perangkat lunak ini setara dengan perangkat lunak Matlab, Maple dan Mathematica. Sage Notebook selain mampu melakukan komputasi secara numerik juga mampu melakukan komputasi secara simbolik. Gambar 1.1 adalah tampilan perangkat lunak Sage Notebook Version 6.9.

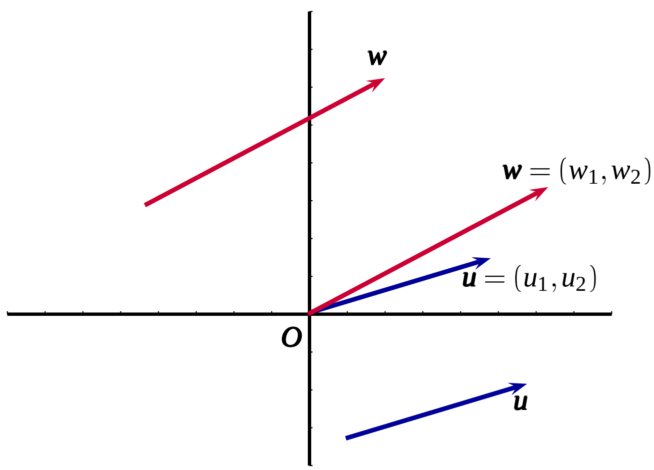
1.1 Vektor dan Kombinasi Linear

Dalam bagian ini dibahas pengertian suatu **kombinasi linier** dari vektor-vektor di bidang $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Pengertian ini bisa diperluas untuk vektor di $\mathbb{R}^n$. Himpunan semua vektor di $\mathbb{R}^n$ dinamakan ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$ dan dinamakan ruang-n Euclide yang akan dibahas di Bab 4. Mengenai pengertian ruang vektor secara umum atas suatu ***lapangan*** (himpunan skalar) akan dibahas dalam Bab 5. Ruang vektor $\mathbb{R}^n$ sangat penting, sebab dalam pembahasan di Bab 5 ditunjukkan bahwa sebarang ruang vektor V atas suatu lapangan F berdimensi n ***isomorpik*** dengan $\mathbb{R}^n$.

Vektor pada bidang atau ruang dimensi dua $\mathbb{R}^2$ disajikan sebagai vektor kolom yang terdiri dari dua komponen, ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2. \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini komponen vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ masing-masing adalah bilangan riil v_1, v_2 dan w_1, w_2. Dua vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ ini pada $\mathbb{R}^2$ digambar sebagai garis berarah dari pangkal pusat koordinat bidang ke ujung vektor dengan koordinat komponen vektor. Dengan demikian panjang suatu vektor adalah panjang garis dari pangkal ke ujung vektor dan dua vektor sama bila dua vektor ini mempunyai arah dan panjang yang sama. Adakalanya vektor $\boldsymbol{v}$ disajikan sebagai $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Secara rinci nanti vektor dibahas lagi dalam bab selanjutnya yaitu berkaitan dengan pembahasan



Gambar 1.2: Vektor di $\mathbb{R}^2$.

Ruang-n Euclide. Dua vektor di $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

adalah sama bila dan hanya bila semua komponen yang bersesuian sama, yaitu $u_i = v_i,\ i = 1, 2$. Hal ini berlaku juga untuk dua vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, yaitu $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ bila dan hanya bila $u_i = v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Contoh diberikan dua vektor di $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x-1 \\ 1+y \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ z-2 \end{bmatrix}.$$

Bila $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, maka dapatkan nilai dari x, y dan z. Karena $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, maka $x - 1 = 4, 1 + y = 5$ dan $3 = z - 2$. Sehingga didapat $x = 5, y = 4$ dan $z = 5$. □

Operasi **tambah** dua vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ ditulis $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ diberikan oleh:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan operasi ***perkalian*** skalar $a \in \mathbb{R}$ dengan vektor di $\mathbb{R}^2$ diberikan oleh:

$$a\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} av_1 \\ av_2 \end{bmatrix}, \quad \text{dengan demikian didapat} \quad -3\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -3w_1 \\ -3w_2 \end{bmatrix}.$$

Catatan bahwa sebarang vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ditambah vektor $-\boldsymbol{v}$ adalah vektor nol $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$, tentunya vektor $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2}$ bukan bilangan nol (0), sebab

$$\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari pembahasan operasi tambah sebarang dua vektor di $\mathbb{R}^2$, jelas bahwa $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$.

Pengertian kombinasi linear dari vektor $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ adalah masing-masing vektor dikalikan skalar lalu hasilnya ditambahkan, yaitu untuk skalar $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ didapat suatu **kombinasi linear** dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{w}$ yang dituliskan sebagai

$$c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w}.$$

Contoh berikut menjelaskan bahwa vektor $\boldsymbol{w}$ adalah suatu kombinasi linear dari vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ dengan

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

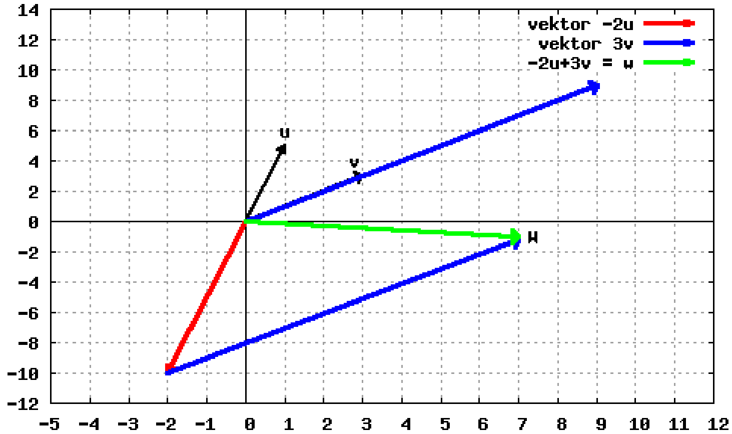
sebab

$$-2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9 \\ -10+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{w}$$

Secara geometri bidang di $\mathbb{R}^2$, kombinasi linear tsb. diberikan dalam Gambar 1.3.

Perintah untuk malakukan kombinasi linier dari dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ sama dengan vektor $\boldsymbol{w}$ dalam sel Sage Notebook dilakukan sebagai berikut:

```
u=vector(QQ,[1,5]).column()
v=vector(QQ,[3,3]).column()
w=vector(QQ,[7,-1]).column()
pretty_print(tml("Vektor : $\pmb{u} = %s$"%latex(u)))
print
pretty_print(html("Vektor : $\pmb{v} = %s$"%latex(v)))
print
pretty_print(html("Vektor : $\pmb{w} = %s$"%latex(w)))
print
pretty_print(html("$-2\pmb{u} +3\pmb{v} = %s$"%latex(-2*u+3*v)))
```



Gambar 1.3: Kombinasi Linear dari vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$

Output yang dihasilkan adalah :

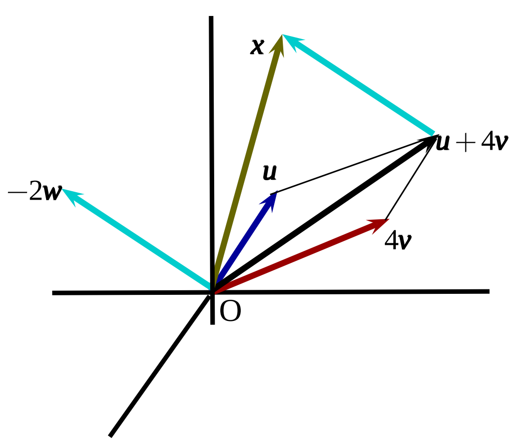
Vektor : $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektor : $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektor : $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$-2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Contoh berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di ruang dimensi tiga $\mathbb{R}^3$, yaitu



Gambar 1.4: Vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$. Kombinasi linier ini diberikan dalam Gambar 1.4. Masing-masing vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$

dan $\boldsymbol{x}$ adalah:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix}$$

yang memenuhi

$$\begin{aligned} 1\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w} &= 1\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1+4-4\\0+8-6\\3+4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Sebelum mengakhiri bagian ini, perlu diingatkan bahwa pengertian dari **kombinasi linier** sangat penting. Sebab istilah ini akan sering digunakan pada hampir keseluruhan pembahasan.

1.2 Hasil kali titik dan Panjang vektor

Pada bagian ini dibahas hasil kali titik dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$, selanjutnya dibahas panjang suatu vektor. Hasil kali titik $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$ ditulis $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ dengan

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

didefinisikan sebagai

$$\boxed{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2}$$

□

Contoh untuk $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$ diberikan oleh

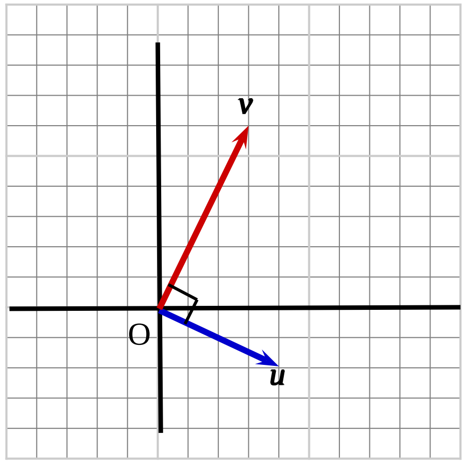
$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

maka perkalian titik $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ adalah

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=4(-3)+2(6)=-12+12=0$$

Terlihat hasil kali titik $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ adalah 0. Bilangan nol suatu yang khusus, begitu juga untuk hasil kali titik yang menghasilkan nilai nol, hal ini mempunyai arti secara geometris vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ saling tegak lurus. Kasus ini diberikan oleh Gambar 1.5. Suatu kasus penting dari hasil kali titik dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah bila $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$. Misalnya vektor tak nol $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^3$ diberikan oleh

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$



Gambar 1.5: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$

maka, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ diberikan oleh

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Perhatikan bahwa hasil perkalian titik $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ untuk sebarang vektor taknol $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$. Dengan demikian cukup beralasan bahwa **panjang vektor** $\boldsymbol{v}$, ditulis $||\boldsymbol{v}||$ didefinisikan sebagai

$$\boxed{||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}.}$$

Masing-masing **panjang vektor** dalam ruang $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ diberikan oleh

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ dan } \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Dengan demikian panjang vektor $||\boldsymbol{v}||$ pada pembahasan sebelumnya adalah

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{14}.$$

Perintah untuk menghitung hasil kali titik dan panjang vektor dalam sel SAGE Notebook dilakukan sebagai berikut:

```
u=vector(QQ,[4,-2])
v=vector(QQ,[3,6])
w=vector(QQ,[1,2,3])
pretty_print(html("Vektor : $\pmb{u} = %s$"%latex(u.column())))
print
pretty_print(html("Vektor : $\pmb{v} = %s$"%latex(v.column())))
print
pretty_print(html("Hasil kali titik : $\pmb{u}\\cdot\pmb{u} =
```

```
 %s$"%latex(u.dot_product(v))))
print
pretty_print(html("Vektor : $\pmb{w} = %s$"%latex(w.column())))
print
pretty_print(html("Panjang vektor : $|\pmb{w}| = %s$"%latex(w.norm())))
```

Output yang dihasilkan adalah :

$\text{Vektor}: \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\text{Vektor}: \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

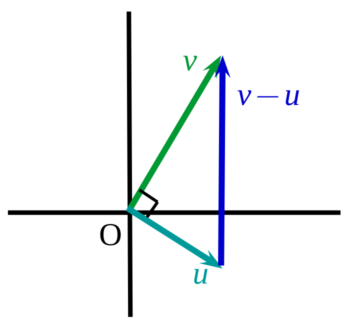
$\text{Hasilkalititik}: \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$

$\text{Vektor}: \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\text{Panjangvektor}: |\boldsymbol{w}| = \sqrt{14}$

Berikut ini diberikan suatu sifat berkenaan dengan dua vektor tegak lurus.

Teorema 1.2.1 Dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$ tegak lurus maka $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.



Gambar 1.6: vektor $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$

Bukti Misalkan vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$ dengan $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ sebagaimana diberikan dalam Gambar 1.6. Selanjutnya, dengan menggunakan dalil Pythagoras didapat

$$||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 = ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}||^2$$

atau

$$\begin{aligned} (u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - 2u_1v_1 - 2u_2v_2. \end{aligned}$$

Jadi

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = 0 \quad \text{atau} \quad u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

Dengan demikian

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

$\square$

Untuk vektor $\boldsymbol{v}$ di ruang $\mathbb{R}^n$, panjang vektor mengikuti seperti di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, yaitu

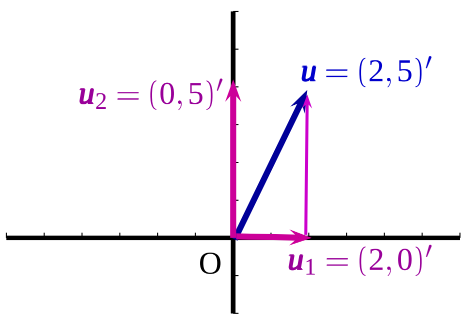
$$\boxed{\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}}$$

$\square$

Untuk vektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gambar vektor $\boldsymbol{u}$ diberikan oleh Gambar 1.7. Terlihat bahwa $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ dan $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 4 + 25 = 29$.



Gambar 1.7: Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$

Hubungan ini diberikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,$$

$\|\boldsymbol{u}_1\| = 2, \|\boldsymbol{u}_2\| = 5$ dan $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 = 4, \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2 = 25$ sedangkan $\|\boldsymbol{u}\|$ adalah

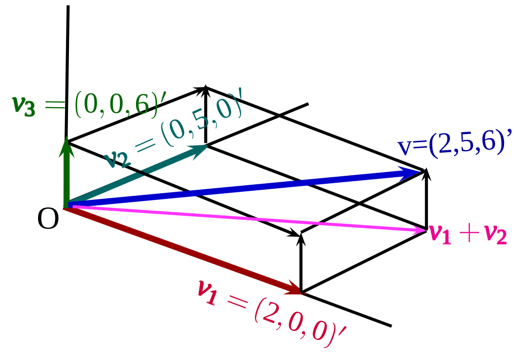
$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{29}, \text{ didapat } \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 29 = 4 + 25 = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2.$$

Selanjutnya diberikan vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Gambar vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ diberikan oleh Gambar 1.8 Terlihat bahwa $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}$, yaitu

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}$$



Gambar 1.8: Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$

Panjang dari $\boldsymbol{v}$ adalah

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{65}.$$

□

Suatu vektor satuan $\boldsymbol{u}$ adalah vektor yang mempunyai panjang sama dengan satu, yaitu $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1$. Contoh

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

maka

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

dan $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1} = 1$. Bila suatu vektor tak nol $\boldsymbol{u}$ dibagi dengan $\|\boldsymbol{u}\|$, yaitu

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|},$$

maka $\boldsymbol{w}$ adalah vektor satuan. Sebab

$$\|\boldsymbol{w}\| = \left\| \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \right\| = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = 1.$$

Dalam hal ini $\boldsymbol{w}$ dinamakan hasil **penormalan** dari vektor $\boldsymbol{u}$. Contoh vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

maka

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan $\|\boldsymbol{w}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 1$. Perintah dalam sel SAGE Notebook untuk melakukan penormalan vektor lakukan sebagai berikut:

```
u=vector(QQ,[1,1,1])
w=u/u.norm()
pretty_print(html("$\pmb{u} = %s$"%latex(u.column())))
print
pretty_print(html("$\pmb{w} = %s$"%latex(w.column())))
print
pretty_print(html("$|\pmb{w}| = %s$"%latex(w.norm())))
```

Hasil dari perintah tersebut adalah:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

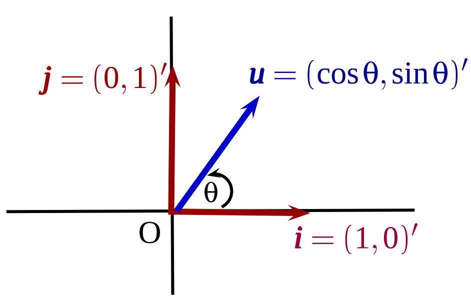
$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{w}\| = 1$$

Contoh lain diberikan tiga vektor di $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

maka $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{u}$ adalah vektor satuan. Bila $\theta = 0$, maka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}$ dan bila $\theta = \frac{\pi}{2}$, maka $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}$. Gambar 1.9 adalah gambar vektor satuan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{u}$.



Gambar 1.9: Vektor satuan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{u}$

Untuk sebarang sudut θ vektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

memberikan $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=1$, sebab $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=\cos\theta$ dan $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{j}=\sin\theta$. Setiap vektor

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

merupakan kombinasi linear dari vektor $\boldsymbol{i}$ dan $\boldsymbol{j}$, sebab

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

Untuk sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^3$, merupakan kombinasi linear dari vektor $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ dengan masing-masing vektor $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ adalah

$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ \text{ dan }\ \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

dengan demikian untuk untuk setiap

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \text{ di }\ \mathbb{R}^3$$

didapat

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

Berikut ini diberikan beberapa sifat hasil kali titik.

Teorema 1.2.2 Bila $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ di $\mathbb{R}^2$ dan skalar c di $\mathbb{R}$, maka

(i.) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$,

(ii.) $(c\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$,

(iii.) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$.

Bukti Misalkan

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\quad\text{dan}\quad\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}.$$

(i.) Maka

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} &= (u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2\\ &= u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2\\ &= (u_1w_1+u_2w_2)+(v_1w_1+v_2w_2)=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$

(ii.) Karena

$$c\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = cu_1v_1 + cu_2v_2 = c(u_1v_1 + u_2v_2) = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}).$$

(iii.) Jelas sebab perkalian dua bilangan real adalah komutatif.

$\square$

Sifat berikut berkenaan dengan pertaksamaan Schwarz yaitu

$$\boxed{\|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|.}$$

Bukti: untuk sebarang bilangan real x dan menggunakan hasil Teorema 1.2.2 didapat

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (x\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \\ &= x^2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) + 2x(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 x^2 + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})x + \|\boldsymbol{v}\|^2. \end{aligned}$$

Misalkan $a = \|\boldsymbol{u}\|^2, b = 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$ dan $c = \|\boldsymbol{v}\|^2$, didapat

$$0 \leq ax^2 + bx + c.$$

Hal ini berarti bahwa bentuk kuadrat tsb. tidak mempunyai akar-akar real kecuali nol, yaitu ekivalen dengan

$$b^2 - 4ac \leq 0 \text{ atau } b^2 \leq 4ac.$$

Jadi

$$4(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq 4\|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \text{ atau } |\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|.$$

$\square$

Pertaksamaan Minkowski:

$$\boxed{\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.}$$

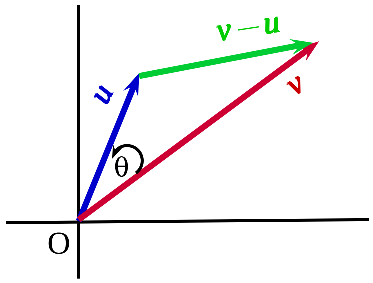
Bukti: dengan menggunakan pertaksamaan Schwarz dan sifat-sifat sebelumnya didapat

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2. \end{aligned}$$

Jadi

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

$\square$



Gambar 1.10: Sudut diantara dua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Berikut ini diberikan hubungan sudut diantara dua vektor dengan hasil kali titik. Misalkan vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ membentuk sudut sebesar θ sebagaimana diberikan oleh Gambar 1.10. Dengan menggunakan aturan kosinus didapat

$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}||^2 = ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 - 2||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||\cos\theta$$

atau

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) &= ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 - 2||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||\cos\theta \\ ||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{u}||^2 - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= ||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2 - 2||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||\cos\theta.\end{aligned}$$

Didapat

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||}.}$$

□

Hasil sifat-sifat yang telah dibahas berlaku juga untuk vektor di ruang $\mathbb{R}^n$. Contoh-contoh:

1. Dapatkan nilai x dan y di $\mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x+y \end{bmatrix}.$$

   Jawab: nilai x dan y yang memenuhi adalah

$$x = 2 \;\text{ dan }\; 3 = x+y \;\Rightarrow x = 2 \;\text{ dan }\; y = 1.$$

2. Diberikan vektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

   dapatkan $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ dan simpulkan hasilnya.
   Jawab: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 5-8+3 = 0$. Jadi $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$.

3. Untuk vektor
$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix},$$
tentukan nilai $x \in \mathbb{R}$ supaya $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.
Jawab: $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, maka $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 2 - 5x - 12 = 0$. Didapat $-5x = 10 \Rightarrow x = -2$.

4. Misalkan
$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
Bila θ adalah sudut antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, maka hitung $\cos\theta$.
Jawab:
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{19}{\sqrt{26}\sqrt{74}}.$$

Perintah penghitungan sudut diantara dua vektor dalam Maxima dilakukan sebagai berikut:

```
(%i60) uv:u=columnvector([1,-3,4]); vv:v=columnvector([3,4,7]);
       print( cos(theta),"=",dotproduct(rhs(uv),rhs(vv))/
       (mat_norm(rhs(uv),frobenius)*mat_norm(rhs(vv),frobenius)))$
```

(%o60) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(%o61) $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \cos(\theta) = \frac{19}{\sqrt{26}\sqrt{74}}$

Latihan

Latihan 1.2.1 *Tentukan mana vektor-vektor berikut yang sama*
$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Latihan 1.2.2 *Diberikan vektor*
$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Dapatkan

(a) *3u-5v.*

(b) *2u+5v-7w.*

Latihan 1.2.3 *Dapatkan* $u \cdot v$ *untuk*

(a) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Latihan 1.2.4 *Selidiki pasangan vektor-vektor berikut*

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

yang tegak lurus.

Latihan 1.2.5 *Dapatkan k sehingga vektor u dan v tegak lurus, untuk*

(a) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2k \end{bmatrix}$ dan $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3k \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Latihan 1.2.6 *Tentukan nilai x supaya* $\|u\| = \sqrt{39}$ *untuk*

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Latihan 1.2.7 *Diberikan vektor*

(a) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$,

(b) $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Hitung $\|u\|$.

Latihan 1.2.8 *Normalkan vektor*

(a) $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$,

(b) $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$,

(c) $w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Latihan 1.2.9 *Hitung* $\cos\theta$ *bila* θ *adalah sudut diantara dua vektor*

(a) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$,

(b) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Bab 2

Sistem Persamaan Linear

Dalam bab ini dibahas Sistem Persamaan Linear (SPL) dan Matriks. Pembahasan dimulai dari Sistem Persamaan Linear yang disajikan dalam Bagian 2.1. Pembahasan dilajutkan meyelidiki penyelesaian dari sistem persamaan diberikan dalam Bagian 2.2.

Pengertian mengenai matriks diberikan dalam bagian 2.4 dilajutkan dengan Aritmatika dan Operasi Matriks yang diberikan dalam Bagian 2.5 diikuti oleh Sifat-sifat Aritmatika Matriks diberikan dalam Bagian 2.7.

Pengertian Matriks Invers dan Matriks Elementer diberikan dalam Bagian 2.8 sedangkan cara memperoleh matriks invers dibahas dalam bagian 2.9.

Hal-hal yang berkaitan dengan Matriks-matriks Khusus diberikan dalam Bagian 2.6 dan pendekomposisian matriks menjadi matriks segitiga atas dan segitiga bawah disajikan dalam Bagian 2.10. Dalam bab ini diakhiri oleh pembahasan mengenai peninjauan ulang sistem persamaan yang diberikan dalam Bagian 2.11.

2.1 Sistem Persamaan

Suatu sistem persamaan linear adalah suatu himpunan dari persamaan yang memuat satu atau lebih peubah. Disini Pembahasan dikhususkan untuk sistem persamaan linear yang dimulai oleh dua persamaan dengan dua peubah dan tiga persamaan dengan tiga peubah. Selanjutnya secara mudah pembahasannya diperluas untuk sistem persamaan linear yang persamaannya lebih dari tiga.

Berikut ini diberikan bentuk persamaan liner dengan dua peubah yaitu

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y &= c_1 \\ a_2x+b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

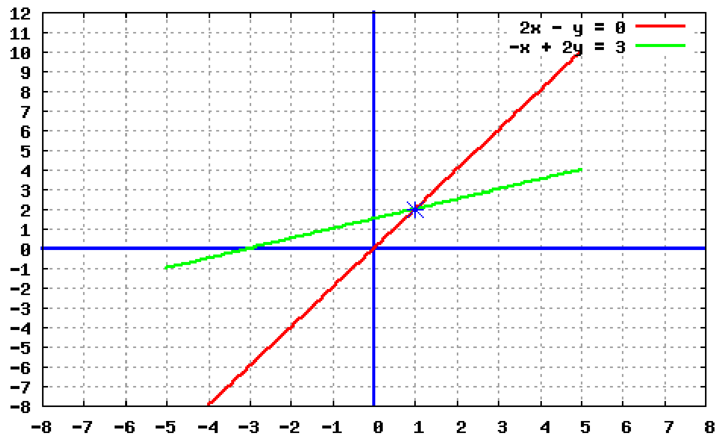
dimana konstanta/skalar a_1, a_2, b_1, b_2 dan c_1, c_2 berada di himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ sedangkan x dan y adalah peubah dengan pengecualian bahwa masing-masing persamaan setidaknya mempunyai satu peubah. Pada bagian ini dibahas

- Kajian gambar dari baris : persamaan,
- Kajian gambar dari kolom : bentuk matriks.

Baris dan kolom nantinya erat kaitannya dengan kajian matriks. Sebagai contoh dua persamaan linear dengan dua peubah :

$$\begin{aligned} 2x-y &= 0 \\ -x+2y &= 3 \end{aligned}$$

Disini SPL terdiri dari dua baris. Baris pertama adalah persamaan : $2x-y=0$ dan baris kedua adalah persamaan $-x+2y=3$. Gambar persamaan baris pertama dan kedua diberikan oleh Gambar 2.1 Tampak bahwa titik $(1,2)$ memenuhi sistem persamaan linear baris pertama $2x-y=0$



Gambar 2.1: Persamaan dua garis

dan baris kedua $-x+2y=3$.

Selanjutnya dibahas gambar kolom dari sistem persamaan linear tsb. Sistem persamaan linear yang telah dibahas dapat ditulis sebagai kolom dan untuk $x=1, y=2$ didapat

$$1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

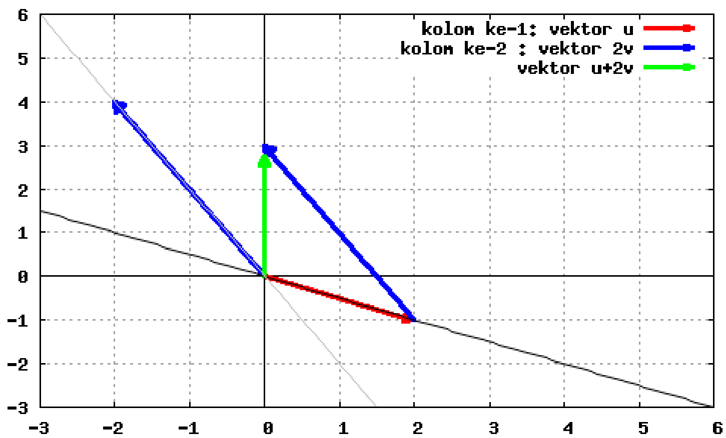
Hasil diatas dibaca **vektor kolom**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{hasil kombinasi linear dari vektor-kolom}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

yaitu untuk $x=1, y=2$:

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



Gambar 2.2: Kombinasi Linear dari u dan v

Secara geometris hasil ini diberikan oleh Gambar 2.2. Pada Gambar 2.2 tampak bahwa

$$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}.$$

Dua vektor

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \;\text{ dan }\; \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

adalah vektor yang penting di ruang $\mathbb{R}^2$ sebab semua vektor di $\mathbb{R}^2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ yang mana hal ini sama untuk vektor

$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \;\text{ dan }\; \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

bahwa setiap vektor di $\mathbb{R}^2$ adalah kombinasi linear dari $\boldsymbol{i}$ dan $\boldsymbol{j}$, yaitu untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$

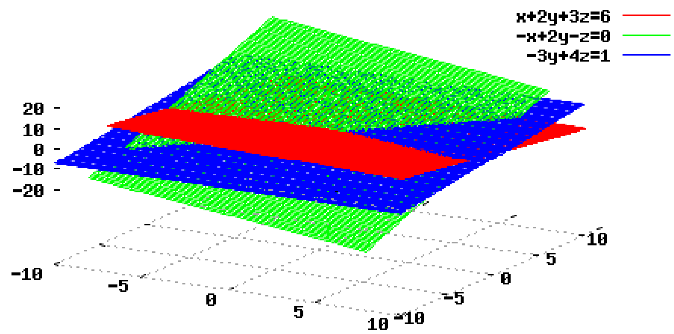
$$x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dibahas suatu kajian yang sama suatu contoh untuk SPL dengan tiga persamaan dan tiga peubah, yaitu SPL

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Disini sistem persamaan linear terdiri dari tiga baris persamaan bidang.

Baris pertama adalah persamaan : $x + 2y + 3z = 6$,



Gambar 2.3: Persamaan tiga bidang

baris kedua adalah persamaan : $-x+2y-z=0$ dan

baris ketiga adalah persamaan : $-3y+4z=1$

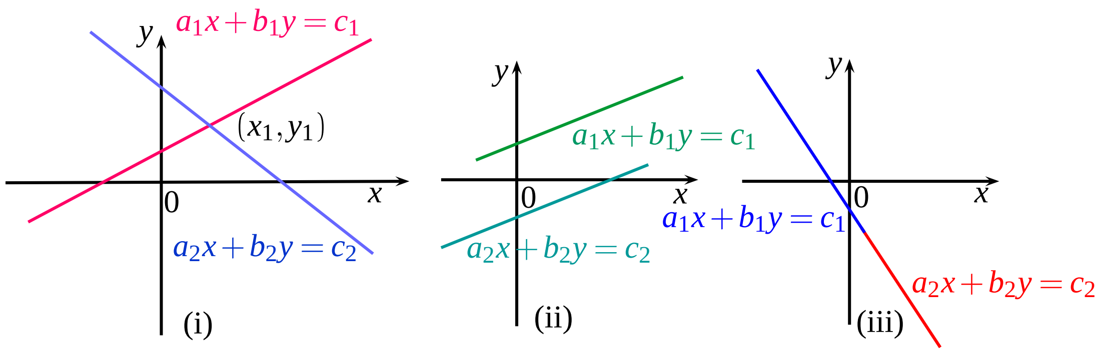
Gambar 2.3 adalah, gambar tiga persamaan baris tsb. Tiga bidang dalam Gambar 2.3 berpotongan di titik $(x,y,z)=(1,1,1)$. Berikutnya dibahas gambar kolom dari sistem persamaan linear tsb. Sistem persamaan linear yang telah dibahas dapat ditulis sebagai kombinasi linear vektor kolom sebagai berikut:

$$x\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\1\end{bmatrix},$$

dengan x,y dan z adalah bilangan riil. Dari hasil sebelumnya didapat bahwa yang memenuhi adalah $x=1, y=1$ dan $z=1$. Dengan demikian didapat kombinasi linear vektor kolom berikut:

$$1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Sebelum membahas penyelesaian SPL secara umum diberikan arti geometri dari apa yang telah dibahas terutama yang berkenaan dengan gambar baris persamaan SPL. Secara geometri, Persamaan (2.1) menyatakan persamaan dua garis $a_1x+b_1y=c_1$ dan $a_2x+b_2y=c_2$. Sehingga bila dua garis ini berpotongan pada satu titik (x_1,y_1), maka nilai $x=x_1$ dan $y=y_1$ merupakan penyelesaian ***tunggal*** dari persamaan (2.1). Sedangkan bila dua garis tsb. sejajar, maka tidak akan ada titik (x,y) yang berpotongan dengan dua garis ini. Jadi sistem Persamaan (2.1) tidak mempunyai penyelesaian. Tetapi bila salah satu garis merupakan ***kelipatan*** dari garis yang lainnya (berimpit), maka akan ada banyak takhingga titik yang memenuhi sistem Persamaan (2.1), yaitu persamaan ini, mempunyai penyelesaian yang tidak tunggal. Masing-masing Gambar 2.4 bagian (i), (ii) dan (iii) menunjukkan bahwa dua garis $a_1x+b_1y=c_1$ dan $a_2x+b_2y=c_2$ adalah berpotongan, sejajar dan berimpit.



Gambar 2.4: Persamaan dua garis.

Berikut ini diberikan contoh dari bentuk sistem Persamaan (2.1) untuk tiga kasus yang telah dibahas, yaitu mempunyai penyelesaian tunggal, tidak mempunyai penyelesaian dan mempunyai penyelesaian yang tidak tunggal.

Contoh 2.1.1 Untuk kasus yang pertama, diberikan sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ -2x+3y=4 \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

Untuk menyelesaikan sistem Persamaan (2.2) bisa disubstitusikan persamaan pertama $y=3-x$ kepersamaan yang kedua sehingga didapat $-2x+3(3-x)=4 \Rightarrow -5x=-5 \Rightarrow x=1$ dan $y=3-x=3-1=2$. Jadi penyelesaian sistem Persamaan (2.2) adalah tunggal. Ini berarti bahwa kedua garis $x+y=3$ dan $-2x+3y=4$ berpotongan di satu titik $(1,2)$.

Selanjutnya kasus yang kedua, diberikan sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+y=4 \end{array}\right\}. \tag{2.3}$$

Jelas bahwa, sistem Persamaan (2.3) adalah menyatakan persamaan dua garis $x+y=3$ dan $x+y=4$ yang sejajar. Kedua garis ini secara geometri, bila digambar dalam bidang dengan sumbu koordinat x dan y tidak akan berpotongan. Hal ini bisa ditunjukkan secara logika matematik sebagai berikut; andaikan dua garis $x+y=3$ dan $x+y=4$ berptongan di titik $x=a$ dan $y=b$, jadi $b=3-a$ dan $b=4-a \Rightarrow 3-a=4-a \Rightarrow 3=4$. hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $3 \neq 4$. Jadi benar bahwa tidak akan ada titik (a,b) yang terletak pada kedua garis $x+y=3$ dan $x+y=4$. Hal ini menunjukkan bahwa sistem Persamaan (2.3) tidak mempunyai penyelesaian.

Untuk kasus yang terakhir, diberikan sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{array}\right\}. \tag{2.4}$$

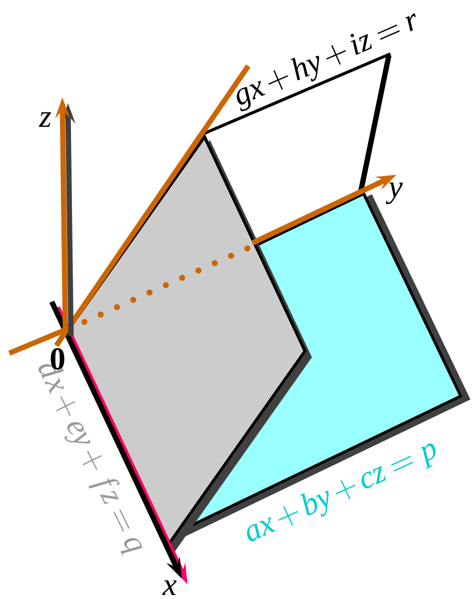
Sistem Persamaan (2.4) menyatakan dua garis $x+y=3$ dan $2x+2y=6$ yang saling berimpit. Bila persamaan yang pertama $y=3-x$ disubstitusi ke persamaan yang kedua didapat $2x+2(3-x)=6 \Rightarrow 6=6$. Hal ini menunjukkan bahwa selalu benar bahwa titik (x,y) dengan $y=3-x$ akan selalu memenuhi sistem Persamaan (2.4). Jadi ada banyak x dan y yang memenuhi Persamaan (2.4). Himpunan semua titik (x,y) yang memenuhi Persamaan (2.4) adalah $\{(x,y)\,|\,y=3-x,\,x\in\mathbb{R}\}$, misalnya titik $(0,3),(1,2)$ dan $(-1,4)$ adalah titik-titik yang memenuhi sistem Persamaan (2.4).

$\square$

Bahasan berikut adalah berkaitan dengan sistem persamaan linear yang terdiri dari tiga persamaan dengan tiga peubah, yaitu

$$\left.\begin{array}{c} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

dengan masing-masing a,b,c,d,e,f,g,h dan p,q,r anggota himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Sebagaimana pembahasan sebelumnya, ada tiga kasus untuk menyelesaikan sistem Persamaan (2.5). Kasus mempunyai penyelsaian tunggal, mempunyai banyak penyelesaian dan tidak mempunyai penyelesaian. Kasus yang pertama, adalah sistem Persamaan (2.5) mempunyai penyelesaian



Gambar 2.5: Tiga bidang berpotongan disatu titik potong **0.**

tunggal. Intepretasi geometri dari kasus ini diberikan dalam Gambar 2.5. Contoh berikut menjelaskan bahwa sistem Persamaan (2.5) mempunyai penyelesaian tunggal.

Contoh 2.1.2 Untuk kasus yang pertama, diberikan sistem persamaan

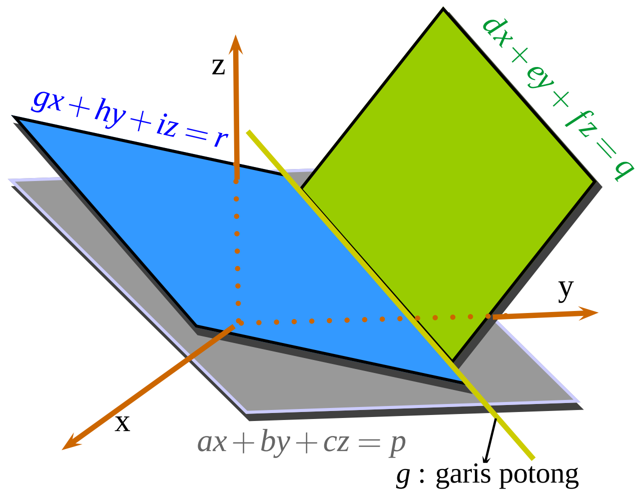
$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y+z=5 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}. \tag{2.6}$$

Untuk menyelesaikan sistem Persamaan (2.6) bisa disubstitusikan persamaan pertama $z = 6-x-y$ kepersamaan yang kedua sehingga didapat $y+6-x-y = 5 \Rightarrow x = 1$. Untuk $x = 1$, persamaan pertama dan ketiga menjadi sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{r} y+z=5 \\ y-z=-1 \end{array}\right\}.$$

Dari sistem persamaan ini, didapat $y = 2, z = 3$. Jadi penyelesaian sistem Persamaan (2.6) adalah $x = 1, y = 2$ dan $z = 3$. Tafsiran geometri dari kasus ini tiga bidang $x+y+z = 6, y+z = 5$ dan $x+y-z = 0$ berpotongan hanya di satu titik $(1,2,3)$.

□



Gambar 2.6: Tiga bidang berpotongan disatu garis potong g.

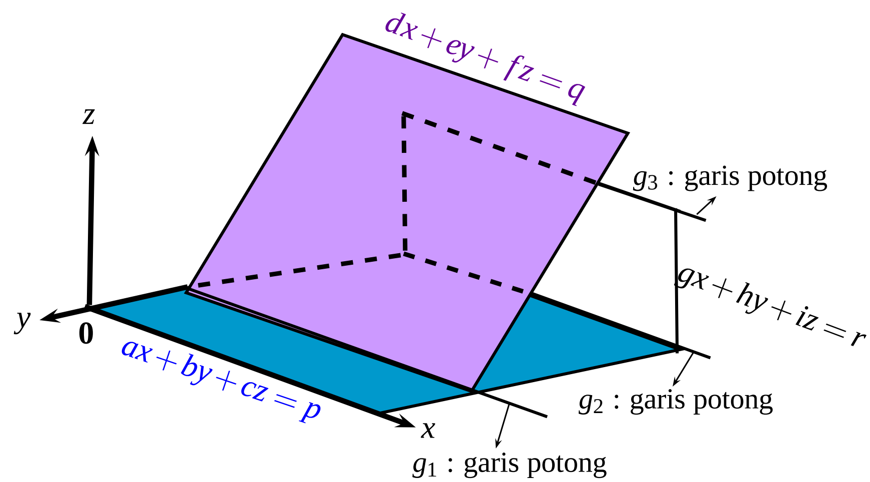
Kasus yang kedua, adalah sistem Persamaan (2.5) mempunyai penyelesaian banyak . Intepretasi geometri dari kasus ini diberikan dalam Gambar 2.6. Contoh berikut menjelaskan bahwa sistem Persamaan (2.5) mempunyai penyelesaian banyak.

Contoh 2.1.3 Untuk kasus yang kedua, diberikan sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+y=2 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}. \tag{2.7}$$

Untuk menyelesaikan sistem Persamaan (2.7) bisa disubstitusikan persamaan kedua $x+y = 2$ kepersamaan yang pertama $x+y+z = 6$ sehingga didapat $2+z = 6 \Rightarrow z = 4$. Untuk $z = 4$, semua persamaan dalam sistem Persamaan (2.7) menjadi persamaan $x+y = 2$. Hal, ini menjelaskan bahwa ketiga bidang $x+y+z = 6$, $x+y = 2$ dan $2x+2y-z = 0$ berpotongan pada satu garis g yang diberikan oleh persamaan $z = 4$, $x+y = 2$. Semua titik yang berada pada garis ini merupakan penyelesaian sistem Persamaan (2.7). Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{(x,y,z) \mid z = 4, x+y = 2\}$. Beberapa penyelesaian sistem Persamaan (2.7) adalah $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 4$ dan $x = -1$, $y = 3$, $z = 4$.

□



Gambar 2.7: Tiga bidang berpotongan ditiga garis potong.

Kasus yang Terakhir, adalah sistem Persamaan (2.5) tidak mempunyai penyelesaian. Suatu intepretasi geometri dari kasus ini diberikan dalam Gambar 2.7. Yaitu menyatakan bahwa tiga bidang berpotongan pada tiga garis yang saling sejajar dalam ruang. Hal ini menjelaskan bahwa tiga garis ini tidak pernah mempunyai titik potong. Jadi untuk kasus ini, sistem Persamaan (2.5) tidak akan pernah mempunyai penyelesaian. Contoh berikut menjelaskan bahwa sistem Persamaan (2.5) tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 2.1.4 Untuk kasus yang terakhir ini, diberikan sistem ersamaan

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+y=2 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}. \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) tidak mempunyai penyelesaian. Hal ini bisa ditunjukkan dengan suatu kontrakdiksi sebagai berikut. Andaikan (2.8) mempunyai penyelesaian di $x = x_0, y = y_0$ dan $z = z_0$, sehingga didapat $x_0 + y_0 = 2$, $z_0 = 6 - (x_0 + y_0) = 6 - 2 = 4$ dan $z_0 = (x_0 + y_0) = 2$. Terjadi suatu kontradiksi bahwa $4 = 2$. Hal ini menunjukkan bahwa tidak akan ada x, y dan z yang memenuhi sistem Persamaan (2.8) yaitu sistem persamaan ini tidak mempunyai penyelesaian. $\square$

Kajian gambar kolom SPL 2.5 dari tiga kasus yang telah dibahas memberikan gambaran bahwa,

1. Kasus yang pertama tiga bidang berpotongan di satu titik, maka kombinasi linear berikut

$$x\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

   hanya dipenuhi untuk satu nilai tunggal x, y dan z.

2. Kasus yang kedua tiga bidang berpotongan di satu garis potong g, maka kombinasi linear berikut
$$x\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\e\\h\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}c\\f\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$$
dipenuhi untuk beberapa nilai x,y dan z.

3. Kasus yang ketiga, tiga bidang berpotongan di tiga garis, maka tidak ada nilai x,y dan c yang memenuhi kombinasi linear berikut
$$x\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\e\\h\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}c\\f\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}.$$

Sebegitu jauh apa yang telah dibahas dalam bagian ini hanyalah sebagai awal bahasan sistem persamaan linear. Telah diuraikan bahwa dalam awal bagian ini, diberikan contoh-contoh sistem linear serta menyelesaikan sistem persamaan ini dan memberikan arti geometri dari sistem persamaan linear yang dibahas dalam beberapa kasus yang umum yaitu, sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian tunggal, mempunyai banyak penyelesaian dan tidak mempunyai penyelesaian. Pembahasan dimulai dengan sistem persamaan linear dengan dua persamaan dan dua peubah dan dilanjutkan dengan tiga persamaan dengan tiga peubah. Yaitu banyaknya persamaan dengan banyaknya yang ditanyakan adalah sama. Cara menyelesaikan sistem linear yang telah dibahas ini menggunakan substitusi yang banyak dikenal sbelumnya. Untuk contoh-contoh yang telah dibahas masih memungkinkan menggunakan cara substitusi, tetapi untuk masalah yang lebih umum dan rumit tentunya hal ini tidak memadai/mudah menggunakan cara substitusi untuk menyelesaikannya. Untuk itu, dalam Bab 2.2 yang dibahas berikutnya, akan dijelaskan secara rinci cara untuk menyelesiakan sistem persamaan linear yang lebih umum dari pembahasan sebelumnya.

Sebagai akhir dari bagian ini diberikan beberapa latihan soal. Latihan soal ini diberikan agar supaya menambah kemampuan dasar menyelesiakan sistem persamaan linear teridiri dari dua persamaan dengan dua peubah serta tiga persamaan dengan tiga peubah.

Latihan

Latihan 2.1.1 *Selesaikan sistem persamaan berikut serta berikan arti geometrinya.*

$$\text{a).}\ \begin{cases}x+y=7\\2x+4y=18\end{cases}\quad \text{b).}\ \begin{cases}x+2y=3\\3x+6y=3\end{cases}\quad \text{c).}\ \begin{cases}2x-5y=-2\\-4x+10y=4\end{cases}$$

Latihan 2.1.2 *Diberikan sistem persamaan*

$$\text{a).}\ \begin{cases}ax+by=6\\3ax+2by=3\end{cases}\quad \text{b).}\ \begin{cases}ax+by=6\\x+2y=3\end{cases}\quad \text{c).}\ \begin{cases}x-ay=8\\3x+6y=b\end{cases}$$

Tentukan semua nilai dari a dan b supaya :

i. *sistem persamaan* a) *mempunyai penyelesaian tunggal*

ii. *sistem persamaan* b) *tidak mempunyai penyelesaian*

iii. *sistem persamaan* c) *mempunyai banyak penyelesaian.*

Latihan 2.1.3 *Selesaikan sistem persamaan berikut serta berikan arti geometrinya.*

$$\text{a)}.\ \begin{cases} x+2y+2z=4 \\ x+3y=5 \\ 2x+6y+5z=6 \end{cases} \quad \text{b)}.\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y+z=8 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \text{c)}.\ \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 7x+8y+9z=3 \end{cases}$$

2.2 Menyelesaikan Sistem Persamaan

Dalam bagian ini dibahas suatu sistem persamaan linear terdiri dari m persamaan dengan n peubah untuk tiga hal m lebih besar dari n, m sama dengan n dan m lebih kecil dari n. Selanjutnya diberikan cara untuk menyelesikan sistem persamaan linear ini dengan metode ***eliminasi Gauss*** dan ***Gauss-Jordan***. Kemudian dibahas hal-hal dasar yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan meliputi matriks diperbesar (augmented matrix) serta operasi baris.

Bentuk sistem persamaan linear yang mempunyai m persamaan dengan n peubah diberikan oleh persamaan

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\cdots+a_{i,n}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1+a_{j,2}x_2+\cdots+a_{j,n}x_n=b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\ldots+a_{m,n}x_n=b_m \end{cases} \tag{2.9}$$

Ada tiga macam himpunan penyelesaian dari sistem persamaan (2.9) yaitu, pertama himpunan dengan satu anggota yang menyatakan sistem persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian tunggal, kedua himpunan dengan tak-hingga banyak anggota yang menyatakan sistem persamaan (2.9) mempunyai banyak penyelesaian. Dalam hal sistem persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian dinamakan **konsisten**. Ketiga, himpunan kosong yang menyatakan sistem persamaan (2.9) tidak mempunyai penyelesaian. Dalam hal ini sistem persamaan (2.9) disebut **tidak konsisten**. Dua sistem persamaan linear dengan banyak persamaan dan banyak peubah sama dikatakan ***ekivalen*** bila kedua sistem persamaan linear tsb. yang satu ***bisa diperoleh*** dari persamaan yang lainnya dan mempunyai himpunan penyelesian yang sama. Sistem persamaan linier (2.9) dikatakan

mempunyai penyelesaian bila ada $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}r_1 + a_{1,2}r_2 + \cdots + a_{1,n}r_n = b_1 \\ a_{2,1}r_1 + a_{2,2}r_2 + \cdots + a_{2,n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}r_1 + a_{i,2}r_2 + \cdots + a_{i,n}r_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}r_1 + a_{j,2}r_2 + \cdots + a_{j,n}r_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}r_1 + a_{m,2}r_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Dua persamaan linear

$$x + y = 1 \tag{2.11}$$

dan

$$2x + 2y = 2 \tag{2.12}$$

adalah ekivalen sebab persamaan (2.12) bisa diperoleh dengan mengalikan 2 pada kedua ruas persamaan (2.11) dan himpunan penyelesian dari persamaan (2.11) adalah

$$S_1 = \{(x,y) \,|\, y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$$

sedangkan himpunan penyelesian dari persamaan (2.12) adalah

$$S_2 = \{(x,y) \,|\, 2y = 2 - 2x, x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \,|\, y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}.$$

Terlihat bahwa $S_1 = S_2$, jadi persamaan (2.11) ekivalen dengan persamaan (2.12). Begitu juga dua sistem persamaan berikut adalah ekivalen

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x - 5y = -3 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

dan

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 5y = -3 \\ x + y = 2 \end{array}\right. \tag{2.14}$$

sebab persamaan (2.14) bisa diperoleh dari persamaan (2.13), yaitu menukar persamaan yang pertama dengan persamaan yang kedua dan sebaliknya dalam persamaan (2.13). Bisa diselidiki bahwa kedua persamaan mempunyai peyelesaian $x = 1$ dan $y = 1$. Selanjutnya, persamaan (2.13) dan persamaa

$$\left\{\begin{array}{r} x + y = 2 \\ -7y = -7 \end{array}\right. \tag{2.15}$$

adalah ekivalen, sebab persamaan (2.15) dapat diperoleh dari persamaan (2.13), yaitu persamaan kedua dalam persamaan (2.15) diperoleh dari kedua ruas persamaan pertama (2.13) dikalikan dengan -2 dan hasilnya ditambahkan pada persamaan kedua dari persamaan (2.13). Jelas bahwa persamaan (2.15) mempunyai penyelesaian $y = 1$ dan $x = 1$ yang sama dengan penyelesaian dari persamaan (2.13).

Pengertian sistem persamaan linear ekivelen ini berguna untuk menyelesaikan sistem persamaan (2.9) terutama pada saat menggunakan cara eleminasi Gauss. Pada dasarnya metode eliminasi Gauss adalah suatu cara dari transformasi suatu sistem persamaan linear menjadi suatu sistem persamaan linear lainya yang lebih sederhana lewat pengeleminasian peubah, tetapi keduanya ekivalen. Cara pengeliminasian ini meliputi tiga operasi sederhana yang mentransformasi satu sistem persamaan ke sistem persamaan lainnya yang ekivalen.

Untuk menjelaskan operasi ini, misalkan P_k menyatakan persamaan ke-k dalam persamaan (2.9), yaitu

$$P_k: \; a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k$$

dengan $1 \leq k \leq m$ dan ditulis sistem persamaan linear (2.9) sebagai

$$S = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\}.$$

Untuk suatu sistem persamaan linear S, masing-masing tiga **operasi elementer** menghasilkan suatu sistem persamaan linear S' yang ekivalen.

1. Pertukaran persamaan ke-i dan ke-j sedangkan persamaan yang lainnya tetap, yaitu

$$S = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\} \Rightarrow S' = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\}. \tag{2.16}$$

2. Kedua ruas persamaan ke-i dikalikan dengan suatu konstata tidak-nol $\alpha \in \mathbb{R}$ sedangkan persamaan yang lainnya tetap, yaitu

$$S = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\} \Rightarrow S' = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ \alpha P_i \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\}, \text{dimana } \alpha \neq 0\,. \tag{2.17}$$

   Dalam hal ini αP_i dinamakan **kelipatan** dari P_i.

3. Menambah persamaan ke-j dengan kelipatan dari persamaan ke-i sedangkan persamaan yang lain tetap, yaitu

$$S = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\} \Rightarrow S' = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j + \alpha P_i \\ \vdots \\ P_m \end{array} \right\}. \tag{2.18}$$

Tiga operasi elementer, mentransformasi suatu sistem persamaan linear ke bentuks sistem persamaan linear lainnya yang yang ekivalen. Tiga operasi yang dilakukan dalam (2.16), (2.17) dan (2.18) dinamakan **Operasi Baris Elementer (OBE)**. Berikut ini diberikan suatu teorema tentang OBE.

Teorema 2.2.1 Bila dalam Sistem Persamaan Linier (2.9) S dilakukan OBE sehingga didapat persamaan S' dan S mempunyai penyelesaian, maka peyelesaian dalam S' adalah sama dengan penyelesaian dalam S.

Bukti Bila dalam Persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian, maka ada

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$$

yang memenuhi

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}r_1 + a_{1,2}r_2 + \cdots + a_{1,n}r_n = b_1 \\ a_{2,1}r_1 + a_{2,2}r_2 + \cdots + a_{2,n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}r_1 + a_{i,2}r_2 + \cdots + a_{i,n}r_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}r_1 + a_{j,2}r_2 + \cdots + a_{j,n}r_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}r_1 + a_{m,2}r_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Bila dalam Sistem Persamaan Linier (2.9) dilakukan OBE (2.16), maka didapat sistem persamaan

S' yang diberikan oleh

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.20}$$

Tetapi berdasarkan hipotesis ada $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$ yang memenuhi Persamaan 2.10, sehingga didapat

$$\begin{cases} a_{1,1}r_1 + a_{1,2}r_2 + \cdots + a_{1,n}r_n = b_1 \\ a_{2,1}r_1 + a_{2,2}r_2 + \cdots + a_{2,n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{j,1}r_1 + a_{j,2}r_2 + \cdots + a_{j,n}r_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i,1}r_1 + a_{i,2}r_2 + \cdots + a_{i,n}r_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m,1}r_1 + a_{m,2}r_2 + \ldots + a_{m,n}r_n = b_m \end{cases} \tag{2.21}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ adalah penyelesaian dari Sistem Persamaan 2.20.

Berikutnya, bila dalam Sistem Persamaan Linier (2.9) dilakukan OBE (2.17), maka didapat sistem persamaan S' yang diberikan oleh

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha a_{i,1}x_1 + \alpha a_{i,2}x_2 + \cdots + \alpha a_{i,n}x_n = \alpha b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.22}$$

Tetapi berdasarkan hipotesis ada $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$ yang memenuhi Persamaan 2.10, yang diberikan oleh Persamaan 2.21. Dengan demikian bila persamaan yang ke-i dalam Persamaan 2.21 kedua ruas dikalikan dengan α didapat

$$P_i : \alpha a_{i,1}r_1 + \alpha a_{i,2}r_2 + \cdots + \alpha a_{1,n}r_n = \alpha b_i$$

sehingga didapat

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}r_1 + a_{1,2}r_2 + \cdots + a_{1,n}r_n = b_1 \\ a_{2,1}r_1 + a_{2,2}r_2 + \cdots + a_{2,n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha a_{i,1}r_1 + \alpha a_{i,2}r_2 + \cdots + \alpha a_{i,n}r_n = \alpha b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}r_1 + a_{j,2}r_2 + \cdots + a_{j,n}r_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}r_1 + a_{m,2}r_2 + \ldots + a_{m,n}r_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ adalah penyelesaian dari Sistem Persamaan 2.22.

Terakhir, bila dalam Sistem Persamaan Linier (2.9) dilakukan OBE (2.18), maka didapat sistem persamaan S' yang diberikan oleh

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \alpha a_{i,2}x_2 + \cdots + \alpha a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (a_{j,1} + \alpha a_{i,1})x_1 + (a_{j,2} + \alpha a_{i,2})x_2 + \cdots + (a_{j,n} + \alpha a_{i,n})x_n = b_j + \alpha b_i \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.24}$$

Tetapi berdasarkan hipotesis ada $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in R^n$ yang memenuhi Persamaan 2.10, yang diberikan oleh Persamaan 2.21. Dengan demikian bila persamaan yang ke-j dalam Persamaan 2.21 ditambah α kali persamaan yang ke-i ruas didapat

$$P_j : (a_{j,1} + \alpha a_{i,1})r_1 + (a_{j,2} + \alpha a_{i,2})r_2 + \cdots + (a_{j,n} + \alpha a_{1,n})r_n = b_i + \alpha b_i$$

sehingga didapat

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}r_1 + a_{1,2}r_2 + \cdots + a_{1,n}r_n = b_1 \\ a_{2,1}r_1 + a_{2,2}r_2 + \cdots + a_{2,n}r_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}r_1 + a_{i,2}r_2 + \cdots + a_{i,n}r_n = b_i \\ \vdots \\ (a_{j,1} + \alpha a_{i,1})r_1 + (a_{j,2} + \alpha a_{i,2})r_2 + \cdots + (a_{j,n} + \alpha a_{1,n})r_n = b_i + \alpha b_i \\ \vdots \\ a_{m,1}r_1 + a_{m,2}r_2 + \ldots + a_{m,n}r_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.25}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ adalah penyelesaian dari Sistem Persamaan 2.24.

$\square$

Jadi berdasarkan Teorema 2.2.1, tiga operasi baris elementer tidak akan mengubah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear aslinya. Berikut ini diberikan suatu contoh sederhana sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 6x+2y+z=-1 \\ -2x+2y+z=7 \end{cases} \tag{2.26}$$

Pada setiap langkah, cara untuk menyelesaikan persamaan (2.26) difokuskan pada suatu posisi koefisien tak-nol yang dinamakan ***pivot*** dan untuk mengeliminasi semua suku dibawah pivot menggunakan tiga operasi baris elementer. Bila elemen pivot sama dengan nol, maka persamaan pivot ditukar dengan persamaan dibawahnya untuk mendapat elemen pivot yang tidak nol. Bila koefisien dari x pada persamaan tak-nol, maka elemen ini diambil sebagai pivot. Pada contoh ini, elemen 2 dalam sistem berikut adalah pivot untuk langkah yang pertama

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 6x+2y+z=-1 \\ -2x+2y+z=7 \end{cases}$$

Langkah 1: Eliminasi semua suku dibawah pivot.

- Persamaan kedua kurangi 3 kali persamaan pertama

$$\begin{cases} 2x+y+z &=& 1 & \\ -y-2z &=& -4 & \qquad (P_2-3P_1) \\ -2x+2y+z &=& 7 & \end{cases}$$

- Persamaan ketiga ditambah persamaan pertama

$$\begin{cases} 2x+y+z &=& 1 & \\ -y-2z &=& -4 & \\ 3y+2z &=& 8 & \qquad (P_3+P_1) \end{cases}$$

Langkah 2: Pilih suatu pivot baru.

- Untuk memilih pivot baru, pindah kebawah dari posisi pivot yang sudah ada dan kekanannya. Bila koefisien ini tak-nol, maka kpefisien ini adalah pivot. Bila nol, maka tukar dengan persamaan dibawahnya. Dalam hal ini -1 adalah pivot yang baru.

$$\begin{cases} 2x+y+z &=& 1 \\ -1y-2z &=& -4 \\ 3y+2z &=& 8 \end{cases}$$

Langkah 3: Eliminasi semua suku dibawah pivot yang kedua.

- Persamaan ketiga tambah 3 kali persamaan kedua

$$\begin{cases} 2x+y+z &=& 1 & \\ -1y-2z &=& -4 & \\ -4z &=& -4 & \qquad (P_3+3P_2) \end{cases} \tag{2.27}$$

- Umumnya, pada setiap langkah pindahkan kebawah pivot terdahulu dan gerakan kekanan untuk memperoleh pivot yang berikutnya, kemudian eliminasi semua suku dibawah pivot ini sampai tidak ada lagi yang bisa diproses untuk pengeliminasian. Jadi pivot yang ketiga adalah -4 dan tidak ada lagi elemen dibawah pivot ini untuk dieliminasi. Jadi proses dihentikan.

Pada akhir dari Langkah 3, dikatakan sistem persamaan menjadi ***bentuk segitiga atas***. Suatu sistem persamaan berbentuk segi tiga atas mudah diselesaikan dengan menggunakan cara ***mensubstitusi mumdur***, yaitu persamaan terakhir diselesaikan, kemudian hasilnya substitusikan kepersamaan yang diatasnya, dst. sampai semua peubah didapatkan. Untuk contoh ini, selesaikan persamaan terakhir dari persamaan (2.27), didapat

$$z = 1.$$

Substitusikan $z = 1$ kepersamaan kedua dari persamaan (2.27), didapat

$$y = 4 - 2z = 4 - 2(1) = 2.$$

Akhirnya, substitusikan $z = 1, y = 2$ kepersamaan yang pertama dari persamaan (2.27), didapat

$$x = \frac{1}{2}(1 - y - z) = \frac{1}{2}(1 - 2 - 1) = -1.$$

Hasil yang didapat menunjukkan bahwa sistem persamaan (2.26) dan sistem persamaan (2.27) berdasarkan Teorema 2.2.1 adalah ekivalen, jadi penyelesaian dari sistem persamaan (2.26) adalah $x = -1, y = 2$ dan $z = 1$.

Jelas bahwa tidak ada suatu alasan untuk menuliskan simbol "x", "y" dan "z" serta "$=$" pada setiap langkah yang mana hanya memperlakukan koefisien dalam penghitungan. Bila simbol-simbol tsb. dihilangkan, maka suatu sistem persamaan linear ditampilkan kesuatu susunan dalam bentuk persegi panjang berisi bilangan-bilangan yang mana setiap baris horizontal menyatakan satu persamaan. Misalnya, sistem persamaan linear (2.26) bila dituliskan dalam bentuk susunan persegi panjang adalah:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]. \qquad \text{(Tanda garis tegak menyatakan} = .)$$

Susunan koefien disebalah kiri garis tegak dinamakan ***matriks koefisien*** daris sistem persamaan. Keseluruhan elemen dalam susunan dinamakan ***matriks diperbesar (augmented matrix)*** dari sistem persamaan linear. Bila koefisien matriks dinyatakan oleh $\boldsymbol{A}$ dan elemen disebelah kanan garis tegak oleh $\boldsymbol{b}$, maka matriks diperbesar dari sistem persamaan linear dinotasikan oleh $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$.

Secara formal, suatu skalar dari bilangan real atau kompleks dan **matriks** adalah suatu susunan berbentuk persegi panjang dari skalar. Matriks $\boldsymbol{A}$ biasanya ditulis sebagai

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Elemen-elemen dari matriks $\boldsymbol{A}$ dinyatakan oleh $a_{i,j}$ dengan $i \in \underline{m}$ dan $j \in \underline{n}$, dimana $\underline{m} = \{1, 2, \cdots, m\}$ dan $\underline{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$. Elemen $a_{i,j}$ menyatakan elemen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang terletak pada baris ke-i kolom ke-j. Suatu contoh

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 5 & -9 \\ -3 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \text{ maka } a_{1,1} = 2, a_{1,2} = 1, \cdots, a_{3,4} = 7. \tag{2.28}$$

Suatu ***submatriks*** dari matriks $\boldsymbol{A}$ adalah suatu susunan yang diperoleh dari menghapus sebarang kombinasi dari baris dan kolom matriks $\boldsymbol{A}$. Suatu contoh matriks

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

adalah suatu submatriks dari matriks $\boldsymbol{A}$ pada (2.28) dengan menghapus baris kedua dan kolom kedua, dan ketiga dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Matriks $\boldsymbol{A}$ dikatakan berukuran $m \times n$ bila $\boldsymbol{A}$ mempunyai baris sebanyak m dan kolom sebanyak n. Dengan demikian, matriks berukuran 1×1 adalah skalar, sebaliknya suatu skalar adalah matriks yang berukuran 1×1. Untuk penekanan bahwa matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$ juga ditulis sebagai $\boldsymbol{A}_{m \times n}$. Bila $m = n$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ dikatakan matriks ***persegi***. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris dinamakan ***vektor baris*** dan bila hanya terdiri dari satu kolom dinamkan ***vektor kolom***.

Simbol $\boldsymbol{A}_{i,*}$ digunakan untuk menyatakan baris ke-i dan $\boldsymbol{A}_{*,j}$ menyatakan kolom ke-j dari matriks $\boldsymbol{A}$. Contoh bila $\boldsymbol{A}$ matriks pada (2.28), maka

$$\boldsymbol{A}_{3,*} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{A}_{*,3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Untuk persamaan sistem linear (2.9) eliminasi Gauss bisa dilakukan melalui matriks diperbesar (augmented matrix) $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ dengan menggunakan operasi baris elementer pada $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$. Operasi elementer ini meliputi tiga operasi baris elementer yang diberikan pada (2.16), (2.17) dan (2.18). Untuk matriks berukuran $m \times n$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{1,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{i,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{j,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{m,*} \end{bmatrix},$$

tiga macam operasi baris elementer pada $\boldsymbol{M}$ adalah sebagai berikut.

- Macam I: Pertukaran baris ke-i dan baris ke-j menghasilkan

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{1,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{j,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{i,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{m,*} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

- Macam II: Kalikan baris ke-i dengan skalar taknol menghasilkan

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{1,*} \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{M}_{i,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{j,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{m,*} \end{bmatrix}, \ \alpha \neq 0. \tag{2.30}$$

- Macam III: Tambah baris ke-j dengan kelipatan baris ke-i menghasilkan

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{1,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{i,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{j,*} + \alpha\boldsymbol{M}_{i,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M}_{m,*} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (2.9) menggunakan operasi baris elementer, mulai dengan matriks diperbesar $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ dan jadikan bentuk segitiga atas matriks koefisien $\boldsymbol{A}$ dengan melakukan operasi baris elementer pada $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$. Kembali pada contoh yang diberikan oleh sistem persamaan linear (2.26), dengan melakukan operasi baris elementer pada matriks diperbesar $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ didapat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ B_2 - 3B_1 \\ B_3 + B_1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ B_3 + 3B_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right].$$

Matriks diperbesar yang terakhir menyatakan bentuk segitiga atas dari sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 1 \\ -y-2z &= -4 \\ -4z &= -4 \end{cases}$$

Dengan substitusi mundur, didapat hasil seperti sebelumnya $z=1, y=2$ dan $x=-1$. Umumnya, bila suatu sistem persamaan linear $n \times n$ mempunyai bentuk segitiga atas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} & c_1 \\ 0 & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} & c_2 \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{n,n} & c_n \end{array}\right] \tag{2.32}$$

dimana masing-masing $t_{i,i} \neq 0$, maka algoritma umum untuk substitusi mundur diberikan sebagai berikut.

Algoritma Substitusi Mundur

Tentukan x_i pada (2.32), yang pertama menentukan $x_n = \frac{c_n}{t_{n,n}}$ kemudian secara berulang untuk $i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$, hitung

$$x_i = \frac{1}{t_{i,i}}(c_i - t_{i,i+1}x_{i+1} - t_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - t_{i,n}x_n).$$

Suatu cara untuk menaksir effisiensi suatu algorithma adalah menghitung banyaknyanya operasi aritmatika yang digunakan. Untuk berbagai alasan, tidak dibedakan tambah dan kurang, dan kali dan bagi. Lagi pula kali/bagi dihitung secara terpisah dari tambah/kurang. Bahkan bila secara rinci menggunakan suatu algoritma, penting bahwa mengetahui banyaknya operasi untuk eliminasi Gauss dengan substitusi mundur sehingga akan didapat suatu dasar perbandingan ketika menggunakan algoritma yang lain. Berikut ini diberikan banyaknya operasi aritmatika yang digunakan dalam eliminasi Gauss.

Banyaknya Operasi Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss dengan substitsusi mundur untuk sistem persamaan linear $n \times n$ membutuhkan

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}, \quad \text{kali/bagi}$$

dan

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}, \quad \text{tambah/kurang.}$$

Bila n meningkat, suku $n^3/3$ mendominasi suku yang lainnya. Oleh karena itu, hal yang penting Eliminasi Gauss dengan substitusi mundur untuk sistem persamaan linear $n \times n$ membutuhkan sekitar $n^3/3$ operasi kali/bagi dan membutuhkan juga sekitar $n^3/3$ operasi tambah/kurang.

Contoh 2.2.1 Selesaikan sistem persamaan berikut menggunakan eliminasi Gauss dengan substitusi mundur:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Penyelesaian : Matriks diperbesar dari sistem persamaan linear adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right].$$

Karena pivot pertama adalah 0, maka tukar baris pertama dengan baris kedua dan sebaliknya, selanjutnya lakukan eliminasi elemen elemen dibawah pivot yang dipilih sehingga didapat

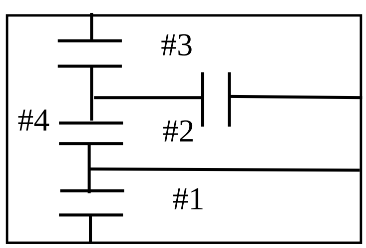
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3-B_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3-B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right].$$

Selanjutnya, lakukan substitusi mundur, didapat

$$\begin{aligned} &x_3 = \tfrac{-6}{-2} = 3, \\ &x_2 = 3 + x_3 = 3 + 3 = 6, \\ &x_1 = -\tfrac{1}{2}(1 - 4x_2 + x_3) = -\tfrac{1}{2}(1 - 24 + 3) = 10. \end{aligned}$$

□

Contoh 2.2.2 Misalkan bahwa 100 serangga terdistribusi dalam suatu ruang tertutup terdiri dari empat ruang dengan jalur-lintas diantaranya sebagaimana dalam Gambar 2.8. Pada akhir satu



Gambar 2.8: Distribusi serangga dalam suatu ruangan

menit, serangga terdistribusi kembali dengan sendirinya. Asumsikan bahwa satu menit tidak cukup waktu untuk suatu serangga pindah ke lebih dari satu ruang dan pada akhir satu menit 40% serangga disetiap ruang tidak meninggalkan ruangan, mereka tetap pada awal menit. Serangga yang meninggalkan ruangan secara seragam menyebar diantara ruangan, serangga ini secara langsung dapat mencapai keadaan semula mereka tinggal., misalnya # 3 separuh bergerak ke # 2

dan separuh ke # 4. Bila diakhir satu menit terdapat 12, 25, 26 dan 37 serangga masing-masing di ruang # 1, # 2, # 3 dan # 4, maka tentukan apa seharusnya distribusi awal.
Jawab Bila x_i adalah banyaknya keadaan awal dalam ruangan # i dengan $i = 1,2,3,4$, didapat sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 0.4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0.2x_4 = 12 \\ 0x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 = 25 \\ 0x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 = 26 \\ 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 = 37 \end{cases}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss dan substitusi mundur didapat $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$ dan $x_4 = 40$.

□

2.3 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan Sage NoteBook

Dalam kesempatan ini digunakan Sage NoteBook untuk menyelesaikan sistem Persamaan Linear melalui Operasi baris Elementer ataupun dengan Eleminasi Gauss-Jordan.

Misalnya diberikan sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier tersebut dalam Sel Sage NoteBook ketik perintah berikut.

```
A=matrix([[1,2],[2,1]])
b=matrix([[1],[2]])
Ab = A.augment(b,subdivide=True)
html("Matrik diperbesar $[A|b]=%s$"%latex(Ab))
```

Ouput dari perintah tersebut adalah

Matrik diperbesar $[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Selanjutnya meyelesaikan sistem persamaan linier dengan OBE gunakan perintah berikut:

```
Ac=copy(Ab)
Ac.add_multiple_of_row(1 ,0,-2 )
html("Hasil OBE $%s$"%latex(Ac))
```

outputnya adalah

Hasil OBE : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$

Dari hasil ini menjelaskan bahwa $y = 0$ dan $x = 1$.

Latihan

Latihan 2.3.1 *Gunakan Eliminasi Gauss dengan substitusi mundur pada sistem persamaan linear berikut*

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x_2 - 3x_3 & = 3 \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 & = 4 \\ -x_1 + 8x_2 - 6x_3 & = 5 \end{cases}$$

Latihan 2.3.2 *Selesaikan sistem persamaan linear berikut*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_2 + 3x_4 & = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_3 & = 4 \end{cases}$$

Latihan 2.3.3 *Diberikan sistem persamaan linear*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ay + 5z = 10 \\ 2x + 7y + az = b \end{cases}$$

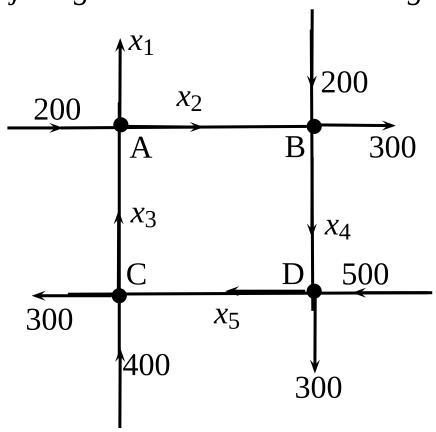
(a) *Dapatkan nilai a dan b supaya sistem persamaan linear mempunyai penyelesaian tunggal.*

(b) *Dapatkan nilai a dan b supaya sistem persamaan punya penyelesaian tidak tunggal.*

Latihan 2.3.4 *Suatu jaringan dari aliran terdiri dari 4 titik A, B, C dan D yang dihubungkan oleh garis. Dengan asumsi bahwa*

- *Total aliran yang masuk ke suatu titik sama dengan total aliran yang keluar dari suatu titik.*
- *Total aliran yang masuk kedalam jaringan sama dengan total aliran yang keluar dari jaringan.*

Bila gambar dari suatu jaringan aliran diberikan oleh gambar berikut



Maka tentukan nilai dari x_1, x_2, x_3, x_4 *dan* x_5.

Latihan 2.3.5 *Diberikan tiga sistem persamaan linear dimana koefisennya sama untuk setiap sistem tetapi bagian kanan persamaan berbeda:*

$$\left\{ \begin{array}{c|c|c} 4x-8y+5z=1 & 0 & 0 \\ 4x-7y+4z=0 & 1 & 0 \\ 3x-4y+2z=0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Selesaikan semua tiga persamaan sistem linear tsb. dengan menggunakan eliminasi Gauss pada bentuk matriks yang diperbesar

$$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b_1}\,|\,\boldsymbol{b_2}\,|\,\boldsymbol{b_3}]\,.$$

Latihan 2.3.6 *Dapatkan sudut* α, β *dan* γ *yang memenuhi persamaan berikut:*

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\sin\alpha-\cos\beta+\tan\gamma=3 \\ 4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma=2 \\ 6\sin\alpha-3\cos\beta+\tan\gamma=9 \end{array} \right.$$

dimana $0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ 0 \leq \beta \leq 2\pi$ *dan* $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Latihan 2.3.7 *Usahakan menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:*

$$\left\{ \begin{array}{c} -x+3y-2z=4 \\ -x+4y-3z=5 \\ -x+5y-4z=6 \end{array} \right.$$

menggunakan eliminasi Gauss dan terangkan mengapa sistem persamaan mempunyai banyak takhingga penyelesaian.

Latihan 2.3.8 *Sistem persamaan linear berikut tidak mempunyai penyelesaian:*

$$\left\{ \begin{array}{c} -x+3y-2z=1 \\ -x+4y-3z=0 \\ -x+5y-4z=0. \end{array} \right.$$

Usahakan menyelesaikan sistem persamaan linear ini menggunakan eliminasi Gauss dan jelaskan mengapa sistem persamaan linear tsb. tidak mungkin untuk diselesaikan.

Latihan 2.3.9 *Gunakan sistem persamaan linear* 3×3 *untuk memperoleh koefisien suatu persamaan parabola* $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ *yang melalui tiga titik* $(1,1)$, $(2,2)$ *dan* $(3,0)$.

Latihan 2.3.10 *Diketahui seperti Contoh 2.2.2 dan bila distribusi awal adalah 20, 20, 20 dan 40, maka tentukan distribusi akhir pada satu menit.*

Latihan 2.3.11 *Terangkan mengapa suatu sistem persamaan linear tidak akan pernah mempunyai tepat dua penyelesaian yang berbeda. Perluas pernyataan ini, untuk menerangkan fakta bahwa bila suatu sistem persamaan linear mempunyai lebih dari satu penyelesaian, maka penyelesaian itu haruslah banyak takhingga penyelesaian.*

Latihan 2.3.12 *Misalkan bahwa* $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ *adalah matriks diperbesar dari suatu sistem persamaan linear. Telah diketahui bahwa operasi baris elementer tidak mengubah penyelesaian sistem persamaan linear. Bagaimanapun, tidak disebutkan bahwa bila* ***operasi kolom*** *dapat mempengaruhi suatu penyelesaian suatu sistem persamaan linear.*

(a) *Uraikan akibat pada penyelesaian suatu sistem persamaan linear bila kolom* $\boldsymbol{A}_{*,j}$ *dan* $\boldsymbol{A}_{*,k}$ *saling dipertukarkan.*

(b) *Uraikan akibat pada penyelesaian suatu sistem persamaan linear bila kolom* $\boldsymbol{A}_{*,j}$ *diganti oleh* $\alpha \boldsymbol{A}_{*,j}$ *dengan* $\alpha \neq 0$.

(c) *Uraikan akibat pada penyelesaian suatu sistem persamaan linear bila kolom* $\boldsymbol{A}_{*,j}$ *diganti oleh* $\boldsymbol{A}_{*,j} + \alpha \boldsymbol{A}_{*,k}$.
Petunjuk : *Lakukan suatu percobaan dengan matriks berukuran* 2×2 *dan* 3×3.

Pada akhir bagian ini dibahas metode menyelesaiakna sistem persamaan linear menggunakan apa yang dinamakan ***Gauss-Jordan***. Metode ini mengenalkan suatu variasi eleminasi Gauss yang dikenal dengan nama ***Metode Gauss-Jordan***. Walaupun ada beberapa yang membingungkan ketika Jordan menerima penghargaan untuk algoritma ini, sekarang jelas bahwa faktanya metode ini dikenalkan oleh seorang geodesi yang bernama Wilhelm Jordan (1842-1899) dan bukan oleh yang telah banyak dikenal oleh matematikawan yaitu Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922). Dua keutamaan dari metode Gauss-Jordan yang membedakan dengan Eleminasi Gauss sebagai berikut.

- Pada setiap langkah, elemen pivot dijadikan 1.

- Pada setiap langkah, semua suku-suku diatas pivot dan juga dibawahnya dieliminasi.

Dengan kata lain, bila

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right]$$

matriks diperbesar yang berkaitan dengan sistem persamaan linear, maka operasi baris elementer digunakan untuk mereduksi matriks ini menjadi matriks berbentuk

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right].$$

Tampak bahwa penyelesaian diberikan oleh kolom terakhir, yaitu $x_i = c_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ dan tanpa melakukan substitusi mundur.

Contoh 2.3.1 Gunakan metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 6 \\ -2x_1 - 6x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Jawab

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_1/2 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ -2 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ B_2 - 2B_1 \\ B_3 + 2B_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-B_2) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_1 - B_2 \\ \\ B_3 + 4B_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (-B_3/5) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} B_1 - 4B_3 \\ B_2 + B_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. □

Dari apa yang telah dibahas kelihatannya bahwa ada tidak begitu banyak perbedaan diantara metode Gauss-Jordan dan eliminasi Gauss dengan substitusi mundur disebabkan pengeliminasian suku-suku diatas pivot dengan metode Gauss-Jordan kelihatnnya ekivalen dengan melakukan substitusi mundur. Tetapi hal ini tidak benar. Metode Gauss-Jordan membutuhkan lebih banyak penghitungan dari pada eliminasi Gauss dengan substitusi mundur. Hal ini bisa dilihat dari banyaknya operasi yang digunakan dalam metode Gauss-Jordan sebagaimana berikut.

Banyaknya Operasi Metode Gauss-Jordan

Metode Gauss-Jordan untuk sistem persamaan linear $n \times n$ membutuhkan

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}, \quad \text{kali/bagi}$$

dan

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}, \quad \text{tambah/kurang.}$$

Dengan kata lain, metode Gauss-Jodan membutuhkan sekitar $n^3/2$ operasi bagi/kali dan juga membutuhkan sekitar $n^3/2$ operasi tambah/kurang.

Ingat dalam pembahasan sebelumnya eliminasi Gauss dengan substitusi mundur hanya membutuhkan sekitar $n^3/3$ operasi kali/bagi begitu juga hal nya sama untuk operasi tambah/kurang. Bandingkan dengan $n^3/2$ operasi kali/bagi begitu juga untuk operasi tambah/kurang yang dibutuhkan ketika melakukan metode Gauss-Jordan, bisa dilihat bahwa metode Gauss-Jordan membutuhkan sekitar lebih 50% upaya dari pada eliminasi Gauss dengan substitusi mundur. Untuk suatu sistem persamaan linear yang kecil misalnya $n = 3$, perbedaan ini tidak begitu cukup besar berarti. Tetapi dalam praktis sistem persamaan linear sering muncul dengan n cukup besar. Dalam hal ini, eliminasi Gauss dengan substitusi mundur lebif effisien dibandingkan dengan metode Gauss-Jordan. Misalnya untuk $n = 100$, maka $n^3/3$ sekitar 333333 sedangkan $n^3/2$ adalah 500000 dalam hal ini selisihnya adalah 166667 operasi kali/bagi begitu juga sama untuk operasi tambah/kurang.

Walaupun metode Gauss-Jordan dalam praktis banyak dihindari untuk menyelesaiakan sistem persamaan linear, metode ini mempunyai kegunaan dalam teori. Kegunaannya adalah masalah teknik dari pada masalah komputasinya. Selain itu metode Gauss-Jordan dapat digunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Untuk mengakhiri bagian ini, diberikan cara menyelesaiakan sistem persamaan linear menggunakan Maxima untuk Metode Gauss-Jordan. Pada Contoh 2.2.2 diselesaikan dengan cara metode Gauss-Jordan, dalam Maxima ketik sbb:

```
A=matrix([[4/10,0,0,2/10],[0,4/10,3/10,2/10],
[0,3/10,4/10,2/10],[6/10,3/10,3/10,4/10]])
b=matrix([[12],[25],[26],[37]])
```

```
Ab = A.augment(b,subdivide=True)
html("Matrik diperbesar $[A|b]=%s$"%latex(Ab))
print
html("OBE Gauss-Jordan : $%s$"%latex(Ab.rref()))
```

Output dari perintah tersebut adalah :

$$\text{Matriks diperbesar : } [A|b] = [A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 12 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & 25 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 26 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 37 \end{array}\right)$$

$$\text{OBE Gauss-Jordan : } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

Sehingga dengan menggunakan OBE metode Gauss-Jordan, didapat $x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 30$ dan $x_4 = 40$. Terlihat hasilnya sama seperti pada hasil penghitungan sebelumnya.

Hasil penghitungan numerik untuk suatu sistem persamaan linear terhadap perubahan nilai yang kecil bisa mempengaruhi konsistensi hasil hitungan, bila sistem persamaan linear terhadap suatu perubahan nilai yang sangat kecil merubah hasil yang sangat besar (sangat sensitif) hal ini membuat kecenderungan hitungan numerik sangat jauh hasilnya dari yang semestinya, bahkan akan sangat jauh bedanya dengan jawab (solusi) eksaknya. Maxima Toolbox dapat mengatasi kesensitifan ini. Sebagai contoh diberikan sistem persamaan berikut

$$\left.\begin{array}{l} .835x + .667y = .168, \\ .333x + .266y = .067. \end{array}\right\} \tag{2.33}$$

Penyelesaian eksaknya adalah $x = 1$ dan $y = -1$. Bila diadakan perubahan kecil dari nilai 0.067 menjadi 0.066 sehingga didapat suatu sistem persamaan yang hampir sama yaitu

$$\left.\begin{array}{l} .835x + .667y = .168, \\ .333x + .266y = .066. \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

Penyelesaian eksak dari Persamaan (2.34) adalah $x = -666$ dan $y = 834$. Terlihat bahwa hasil eksak dari Persamaan (2.33) dan (2.34) sangat jauh berbeda, sedangkan Persamaan (2.33) dan (2.34) hampir sangat sama, hanya ada beda sangat kecil pada satu nilai 0.067 menjadi 0.066. Selanjutnya kedua persamaan tsb. diselesaikan dengan menggunakan Sage NoteBook sbb: (%i5)

```
kill(all)$  ab:matrix([0.835,0.667,0.168],[0.333,0.266,0.067])$
 ab:echelon(ab)$ ab:rowop(ab,1,2,667/835);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i5) kill(all)$  ab:matrix([0.835,0.667,0.168],[0.333,0.266,0.066])$
      ab:echelon(ab)$ ab:rowop(ab,1,2,667/835);
```

(%o4) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -666 \\ 0 & 1 & 834 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa hasil numerik yang dilakukan dalam Maxima Toolbox untuk kedua Persamaan (2.33) dan (2.34) secara siknifikan sama dengan jawab eksak. Hal ini menjelaskan bahwa Metode Gauss-Jordan untuk suatu sistem persamaan yang sensitif terhadap perubahan kecil, Maxima Toolbox mampu menyelesaikan masalah ini dengan baik.

Latihan

Latihan 2.3.13 *Gunakan metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut:*

(a)

$$\begin{cases} 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 4 \\ -x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} 5x_2 + 15x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Latihan 2.3.14 *Gunakan metode Gauss-Jordan untuk menyelesaikan secara bersama sistem persamaan linear berikut:*

$$\left\{ \begin{array}{r|c|c} 2x_1 - x_2 = 1 & 0 & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & 1 & 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 & 0 & 1. \end{array} \right.$$

Latihan 2.3.15 *Selesaikan sistem persamaan linear berikut*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Latihan 2.3.16 *Selesaikan sistem persamaan linear berikut*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Mengapa mempunyai banyak penyelesaian?

Latihan 2.3.17 *Selidiki apakah sistem persamaan linear berikut mempunyai jawab atau tidak!*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

2.4 Matriks

Disini dikenalkan beberapa ide dasar yang mencakup pengkajian matriks. Dalam bagian sebelumnya digunakan matriks diperbesar untuk menyatakan sistem persamaan linear. Susunan bilangan ini sering kita jumpai juga dalam bentuk yang lain, misalnya susunan bilangan dengan tiga baris dan tujuh kolom yang menyatakan berapa jam waktu yang digunakan seorang mahasiswa setiap hari untuk mempersiapkan tiga mata kuliah yang ditempuhnya sebagaimana diberikan oleh Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1: Waktu Persiapan Mahasiswa

	Ming.	Sen.	Sel.	Rab.	Kam.	Jum.	Sab.
Aljabar	1	3	2	1	4	4	2
Aljabar Linear	2	0	1	3	5	0	2
Geometry	4	3	1	1	0	2	0

Bila judul matakuliah dan hari dalam Tabel 2.1 dihapus, maka didapat susunan bilangan real dalam bentuk pesegi panjang dengan tiga baris dan tujuh kolom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

ungkapan penulisan dalam (2.35) dinamakan suatu ***matriks***.

Secara lebih umum, matriks adalah suatu susunan dari bilangan real atau kompleks yang berbentuk persegi panjang, setiap bilangan ini dinamakan elemen matriks yang disusun secara baris dan kolom. Beberapa contoh matriks adalah:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \pi & 5 \\ -6 & \frac{1}{2} & 8 & 11 \\ 8 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } [-3].$$

Untuk menampilkan matriks dalam Maxima lakukan sebagai berikut:

```
(%i12) matrix([-1,2,-3,sqrt(2)], [0,1,%pi,5],
       [-6,1/2,8,11], [8,0,2,7],[1,3,5,7]);
       matrix([1,-1,1],[0,2,4],[3,5,8]);
       matrix([5],[3],[6],[5],[4]);
       matrix([3,6,4,9,0]);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \pi & 5 \\ -6 & \frac{1}{2} & 8 & 11 \\ 8 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

(%o14) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(%o15) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

Ukuran suatu matriks adalah banyaknya baris dan banyaknya kolom. Bila banyak baris adalah m dan banyaknya kolom n, maka ukuran matriks ditulis sebagai $m \times n$. Jadi ukuran matriks pada contoh diatas berturut-turut adalah 5×4, 3×3, 5×1, 1×5 dan 1×1. Suatu matriks A ukuran $m \times n$ biasanya dinotasikan dengan $A = [a_{i,j}]$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ atau secara singkat $[a_{i,j}]_{m\times n}$ (bila ukuran matriks penting untuk diketahui). Bila ukuran matriks tidak penting untuk diketahui cukup ditulis $[a_{i,j}]$. Selanjutnya $a_{i,j}$ menyatakan elemen baris ke-i kolom ke-j dari suatu matriks A dengan $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ atau $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ yang mana $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan bilangan real dan $\mathbb{C}$ menyatakan himpunan bilangan kompleks. Untuk matriks berukuran 1×1 yaitu $[a]$ cukup ditulis a.

Suatu matriks yang hanya mempunyai satu kolom dinamakan ***matriks kolom*** (***vektor kolom***) sedangkan bila hanya mempunyai satu baris dinamakan ***matriks baris*** (***vektor baris***). Suatu matriks A dengan n baris dan n kolom dinamakan ***matriks persegi ukuran*** n

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

elemen-elemen $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ dinamakan elemen-elemen di ***diagonal utama*** matriks A. Berikut ini diberikan pengertian dua matriks adalah sama. Diberikan matriks $A = [a_{i,j}]$ dan $B = [b_{i,j}]$, matriks A dan B dikatakan sama bila kedua ukuran matriks A dan B sama dan $a_{i,j} = b_{i,j}$ untuk semua i dan j. Contoh, matriks-matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

bila $x = 1$, maka $A = B$. Walaupun ukuran A dan B sama, bila $x \neq 1$, maka $A \neq B$. Sedangkan $A \neq C$ dan $B \neq C$ sebab ukuran matriks A tidak sama dengan ukuran matriks C begitu juga ukuran B tidak sama dengan ukuran C.

2.5 Aritmatika dan Operasi Matriks

Dalam bagian ini dibahas penambahan , pengurangan dan perkalian matriks serta dibahas transpose dan trace dari suatu matriks.

2.5.1 Penambahan, Pengurangan Matriks dan Perkalian Matriks

Misalkan, sebuah kota dibagi menjadi dua wilayah Utara dan Selatan. Banyaknya siswa SMP dan SMA kelas I, II dan III diberikan oleh tabel berikut:

Tabel 2.2: Daftar Siswa Wilayah Utara dan Selatan

Wilayah Utara				Wilayah Selatan			
	Kelas I	Kelas II	Kelas III		Kelas I	Kelas II	Kelas III
SMP	2234	2105	2001	SMP	2105	1866	1509
SMA	1973	1873	1762	SMA	1877	1689	1574

Maka daftar total siswa SMP dan SMA keseluruhan kota diberikan oleh tabel berikut

Tabel 2.3: Daftar total siswa SMP dan SMA seluruh wilayah

	Kelas I	Kelas II	Kelas III
SMP	2234+2105=4339	2105+1866=3971	2001+1509= 3510
SMA	1973+1877=3850	1873+1689= 3562	1762+1574= 3336

Bila daftar keadaan siswa wilayah Utara dan Selatan di tuliskan sebagai matrik, didapat matriks:

$$U = \begin{bmatrix} 2234 & 2105 & 2001 \\ 1973 & 1873 & 1762 \end{bmatrix} \text{ dan } S = \begin{bmatrix} 2105 & 1866 & 1509 \\ 1877 & 1689 & 1574 \end{bmatrix}$$

dan matriks $U+S$ didefinisikan sebagai

$$U+S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2234+2105 & 2105+1866 & 2001+1509 \\ 1973+1877 & 1873+1689 & 1762+1574 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4399 & 3971 & 3510 \\ 3850 & 3562 & 3336 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa Tabel 2.3 bentuk matriksnya diberikan oleh matriks $U+S$. Hasil pembahasan ini menjelaskan penambahan dua matriks. Hal yang serupa bisa dilakukan untuk pengurangan dua matriks.

Berikut ini diberikan definisi secara umum untuk penambahan dan pengurangan dua matriks. Penambahan dan pengurangan dua matriks A dan B bisa dilakukan bila kedua matriks mempunyai ukuran yang sama dan elemen-elemen dari $A+B$ dan $A-B$ masing-masing diberikan oleh

$$[A+B]_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ dan } [A-B]_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}.$$

Bila ukuran A dan B tidak sama, maka penambahan dan pengurangan dari A dan B tidak didefinisikan. Berikut ini diberikan contoh penambahan dan pengurangan matriks. Diberikan matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; A-B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -11 \\ -3 & 13 & -7 \end{bmatrix}$$

sedangkan $A+C$ dan $B+C$ tidak terdefinisi, begitu juga $A-C$ dan $B-C$ tidak terdefinisi. Untuk melakukan operasi tambah dan kurang bagi matriks dalam Maxima lakukan sebagai berikut:

```
(%i5)  a:A=matrix([1,-2,0],[0,7,-3]);b:B=matrix([-2,3,11],[3,-6,4]);
       c:C=matrix([1,-2],[3,-4]);"A+B"= rhs(a)+rhs(b);"A-B"= rhs(a)-rhs(b);
```

(%o1) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 7 & -3\end{bmatrix}$

(%o2) $B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 11\\ 3 & -6 & 4\end{bmatrix}$

(%o3) $C=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$

(%o4) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 11\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(%o5) $A-B=\begin{bmatrix}3 & -5 & -11\\ -3 & 13 & -7\end{bmatrix}$

Untuk $A+C$ dan $B-C$ tidak terdifinisi, hal ini bisa dilihat hasil output dalam Maxima sebagai berikut:

```
(%i9) "A+C"=rhs(a)+rhs(c);"B-C"=rhs(b)+rhs(c);
```

fullmap: arguments must have same formal structure.
– an error. To debug this try: debugmode(true);
fullmap: arguments must have same formal structure.
– an error. To debug this try: debugmode(true);

Bila A sebarang matriks dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$ atau di $\mathbb{C}$ dan k sebarang skalar di $\mathbb{R}$ atau di $\mathbb{C}$, maka hasil kali kA adalah matriks yang semua elemen-elemennya diperoleh melalui mengalikan k dengan semua elemen-elemen dari A. Matriks kA dinamakan ***perkalian skalar*** dari A. Dengan notasi matriks, bila $A=[a_{i,j}]$, maka

$$[kA]_{i,j}=ka_{i,j}.$$

Contoh 2.5.1

Diberikan matriks-matriks

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}8 & 0 & 6\\ 4 & 14 & -2\end{bmatrix}\text{ dan } C=\begin{bmatrix}10 & 2 & -5\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

maka

$$(-1)A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & -4 & -6\end{bmatrix},\ \frac{1}{2}B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{bmatrix}\text{ dan } 3C=\begin{bmatrix}30 & 6 & -15\\ 3 & 12 & 9\end{bmatrix}.$$

Perkalian skalar dengan matriks dalam Maxima dilakukan sebagai berikut:

```
(%i6) a: A=matrix([0,-1,-3],[2,4,6]);b:B=matrix([8,0,6],[4,14,-2]);
      c: C=matrix([10,2,-5],[1,4,3]);"(-1)A"= -1*rhs(a);
      "1/2B"= 1/2*rhs(b);"3C"=3*rhs(c);
```

(%o1) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

(%o2) $B=\begin{bmatrix}8 & 0 & 6\\ 4 & 14 & -2\end{bmatrix}$

(%o3) $C=\begin{bmatrix}10 & 2 & -5\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

(%o4) $(-1)A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & -4 & -6\end{bmatrix}$

(%o5) $\frac{1}{2}B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{bmatrix}$

(%o6) $3C=\begin{bmatrix}30 & 6 & -15\\ 3 & 12 & 9\end{bmatrix}$ □

Untuk lebih praktis, penulisan $(-1)A$ cukup ditulis $-A$. Bila $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matriks-matriks dengan ukuran yang sama dan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar, maka bentuk

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n$$

dinamakan suatu ***kombinasi linear*** dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dengan koefisien-koefisien $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Misalnya pada Contoh 2.5.1, maka

$$\begin{aligned}-A+\frac{1}{2}B+3C &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & -4 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}30 & 6 & -15\\ 3 & 12 & 9\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}34 & 7 & -9\\ 3 & 15 & 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

adalah kombinasi linear dari A, B dan C dengan koefisien $-1, \frac{1}{2}$ dan 3. Selanjutnya diberikan notasi $\mathbb{R}^{m\times n}$ menyatakan himpunan semua matriks ukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^{n\times 1}$ adalah himpunan semua vektor kolom ukuran n biasanya cukup ditulis $\mathbb{R}^n$.

Sebegitu jauh telah dibahas perkalian suatu skalar dengan matriks, tetapi perkalian dua matriks belum dibahas. Sebagaimana telah diketahui penambahan dan pengurangan matriks adalah menambah atau mengurangi elemen-elemen yang bersesuaian. Perkalian matriks agak berbeda dengan penambahan matriks. Untuk mendefinisikan perkalian dua matriks A dan B, sebagai motifasi diberikan dua sistem persamaan linear

$$\boxed{\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= y_1\\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + +a_{2,3}x_3 &= y_2\end{aligned}} \tag{2.36}$$

dan

$$\boxed{\begin{aligned}b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 &= x_1\\ b_{2,1}z_1 + b_{2,2}z_2 &= x_2\\ b_{3,1}z_1 + b_{3,2}z_2 &= x_3\end{aligned}} \tag{2.37}$$

Bila diinginkan y_1 dan y_2 bergantung pada peubah z_1 dan z_2, maka didapat sistem persamaan

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1})z_1+(a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2})z_2=y_1 \\ (a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1})z_1+(a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2})z_2=y_2 \end{array}} \tag{2.38}$$

Selanjutnya bila

$$\begin{array}{ll} c_{1,1}=a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1} & c_{1,2}=a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2} \\ c_{2,1}=a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1} & c_{2,2}=a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2} \end{array}$$

atau secara singkat

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{3}a_{i,k}b_{k,j},\ i=1,2 \text{ dan } j=1,2,3 \tag{2.39}$$

dan masing-masing matriks A,B,C diberikan oleh

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix},$$

dan didefinisikan perkalian matriks $AB \stackrel{\text{def}}{=} C$, dengan elemen-elemen matriks C diberikan oleh Persamaan (2.39), maka Persamaan (2.38) dapat ditulis sebagai perkalian matriks

$$CZ=Y, \text{dengan } Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{ dan } Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa Persamaan (2.39) mengisyaratkan banyaknya kolom dari A harus sama dengan banyaknya baris B dalam hal ini keduanya sama dengan 3 dan ukuran matriks hasil kali adalah $2(\text{banyaknya baris } A)\times 2(\text{banyaknya kolom } B)$. Jadi syarat dua matriks bisa dikalikan banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua dan elemen-elemen matriks hasil kali diberikan seperti dalam Persamaan (2.39). Oleh karena itu bila matriks $A_{m,p}$ dan matriks $B_{p,n}$, maka perkalian kedua matriks ini diberikan oleh

$$A_{m,p}B_{p,n}=C_{m,n}, \text{ dengan } c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j},\ i=1,2,\ldots,m \text{ dan } j=1,2,\ldots,n.$$

Contoh 2.5.2

Diberikan matriks-matriks

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Elemen baris ke-1 kolom ke-2 dan baris ke-2 kolom ke-1 matriks perkalian AB diberikan sebagai berikut

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \boxed{33} \\ \boxed{43} & \square \end{bmatrix}$$

$$(1.1)+(2.7)+(3.6)=33$$

$$(5.2)+(3.3)+(4.6)=43$$

Dengan melakukan hal yang serupa didapat

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 33 \\ 39 & 50 \end{bmatrix}$$

dan perkalian matriks BA diberikan oleh

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 38 & 27 & 37 \\ 35 & 28 & 39 \end{bmatrix}$$

terlihat bahwa $AB \neq BA$. Perkalian matriks tsb. dalam Maxima lakukan sebagai berikut:

```
(%i1)  a:A=matrix([1,2,3],[5,3,4]); b:B=matrix([2,1],[3,7],[5,6]);
       ab:AB=rhs(a).rhs(b);ba:BA=rhs(b).rhs(a);
```

(%o1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(%o2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

(%o3) $AB = \begin{bmatrix} 23 & 33 \\ 39 & 50 \end{bmatrix}$

(%o4) $BA = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 38 & 27 & 37 \\ 35 & 28 & 39 \end{bmatrix}$ $\square$

Diberikan dua matriks $A_{m,p}$ dan $B_{p,n}$ dan $C = A_{m,p}B_{p,n}$, maka matriks baris ke-i dari C diberikan oleh $C_{i,*} = A_{i,*}B$ dan matriks kolom ke-j dari C diberikan oleh $C_{*,j} = AB_{*,j}$.

Contoh 2.5.3

Diberikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ -5 & 11 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

Bila $C = AB$, maka baris ke-2 dari matriks C diberikan oleh

$$C_{2,*} = A_{2,*}B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & 12 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 128 & -66 \end{bmatrix}$$

dan kolom ke-3 dari C diberikan oleh

$$C_{*,3} = AB_{*,3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ -5 & 11 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66 \\ -66 \\ -47 \end{bmatrix}$$

Penghitungan ini dapat dilakukan dalam Maxima sebagai berikut:

```
(%i6)  kill(all)$ a: A=matrix([1,-2,0,7],[2,3,2,10],[-5,11,1,8]);
       b:B=matrix([2,1,1],[0,2,2],[5,0,8],[1,12,-9]);
       a2:A["2,*"]=row(rhs(a),2);
       print(C["2,*"],"=",A["2,*"]*B,"=",rhs(a2).rhs(b))$
       b3:B["*,3"]=col(rhs(b),3);
       print(C["*,3"],"= A",B["*,3"],"=",rhs(a).rhs(b3))$
```

(%o1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ -5 & 11 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(%o2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 1 & 12 & -9 \end{bmatrix}$

(%o3) $A_{2,*} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \; C_{2,*} = A_{2,*}B = \begin{bmatrix} 24 & 128 & -66 \end{bmatrix}$

(%o5) $B_{*,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}, \; C_{*,3} = AB_{*,3} = \begin{bmatrix} -66 \\ -66 \\ -47 \end{bmatrix}$ □

Perkalian matriks dan kombinasi linear sangat penting bila dihubungkan dengan sistem persamaan linear yang diberikan oleh Persamaan (2.9). Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

Bila

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\ \text{dan}\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

maka Persamaan (2.40) dapat ditulis sebagai $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Selanjutnya bila

$$A_{*,j}=\begin{bmatrix} a_{1,j}\\ a_{2,j}\\ \vdots\\ a_{m,j}\end{bmatrix},\ j=1,2,\dots,n,$$

dan sistem persamaaan linear (2.40) mempunyai penyelesaian, maka matriks $\boldsymbol{b}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear berikut

$$x_1A_{*,1}+x_2A_{*,2}+\dots+x_nA_{*,n}=\boldsymbol{b}. \tag{2.41}$$

Pembahasan yang lebih mendalam mengenai kombinasi linear akan diberikan pada bagian yang berikutnya, terutama saat pembahasan ruang vektor.

2.6 Matriks-matriks Khusus

Disini dikenalkan matriks nol, diagonal identitas(satuan), matriks segi-tiga dan matriks simetri. Suatu matriks yang semua elemenya sama dengan nol dinamakan matriks ***nol***. Berikut ini contoh contohnya

$$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Perintah dalam maxima untuk matriks nol dapat dilakukan sebagai berikut:

```
(%i21) o1:O["1x2"]=zeromatrix(1,2);o2:O["2x2"]=zeromatrix(2,2);
       o3:O["3x1"]=zeromatrix(3,1);o4:O["2x4"]=zeromatrix(2,4);
```

(%o21) $O_{1\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$

(%o22) $O_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(%o23) $O_{3\times 1}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

(%o24) $O_{2\times 4}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Suatu matriks persegi D berukuran $n\times n$ dinamakan matriks ***diagonal*** bila

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa semua elemen dari D yang berada diatas dan dibawah elemen diagonal utama sama dengan nol yaitu $d_{i,j}=0,\;$ untuk $\;i\neq j$. Contoh

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Perintah melakukan matriks diagonal dalam Maxima dapat dilakukan sebagai berikut:

```
(%i35) load(diag)$ diag([1,2]);diag([-1,0,3]);
```

(%o36) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

(%o37) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

Suatu matriks diagonal dengan semua elemen diagonal utama sama dengan satu dinamakan matriks ***satuan(identitas)***. Contoh

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Dengan demikian matriks identitas I mempunyai elemen $i_{k,l}=1,\ k=l$ dan $i_{k,l}=0,\ k\neq l$. Perintah melakukan matriks identitas dalam Maxima dapat dilakukan sebagai berikut:

```
(%i38) ident(2);ident(3);
```

(%o38) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(%o39) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Suatu matriks persegi A dinamakan matriks ***segi tiga atas*** bila

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix},$$

terlihat bahwa elemen $a_{i,j}=0$, untuk $i>j$. Contoh

$$\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Suatu matriks persegi A dinamakan matriks ***segi tiga bawah*** bila

$$A=\begin{bmatrix}a_{1,1} & 0 & \cdots & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{bmatrix},$$

terlihat bahwa elemen $a_{i,j}=0$, untuk $i<j$. Contoh

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 6 & 0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 8 & 4\end{bmatrix}.$$

Suatu matriks transpose adalah matriks yang diperoleh dari matriks yang lain dengan elemen baris menjadi elemen kolom dan sebaliknya. Matriks transpose dari suatu matriks A ditulis A^T, jadi bila $A=[a_{i,j}]$, maka $A^T=[a_{j,i}]$. Contoh

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -4\\ 0 & -2 & 3 & 5\end{bmatrix}, \quad A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix}.$$

Perintah untuk melakukan matriks transpose dalam Maxima lakukakan sebagai berikut:

```
(%i2)  a:A=matrix([1,2,-3,-4],[0,-2,3,5]);at:A^("T")=transpose(rhs(a));
```

(%o2) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -4\\ 0 & -2 & 3 & 5\end{bmatrix}$

(%o3) $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix}$

Suatu matriks persegi A dinamakan matriks ***simetri*** bila $A=A^T$. Contoh

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 1\end{bmatrix}, \quad A^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Suatu matriks persegi A dinamakan ***simetri miring (skew symmetry)*** bila $A = -A^T$. Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -A^T = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Diberikan suatu matriks persegi

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

trace dari matriks A ditulis $\operatorname{trace}(A)$ didefinisikan oleh

$$\operatorname{trace}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Contoh, misalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{trace}(A) = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Perintah mendapatkan trace dari suatu matriks dalam Maxima dilakukan sebagai berikut:

```
(%i7)  load(functs)$ a:A=matrix([1,1,2],[-3,2,0],[2,5,4]);
       tra:"trace(A)"=tracematrix(rhs(a));
```

(%o8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

(%o9) $\operatorname{trace}(A) = 7.$

Bila suatu matriks elemen-elemennya adalah bilangan kompleks, maka dikenal suatu matriks dengan nama konjugate transpose atau transpose konjugate. Hal ini berkenaan dengan suatu konjugate dari bilangan kompleks. Misalkan suatu bilangan kompleks $z \in \mathbb{C}$ dengan $z = a + bi, \; i = \sqrt{-1}$, maka konjugate dari z ditulis $\bar{z}$ diberikan oleh $\bar{z} = a - bi$. Diberikan suatu matriks

$$A = [a_{i,j}], \;\; a_{i,j} \in \mathbb{C},$$

maka konjugate dari matriks A adalah

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\overline{a_{i,j}}]$$

dan matriks A^* adalah

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{A})^T = \overline{A^T}.$$

Contoh, diberikan matriks
$$A=\begin{bmatrix}2-i & 5+3i & 2-7i\\ 3i & 1+4i & 2+3i\end{bmatrix},$$
maka
$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2+i & 5-3i & 2+7i\\ -3i & 1-4i & 2-3i\end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix}2-i & 3i\\ 5+3i & 1+4i\\ 2-7i & 2+3i\end{bmatrix}$$
dan
$$(\overline{A})^T=\begin{bmatrix}2+i & -3i\\ 5-3i & 1-4i\\ 2+7i & 2-3i\end{bmatrix}=\overline{A^T}=A^*.$$
Perintah konjugate matiks dalam maxima dapat dilakukan sebagai berikut:

```
(%i1) a:A=matrix([2-%i,5+3*%i,2-7*%i],[3*%i,1+4*%i,2+3*%i]);
```

(%o1) $A=\begin{bmatrix}2-i & 5+3i & 2-7i\\ 3i & 1+4i & 2+3i\end{bmatrix}$

```
(%i4) ac:conjugate(rhs(a));
```

(%o4) $\begin{bmatrix}i+2 & 5-3i & 7i+2\\ -3i & 1-4i & 2-3i\end{bmatrix}$

```
(%i7) at:transpose(rhs(a));
```

(%o7) $\begin{bmatrix}2-i & 3i\\ 3i+5 & 4i+1\\ 2-7i & 3i+2\end{bmatrix}$

```
(%i6) transpose(ac);
```

(%o6) $\begin{bmatrix}i+2 & -3i\\ 5-3i & 1-4i\\ 7i+2 & 2-3i\end{bmatrix}$

```
(%i8) conjugate(at);
```

(%o8) $\begin{bmatrix}i+2 & -3i\\ 5-3i & 1-4i\\ 7i+2 & 2-3i\end{bmatrix}$

```
(%i12) A^("*")=conjugate(at);
```

(%o12) $A^{*}=\begin{bmatrix} i+2 & -3\,i \\ 5-3\,i & 1-4\,i \\ 7\,i+2 & 2-3\,i \end{bmatrix}$

```
(%i13) A^("*")=transpose(ac);
```

(%o13) $A^{*}=\begin{bmatrix} i+2 & -3\,i \\ 5-3\,i & 1-4\,i \\ 7\,i+2 & 2-3\,i \end{bmatrix}$

2.7 Sifat-sifat Aritmatika Matriks

Pada bagian ini dibahas lebih mendalam mengenai sifat sifat aritmatika matriks. Diantaranya sifat komutatif, sifat assosiatif dan sifat elemen netral dari penjumlahan dua matriks. Juga dibahas sifat-sifat berkenaan dengan perkalian matriks baik dengan skalar ataupun matriks dengan matriks.

Teorema 2.7.1 *Bila A, B dan C adalah matriks dengan ukuran yang sama dan elemen-elemennya adalah bilangan real atau kompleks, maka*

(1) $A+B=B+A$,

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Bukti: Misalkan $A=[a_{i,j}], B=[b_{i,j}]$ dan $C=[c_{i,j}]$

(1) didapat

$$A+B=[a_{i,j}+b_{i,j}]=[b_{i,j}+a_{i,j}]=B+A$$

(2) dan

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= [a_{i,j}+b_{i,j}]+c_{i,j} \\ &= [(a_{i,j}+b_{i,j})+c_{i,j}] \\ &= [a_{i,j}+(b_{i,j}+c_{i,j})] \\ &= A+(B+C). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.2 *Ada dengan tunggal matriks M berukuran $m\times n$ sedemikian hingga untuk setiap matriks A berukuran $m\times n$ berlaku $A+M=A$.*

Bukti:
Misalkan matriks $M = [m_{i,j}]$ dengan $m_{i,j} = 0$ untuk semua i dan j. Maka untuk setiap matriks $A = [a_{i,j}]$ didapat

$$A + M = [a_{i,j} + m_{i,j}] = [a_{i,j} + 0] = [a_{i,j}] = A.$$

Untuk menentukan ketunggalan dari M, misalkan bahwa matriks $B = [b_{i,j}]$ juga memenuhi $A + B = A$ untuk setiap A, maka khususnya didapat $M + B = M$, dilain pihak $M + B = B$. Jadi $B = M$.

$\square$

Teorema 2.7.3 *Bila A dan B masing-masing berukuran $m \times n$, maka untuk setiap skalar α dan β*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(-1)A = -A$
5. $0A = 0_{m\times n}$.

Bukti:
Misalkan $A = [a_{i,j}]$ dan $B = [b_{i,j}]$ didapat

1. $\alpha(a_{i,j} + b_{i,j}) = \alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j} \;\Rightarrow\; \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha+\beta)a_{i,j} = \alpha a_{i,j} + \beta a_{i,j} \;\Rightarrow\; (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(\beta a_{i,j}) = (\alpha\beta)a_{i,j} \Rightarrow \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(-1)a_{i,j} = -a_{i,j} \;\Rightarrow\; (-1)A = -A$
5. $0a_{i,j} = 0 \;\Rightarrow\; 0A = 0_{m\times n}$.

$\square$

Teorema 2.7.4 *Misalkan matriks A berukuran $m \times n$, B berukuran $n \times p$ dan C berukuran $p \times q$, maka $A(BC) = (AB)C$.*

Bukti:
Elemen ke-(i,j) dari matriks $A(BC)$ adalah

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}[BC]_{r,j} \\
&= \sum_{r=1}^{n} a_{i,r}\left(\sum_{s=1}^{p} b_{r,s}c_{s,j}\right) \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} a_{i,r}b_{r,s}c_{s,j}.
\end{aligned}$$

Sedangkan elemen ke-(i,j) dari matriks $(AB)C$ adalah

$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{i,j} &= \sum_{s=1}^{p} [AB]_{i,s}c_{s,j} \\
&= \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{i,r}b_{r,s}\right)c_{s,j} \\
&= \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{i,r}b_{r,s}c_{s,j} \\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} a_{i,r}b_{r,s}c_{s,j}.
\end{aligned}$$

Didapat

$$[A(BC)]_{i,j} = [(AB)C]_{i,j} \text{ untuk semua } i,j.$$

Jadi $A(BC) = (AB)C$. $\square$

Dari hasil Teorema 2.7.4, maka matriks $A(BC)$ dan $(AB)C$ cukup ditulis ABC. Juga matriks

$$\overbrace{AAA\cdots A}^{\text{sebanyak } n},$$

dengan n adalah bilangan bulat positip ditulis A^n.

Teorema 2.7.5 *Bila matriks A berukuran $m \times n$, matriks B dan C masing-masing berukuran $n \times p$, maka*

$$A(B+C) = AB + AC$$

Bukti:
Elemen $[A(B+C)]_{i,j}$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[B+C]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(b_{k,j}+c_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{k,j}) \\ &= [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} \\ &= [AB+AC]_{i,j}.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $A(B+C) = AB+AC$. □

Hal serupa dapat dibuktikan bahwa bila matriks A, B dan C dengan ukuran yang sesuai, maka

$$(B+C)A = BA+CA.$$

Teorema 2.7.6 *Bila perkalian AB terdefinisi, maka untuk skalar λ didapat*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Bukti:
Elemen ke-(i, j) dari tiga hasil kali tsb. adalah

$$\lambda\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{i,k})b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(\lambda b_{k,j}).$$

□

Teorema 2.7.7 *Ada dengan tunggal matriks M berukuran $n \times n$ dengan sifat untuk setiap matriks A berukuran $n \times n$, maka*

$$AM = A = MA.$$

Bukti:
Misalkan matriks berukuran $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Lebih tepatnya, bila didefinisikan simbol ***Kronecker*** $\delta_{i,j}$ oleh

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{bila } i = j, \\ 0 & \text{bila } i \neq j, \end{cases}$$

maka didapat $M = [\delta_{i,j}]_{n\times n}$. Bila $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$, maka

$$\begin{aligned} [AM]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,j} \\ &= a_{i,1}\delta_{1,j} + a_{i,2}\delta_{2,j} + \cdots + a_{i,j}\delta_{j,j} + \cdots + a_{i,n}\delta_{n,j} \\ &= a_{i,1}0 + a_{i,2}0 + \cdots + a_{i,j}1 + \cdots + a_{i,n}0 \\ &= a_{i,j}. \end{aligned}$$

Jadi $AM = A$ dengan cara serupa didapat $MA = A$. Untuk menunjukkan ketunggalan matriks M, misalkan bahwa matriks P berukuran $n \times n$ juga mempunyai sifat

$$AP = A = PA, \ \text{ untuk setiap matriks } A \text{ berukuran } n \times n.$$

Khususnya didapat $MP = M = PM$, tetapi M juga mempunyai sifat $PM = P = MP$. Hal ini menunjukkan bahwa $P = M$.

□

Sebagaimana telah dibahas sebelumnya, matriks M adalah matriks identitas (satuan) dan selanjutnya dinotasikan oleh $I_{n\times n}$.

Teorema 2.7.8 *Bila penjumlahan dan perkalian matriks terdefinisi, maka*

$$(A^T)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T.\ (\lambda A)^T = \lambda A^T,\ (AB)^T = A^T B^T.$$

Bukti:
Bila $A = [a_{i,j}]$ dan $B = [b_{i,j}]$ didapat

$$(A^T)^T = [a_{j,i}]^T = [a_{i,j}] = A.$$

Misalkan $A + B = [a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [c_{i,j}] = C$, didapat

$$(A+B)^T = C^T = [c_{j,i}] = [a_{j,i}] + [b_{j,i}] = A^T + B^T.$$

$$(\lambda A)^T = [\lambda a_{i,j}]^T = [\lambda a_{j,i}] = \lambda [a_{j,i}] = \lambda A^T.$$

Misalkan $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{i,j}]_{n\times p}$, didapat

$$[AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{j,k} = [B^T A^T]_{i,j},$$

terlihat bahwa $(AB)^T = B^T A^T$.

□

Hasil Teorema 2.7.8 memeberikan suatu kesimpulan bahwa untuk sebarang matriks persegi A, maka matriks $A+A^T$ adalah matriks simetri dan matriks $A-A^T$ adalah matriks simetri miring (skew symmstric). Sebab

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

dan

$$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T).$$

2.8 Matriks Invers dan Matriks Elementer

Pada bagian ini diberikan pengertian matriks invers dan beberapa sifat-sifatnya. Cara memperoleh matriks invers dibahas pada bagian berikutnya.

Disini juga dikenalkan ide dari matriks elementer. Matriks ini dapat digunakan untuk memperoleh matriks invers.

Definisi 2.8.1 *Bila untuk suatu matriks persegi A bisa didapat matriks persegi yang lain B sedemikian hingga memenuhi*

$$AB = BA = I,$$

maka B dinamakan ***invers*** *dari A, dalam hal ini matriks A dinamakan matriks* ***nonsingulir****. Sebaliknya bila tidak ada matriks B tsb., maka matriks A dinamakan matriks* ***singulir****.*

Perluh diperhatikan bahwa pembahasan disini berkaitan dengan matriks invers hanya untuk matriks persegi. Dalam pengertian matriks invers, maka matriks B juga nonsingulir dan mempunyai invers A.

Berikut ini diberikan sifat ketunggalan dari matriks invers.

Teorema 2.8.1 *Misalkan A nonsingulir dan B begitu juga C masing-masing adalah invers dari A, maka $B = C$.*

Bukti:
Karena B adalah invers dari A, maka $AB = I$. Bila kedua ruas dari $AB = I$ dikalikan dengan C didapat

$$C(AB) = CI = C.$$

Tetapi dengan menggunakan sifat assosiatif didapat

$$C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Terlihat bahwa $C = CAB = B$ atau $C = B$. $\square$

Matriks invers dari suatu matriks A dinotasikan oleh A^{-1}.

Contoh 2.8.1 *Diberikan matriks*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

maka

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Hal ini bisa dicek sebagai berikut

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$$

dan

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$$

Contoh 2.8.2 *Diberikan matriks*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

maka matriks B adalah singulir. Hal ini bisa ditunjukkan sebagai berikut: Andaikan B non singulir, maka ada matriks

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

yang memenuhi $CB = I_{3\times 3}$. *Kolom ke-*1 *dari matriks* CB *diberikan oleh*

$$[CB]_{*,1} = CB_{*,1} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hasil ini cukup menunjukkan bahwa $CB \neq I_{3\times 3}$. *Jadi matriks B singulir.*

Bila A nonsingulir, maka untuk n bilangan bulat positip A^{-n} didefisikan sebagai

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{sebanyak } n}$$

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks invers.

Teorema 2.8.2 *Misalkan matriks A dan B masing-masing adalah matriks nosingulir, maka*

1. *AB adalah nonsingulir dan* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. *A^{-1} adalah nonsingulir dan $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *Untuk $n = 1, 2, \cdots$, A^n adalah nonsingulir dan $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$.*
4. *Bila $\lambda \neq 0$, maka λA nonsingulir dan $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.*
5. *A^T adalah nonsingulir dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Bukti:

1. $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
   dan
   $$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$
   Terlihat bahwa invers dari AB, yaitu $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Invers dari A^{-1} adalah $(A^{-1})^{-1}$ dengan demikian
   $$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I = A^{-1}(A^{-1})^{-1}$$
   Tetapai juga
   $$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$
   Terlihat bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Perluh ditunjukkan bahwa $A^nA^{-n} = I = A^{-n}A^n$, sebagai berikut
   $$\begin{aligned} A^nA^{-n} &= \Big(\underbrace{AA\cdots A}_{\text{sebanyak } n}\Big)\Big(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{sebanyak } n}\Big) \\ &= \Big(\underbrace{AA\cdots A}_{\text{sebanyak } n-1}\Big)(AA^{-1})\Big(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{sebanyak } n-1}\Big), \ \text{tetapi } AA^{-1} = I \\ &= \Big(\underbrace{AA\cdots A}_{\text{sebanyak } n-1}\Big)\Big(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{sebanyak } n-1}\Big) \\ &\vdots \\ &= (AA)(A^{-1}A^{-1}) \\ &= A(AA^{-1})A^{-1}, \ \text{juga } \ AA^{-1} = I \\ &= AA^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$
   Dengan cara serupa dapat ditunjukkan bahwa $A^{-n}A^n = I$, dengan demikian invers dari A^n yaitu $(A^n)^{-1} = A^{-n}$.

4. Juga, cukup ditunjukkan bahwa $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = I = (\frac{1}{\lambda}A^{-1})(\lambda A)$ sebagai berikut
$$(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = (\lambda\frac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = 1I = I.$$
Juga
$$(\frac{1}{\lambda}A^{-1})(\lambda A) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)(A^{-1}A) = 1I = I.$$
Terlihat bahwa invers dari λA yaitu $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

5. Cukup ditunjukkan bahwa $A^T(A^{-1})^T = I = (A^{-1})^T A^T$ sebagai berikut
$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$
juga
$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I.$$
Terlihat bahwa invers dari A^T yaitu $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$\square$

Catatan, hasil $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dapat diperluas untuk lebih dari dua matriks, misalnya $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Sebegitu jauh pembahasan sifat-sifat belum membahas suatu hukum penghapusan atau pemfaktoran dari suatu matriks nol. Kedua sifat ini diberikan berikut.

Teorema 2.8.3 *Misalkan A adalah matriks nonsingulir dan B, C dan D matriks yang berukuran sama seperti matriks A. Maka*

1. *bila $AB = AC$, maka $B = C$,*
2. *bila AD=0, maka $D = 0$*

Bukti:

1. Kedua ruas persamaan
$$AB = AC$$
kalikan dari kiri dengan A^{-1} didapat
$$\begin{aligned} A^{-1}AB &= A^{-1}AC \\ IB &= IC \\ B &= C. \end{aligned}$$

2. Kedua ruas persamaan
$$AD = 0$$
kalikan dari kiri dengan A^{-1} didapat
$$\begin{aligned} A^{-1}AD &= A^{-1}0 \\ ID &= 0 \\ D &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Perhatikan bahwa Teorema ini disyaratkan untuk A nonsingulir. Perluh diingat kembali bahwa perkalian dua matriks tidak komutatif. Oleh karena itu bila $AB = CA$ tidak ada alasan menyimpulkan $B = C$ bahkan untuk matriks A yang nonsingulir. Hal ini bisa dilihat sebagai berikut
$$\begin{aligned} A^{-1}AB &= A^{-1}CA \\ B &= A^{-1}CA \end{aligned}$$
atau
$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= CAA^{-1} \\ ABA^{-1} &= C \end{aligned}$$
Untuk kedua hal tsb. tidak bisa disimpulkan $B = C$.

Berikut ini dibahas pengertian matriks elementer. Matriks ini erat kaitannya dengan Operasi Baris Elementer (OBE) dan salah satu kegunaannya adalah untuk menentukan invers suatu matriks persegi.

Definisi 2.8.2 *Suatu matriks persegi dinamakan matriks* ***Elementer*** *bila matriks ini diperoleh dari matriks identitas dengan melakukan suatu operasi baris elementer pada matriks identitas tsb.*

Berikut ini beberapa contoh matriks elementer
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3B_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 \Leftrightarrow B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_4 - 4B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operasi Baris Elementer dari suatu matriks juga khususnya matriks identits ada tiga macam, yaitu pertukaran antar baris, suatu baris kalikan dengan skalar taknol dan tambahkan suatu baris dengan hasil dari suatu baris yang lain kali dengan skalar tak nol.

Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ dan e menyatakan suatu baris elementer pada A. Matriks hasil dari OBE e pada A ditulis $e(A)$ dan hasil matriks OBE e pada matriks identitas $I_{m\times m}$ ditulis $e(I_{m\times m}$. Jelas bahwa $e(I_{m\times m}$ adalah matriks elementer. Sifat berikut menjelaskan hubungan $e(A)$ dengan $e(I_{m\times m}$.

Teorema 2.8.4 *Bila $E = e(I_{m\times m})$, maka $e(A) = EA$.*

Bukti: Misalkan untuk $i = 1,2,\cdots m$, $A_{i,*}$, adalah baris ke-i dari matriks A dan $I_{i,*}$ adalah baris ke-i dari matriks identitas $I_{m\times m}$, maka $I_{i,*}A = A_{i,*}$.

1. Misalkan e adalah OBE dari pertukaran antara baris ke-i dengan baris ke-j, didapat

$$E = e(I_{m\times m}) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{m,*} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad e(A) = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ A_{j,*} \\ \vdots \\ A_{i,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$EA = \begin{bmatrix} I_{1,*}\,A \\ I_{2,*}\,A \\ \vdots \\ I_{j,*}\,A \\ \vdots \\ I_{i,*}\,A \\ \vdots \\ I_{m,*}\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ A_{j,*} \\ \vdots \\ A_{i,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix} = e(A).$$

2. Misalkan e adalah OBE dari baris ke-i dikalikan dengan skalar taknol λ, didapat

$$E = e(I_{m\times m}) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ \lambda I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{m,*} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad e(A) = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ \lambda A_{i,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$EA = \begin{bmatrix} I_{1,*}\,A \\ I_{2,*}\,A \\ \vdots \\ (\lambda I_{i,*})A \\ \vdots \\ I_{m,*}\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ \lambda(I_{i,*}\,A) \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,*}\,A \\ I_{2,*}\,A \\ \vdots \\ (\lambda I_{i,*})A \\ \vdots \\ I_{m,*}\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ \lambda A_{i,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix} = e(A)$$

3. Misalkan e adalah OBE dari baris ke-j menjadi λ kali baris ke-i ditambah baris ke-j dengan $\lambda \neq 0$, didapat

$$E = e(I_{m\times m}) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ \lambda I_{i,*} + I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{m,*} \end{bmatrix} \text{ dan } e(A) = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ A_{i,*} \\ \vdots \\ \lambda A_{i,*} + A_{j,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$EA = \begin{bmatrix} I_{1,*}\,A \\ I_{2,*}\,A \\ \vdots \\ I_{i,*}\,A \\ \vdots \\ (\lambda I_{i,*} + I_{j,*})\,A \\ \vdots \\ I_{m,*}\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ A_{i,*} \\ \vdots \\ \lambda(I_{i,*}\,A) + I_{j,*}\,A \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ \vdots \\ A_{i,*} \\ \vdots \\ \lambda A_{i,*} + A_{j,*} \\ \vdots \\ A_{m,*} \end{bmatrix} = e(A).$$

$\square$

Hasil penting Teorema 2.8.4 adalah suatu operasi baris elementer dapat diganti oleh matriks elementer yang sesuai yaitu

$$e(A) = EA$$

pada persamaan ini, e menyatakan suatu operasi baris elementer yang dikenakan pada matriks A sedangkan E adalah matriks elementer yang sesuai dan memberikan hasil matriks E dikalikan dengan A yaitu EA sama dengan $e(A)$. Hasil-hasil yang telah didapat ini berlaku juga untuk serangkaian operasi baris elementer, misalnya $e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots, e^{(k)}$ yang dikenakan pada matriks A yaitu

$$e^{(k)}e^{(k-1)}\cdots e^{(1)}(A),$$

bila matriks elementer yang sesuai dengan rangakaian operasi baris elementer tsb. adalah

$$E_1, E_2, \cdots, E_K,$$

maka

$$e^{(k)}e^{(k-1)}\cdots e^{(1)}(A) = (E_k E_{k-1}\cdots E_1)A.$$

Sebagaimana telah diketahui bahwa metoda Gauss ataupun Gauss Jordan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear pada dasarnya mengubah sistem persamaan ini kebentuk sistem persamaan linear lainnya yang ekivalen dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer. Berikut ini dibahas lagi Contoh2.2.1 yaitu

$$\begin{array}{rcr} x_2 - x_3 &=& 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &=& 1 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &=& -2 \end{array},$$

tetapi sekarang diselesaikan menggunakan serangkain matriks elementer. Matriks diperbesar dari sistem persamaan linear adalah

$$Ab = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right].$$

Matriks -matriks elementer yang sesuai sebagaimana telah dilakukan OBE pada Contoh 2.2.1 adalah

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Didapat

$$\begin{aligned} E_3E_2E_1Ab &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari hasil ini, lakukan substitusi mundur, didapat

$$\begin{aligned} &x_3 = \tfrac{-6}{-2} = 3, \\ &x_2 = 3 + x_3 = 3 + 3 = 6, \\ &x_1 = -\tfrac{1}{2}(1 - 4x_2 + x_3) = -\tfrac{1}{2}(1 - 24 + 3) = 10. \end{aligned}$$

Terlihat memberikan hasil yang sama seperti telah dibahas pada Contoh 2.2.1.

Berikut ini diberikan sifat dari matriks elementer yang berkaitan dengan invers matriks.

Teorema 2.8.5 *Suatu matriks elementer adalah nonsingulir.*

Bukti:
Ada tiga macam operasi baris elementer, pertama OBE yang berkenaan dengan pertukaran antara baris ke-i dengan baris ke-j pada suatu matriks A. Misalkan operasi ini dinotasisikan dengan e dan bila dilakukan sekali lagi e pada $e(A)$ menghasilakn matriks A lagi. Bila I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, didapat matriks elementer

$$E_1 = e(I) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix}$$

dan

$$e(E_1) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix} = I,$$

tetapi $e(E_1) = e(I)E_1 = E_1E_1$. Jadi $E_1E_1 = I$, dengan demikian $E_1^{-1} = E_1$ atau E_1 adalah non singulir. Selanjutnya, misalkan $e^{(1)}$ adalah OBE pada suatu matriks, yaitu mengalikan $\lambda \neq 0$ dengan baris ke-i dan $e^{(2)}$ adalah OBE pada suatu matriks, yaitu mengalikan $\frac{1}{\lambda}$ dengan baris ke-i. Bila I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, didapat matriks elementer

$$E_1 = e^{(1)}(I) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ \lambda I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix}$$

dan

$$e^{(2)}(E_1) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda}(\lambda I_{i,*}) \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix} = I,$$

tetapi juga

$$e^{(2)}(E_1) = e^{(2)}(I)E_1.$$

Bila $e^{(2)}(I) = E_2$, maka $E_2E_1 = I$, dengan demikian $E_1^{-1} = E_2$ atau E_1 adalah non singulir. Terakhir, misalkan $e^{(1)}$ adalah OBE pada suatu matriks, yaitu mengalikan $\lambda \neq 0$ dengan baris ke-i ditambahkan pada baris ke-j dan $e^{(2)}$ adalah OBE pada suatu matriks, mengalikan $-\lambda$ dengan baris ke-i ditambahkan pada baris ke-j Bila I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, didapat matriks elementer

$$E_1 = e^{(1)}(I) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ \lambda I_{i,*} + I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix}$$

dan

$$e^{(2)}(E_1) = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ -\lambda I_{i,*} + \lambda I_{i,*} + I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,*} \\ I_{2,*} \\ \vdots \\ I_{i,*} \\ \vdots \\ I_{j,*} \\ \vdots \\ I_{n,*} \end{bmatrix} = I,$$

tetapi juga

$$e^{(2)}(E_1) = e^{(2)}(I)E_1.$$

Bila $e^{(2)}(I) = E_2$, maka $E_2E_1 = I$, dengan demikian $E_1^{-1} = E_2$ atau E_1 adalah non singulir. $\square$

Contoh 2.8.3 *Perluh diperhatikan bahwa OBE dari pertukaran diantara baris i dengan baris j tidak selalu bahwa i dan j tidak sama. Secara umum boleh sama boleh tidak.* Diberikan matriks elementer

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

maka

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Telah dibahas bahwa, bila serangkaian OBE dikenakan pada suatu Sistem Persamaan Linear (SPL) didapat suatu sistem persamaan linear yang ekivalen dengan SPL sebelumnya dan dari SPL yang terakhir ini didapat penyelesaian (bila ada) dari SPL yang dibahas. Juga, telah diketahui bahwa rangkaian OBE yang dikenakan pada SPL dapat diganti oleh serangkaian matriks elementer yang sesuai selanjutnya dikalikan dengan matriks diperbesar dari SPL tsb. Hasil akhirnya adalah suatu matriks yang tepat sama seperti hasil akhir dari bila serangkaian OBE dikenakan pada SPL yang ada. Oleh karena itu, tidak berlebihann bila didefinisikan hal berikut.

Definisi 2.8.3 Bila A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ dan pada A dikenakan serangkaian matriks elementer $E_1, E_2, \cdots, E_k$, maka dikatakan A ***ekivalen-baris*** dengan matriks

$$E_1 E_2 \cdots E_k A.$$

Dalam hal ini bila A baris-ekivelen dengan B ditulis

$$A \sim_{\text{baris}} B.$$

Teorema 2.8.5 menjelaskan bahwa, suatu matriks elementer E adalah nonsingulir, artinya ada E^{-1} sehingga $E^{-1}E = I = EE^{-1}$, Disini matriks E^{-1} juga merupakan matriks elementer dengan tipe yang sama seperti tipe dari matriks elementer E. Berikut ini ditunjukkan bahwa ekivalen-baris adalah suatu relasi ekivalen.

Teorema 2.8.6 *Ekivalen-baris adalah suatu relasi ekivalen.*

Bukti:
Misalkan $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ adalah himpunan dari semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen di $\mathbb{C}$ dan $\sim_{\text{baris}}$ relasi pada $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Ditunjukkan bahwa $\sim_{\text{baris}}$ relasi ekivalen. Misalkan A, B dan C di $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, didapat

1. jelas bahwa matriks identitas $I = I_{n\times m}$ juga merupakan matriks elementer. Didapat

$$A = IA \text{ dan } A = I^{-1}A.$$

   Terlihat bahwa $A \sim_{\text{baris}} A$.

2. Bila $A \sim_{\text{baris}} B$, maka $B = E_1E_2\cdots E_kA$ untuk beberapa matriks elementer E_i dengan $i = 1,2,\cdots,k$. Sebagaimana telah diketahui E_1^{-1} juga matriks elementer dan
$$(E_1E_2\cdots E_k)^{-1} = E_k^{-1}E_{k-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}.$$
Jadi
$$A = E_k^{-1}E_{k-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}B.$$
Terlihat bahwa $B \sim_{\text{baris}} A$,

3. Misalkan $A \sim_{\text{baris}} B$ dan $B \sim_{\text{baris}} C$ maka $B = E_1E_2\cdots E_pA$ untuk beberapa matriks elementer E_i dengan $i = 1,2,\cdots,p$ dan $C = E_{c1}E_{c2}\cdots E_{cq}B$ untuk beberapa matriks elementer E_{ci} dengan $i = 1,2,\cdots,q$. Didapat
$$\begin{aligned} A &= E_p^{-1}E_{p-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}B \\ &= E_p^{-1}E_{p-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}\underbrace{E_{cq}^{-1}\cdots E_{c2}^{-1}E_{c1}^{-1}C}_{B}. \end{aligned}$$
Terlihat bahwa $A \sim_{\text{baris}} C$.

Contoh 2.8.4 Diberikan matriks
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 14 & -1 & -22 \end{bmatrix}.$$
Perhatikan matriks elementer berikut
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
dan
$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$
Didapat
$$\begin{aligned} E_2E_1A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -10 & -16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 14 & -1 & -22 \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} E_1^{-1}E_2^{-1}B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 14 & -1 & -22 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -10 & -16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $A \sim_{\text{bar}} B$ dan $B \sim_{\text{bar}} A$. □

2.9 Mendapatkan Matriks Invers

disini dikembang suatu cara untuk memperoleh matriks invers.

2.10 Dekomposisi *LU*

disini dibahas suatu cara untuk memfaktorkan suatu matriks bujur sangkar menjadi suatu produk dari suatu matriks segitiga bawah L dan matriks segitiga atas U. Pemfaktoran yang demikian bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan.

2.11 Peninjauan Ulang Sistem Persamaan

disini ditinjau ulang penyelesaian sistem persamaan dan bagaimana matriks invers dan dekomposisi LU bisa membantu proses penyelesaian sistem persamaan. Juga dibahas beberapa ide yang lain untuk meyelesaikan sistem persamaan.

Bab 3

Determinan

3.1 Fungsi Determinan

disini diberikan pengertian formal determinan juga diberikan suatu formula menghitung determinan matriks 2×2 dan 3×3.

3.2 Sifat-sifat Determinan

disini dibahas beberapa sifat fungsi determinan diantaranya adalah suatu formula untuk menentukan determinan dari matriks segitiga.

3.3 Metode Kofaktor

disini dibahas metoda pertama untuk menghitung determinan matriks.

3.4 Reduksi Baris Untuk Menghitung Determinan

disisni dibahas metoda kedua untuk menghitung determinan matriks.

3.5 Aturan Cramer

disini dibahas cara yang lain untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan menggunakan determinan.

Bab 4

Ruang-*n* Euclide

4.1 Vektor

disisni dikenalkan vektor dalam ruang-2 dan ruang-3 begitu juga beberapa ide penting mengenai vektor-vektor ini.

4.2 Perkalian Titik dan Perkalian Silang

disini dibahas pengertian perkalian titik dan perkalian silang dari dua vektor juga pemakaian dari perkalian titik.

4.3 Ruang-*n* Euclide

disini dikenalkan ide dari ruang-*n* Euclide dam beberapa perluasan ide dari pembahasan sebelumnya.

4.4 Transformasi Linear

disini dikenalkan topik dari transformasi linear dan beberapa sifat-sifatnya.

4.5 Contoh-contoh Transformasi Linear

disini diberikan beberapa contoh transformasi linear.

Bab 5

Ruang Vektor

5.1 Lapangan(Field)

Suatu lapangan adalah suatu himpunan $K \neq \emptyset$ bersama-sama dengan dua operasi *tambah* (+) dan *kali* (.) sehingga untuk semua $a, b, c \in K$ memenuhi:

- $(a+b) \in K$ (tertutup).
- $a+b = b+a$ (komutatif).
- $(a+b)+c = a+(b+c)$ (assosiatif).
- Ada $0 \in K$ sehingga $a+0 = 0+a = a$ (elemen netral).
- Untuk setiap $a \in K$ ada suatu $-a \in K$ sehingga $a+(-a) = -a+a = 0$ (invers).
- $(a.b) \in K$ (tertutup).
- $a.b = ba$ (komutatif).
- $(a.b).c = a.(b.c)$ (assosiatif).
- Ada $1 \in K$ sehingga $a.1 = 1.a = a$ (elemen identitas).
- Bila $a \neq 0$, maka ada $a^{-1} \in K$ sehingga $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ (invers).
- $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$ (distributif).

Contoh-contoh Lapangan

1. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$, himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$.

2. Himpunan bilangan bulat modulo p dinotasikan oleh $\mathbb{Z}_p$, dengan p bilangan prima.

Contoh 1. adalah lapangan takhingga sedangkan Contoh 2. lapangan hingga. Dalam Contoh 2., bila p bukan bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_p$ bukan lapangan.

5.2 Ruang Vektor

Suatu himpunan V dengan dua operasi *tambah* dan *kali* dikatakan suatu ruang vektor atas lapangan K bila memenuhi:

1. Bila $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$, maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$ dan
   - $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
   - $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
   - Ada $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\boldsymbol{v}+\mathbf{0} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}+\boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{v} \in V$
   - Untuk setiap $\boldsymbol{v} \in V$ ada $\boldsymbol{w} \in V$ sehingga $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (biasanya $\boldsymbol{w}$ ditulis sebagai $-\boldsymbol{v}$).
2. Bila $a,b \in K$ dan $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$, maka $a\boldsymbol{v} \in V$ dan
   - $(a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}$
   - $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}$
   - $(ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})$
   - $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

<u>Contoh-contoh Ruang Vektor</u>

1. Himpunan $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$, dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   dan

$$a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}, \forall a \in K \text{ dan } \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

2. Himpunan $\mathbb{R}^n$ juga ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan definisi operasi tambah dan kali diberikan seperti di Contoh 1. Penambahan dalam Contoh 1. dinamakan *penambahan secara komponen yang bersesuaian*.

3. Himpunan matriks $m \times n$ dengan elemen elemennya bilangan riil

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

   dan doperasi penambahan matriks diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

   sedangkan perkalian skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dengan matriks diberikan oleh:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

   Maka $M_{m,n}(\mathbb{R})$ adalah suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

4. Misalkan $\mathbb{F}$ adalah suatu lapangan dan himpunan semua fungsi, yaitu

$$V = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}\}$$

   dengan

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \forall x \in \mathrm{F}$$

   dan

$$(\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x), \alpha \in \mathbb{F} .$$

   Maka V adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

5. Misalkan $\mathbb{F}$ adalah suatu lapangan dan himpunan semua polinomial berderajad kurang atau sama dengan n yaitu

$$P_n(\mathbb{F}) = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \,|\, a_i \in \mathbb{F}\}$$

   dengan

$$(p+q)(x) \stackrel{\text{def}}{=} p(x) + q(x), \forall x \in \mathbb{F}$$

   dan

$$(\alpha p)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha p(x), \alpha \in \mathbb{F} .$$

   Maka $P_n(\mathbb{F})$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

6. Himpunan
$$l_\infty = \{a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_n \in \mathbb{R}, \sup(|a_n|) < \infty\}$$
dengan
$$a + b \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$
dan
$$\alpha a \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots), \alpha \in \mathbb{R}.$$
Maka l_∞ adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

7. Himpunan fungsi terdifferensial tak berhingga kali pada interval $[a,b]$, yaitu $C^\infty[a,b]$, definisi penambahan fungsi dan perkalian skalar dengan fungsi seperti dalam Contoh 4. merupakan ruang vektor atas lapangan riil $\mathbb{R}$.

8. Himpunan fungsi-fungsi
$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \right\}$$
definisi penambahan fungsi dan perkalian skalar dengan fungsi seperti dalam Contoh 4. merupakan ruang vektor atas lapangan riil $\mathbb{R}$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari suatu ruang vektor V atas lapangan K. Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan K, maka

(1). $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, 0 adalah elemen netral di K dan $\boldsymbol{v} \in V$.

(2). $(-1\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dengan $-1 \in K$.

(3). $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, dengan $\alpha \in K$.

<u>Bukti</u>

(1). $\boldsymbol{v} = (1+0)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$, kedua ruas tambahkan dengan vektor $\boldsymbol{w}$ yang memenuhi $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, didapat: $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}$ atau $\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0\boldsymbol{v}$. Terlihat bahwa $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

(2). $(-1\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = (-1+1)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

(3). $\alpha\mathbf{0} = \alpha(0\mathbf{0}) = (\alpha \cdot 0)\mathbf{0} = 0\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

5.3 Ruang Bagian (Subspace)

Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan K. Himpunan $S \subset V$ ($S \neq \emptyset$) dikatakan suatu ruang bagian bila S sendiri dengan operasi tambah dan kali seperti di V tetap merupakan ruang vektor atas K.

<u>Contoh-contoh Ruang Bagian</u>

1. Himpunan
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x+y+z=0 \right\}$$
adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$.

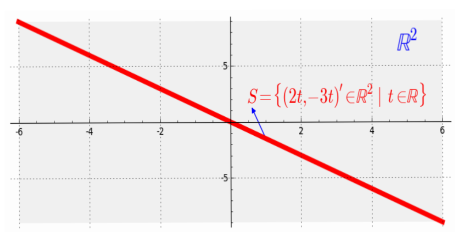
2. Misalkan ruang vektor dari semua himpunan fungsi yaitu
$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
dan $D \subset V$, dengan
$$D = \left\{ f \in V \,\middle|\, \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \right\},$$
maka D adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas $\mathbb{R}$.

3. Himpunan $P_3(\mathbb{R})$ adalah ruang bagian dari ruang vektor $P_n(\mathbb{R})$ atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan $n \geq 3$.

4. Himpunan
$$S = \left\{ (a_n) \in l_\infty \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n = x, x \in \mathbb{R} \right\}$$
adalah ruang bagian dari ruang vektor l_∞ atas lapangan $\mathbb{R}$.

5. Himpunan
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = \mathbf{0}, A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\}$$
adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas lapangan $\mathbb{R}$.

6. Himpunan titik yang melalui garis $3x + 2y = 0$ yaitu
$$S = \left\{(2t, -3t)' \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$$
adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^2$ atas lapangan $\mathbb{R}$.



Gambar 5.1: Ruang Bagian

Berikut ini diberikan suatu sifat (pernyataan) yang ekivalen dengan pernyataan dari suatu ruang bagian.

Himpunan S adalah suatu ruang bagian dari suatu ruang vektor V atas lapangan K bila dan hanya bila

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + x_2\boldsymbol{s}_2 \in S$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in K$ dan $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in S$.

<u>Bukti</u>
Misalkan S ruang bagian dan

$$x_1, x_2 \in K \;\text{ juga }\; \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in S,$$

maka

$$x_1\boldsymbol{s}_1 \in S \;\text{ dan }\; x_2\boldsymbol{s}_2 \in S.$$

Oleh karena itu,

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + x_2\boldsymbol{s}_2$$

juga di S. Sebaliknya, misalkan

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + x_2\boldsymbol{s}_2 \in S$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in K$ dan $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in S$. Akan ditunjukkan bahwa S adalah ruang vektor atas K. Sifat 2. dari ruang vektor otomatis diwarisi dari V, begitu juga sifat komutatif, assosiatif di sifat 1., diwarisi dari V. Untuk $x_1 = x_2 = 1$, didapat

$$1\boldsymbol{s}_1 + 1\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2 \in S \;\; (\text{tertutup}).$$

Untuk $x_1 = x_2 = 0$ didapat

$$0\boldsymbol{s}_1 + 0\boldsymbol{s}_2 = 0(\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2) = \boldsymbol{0} \in S.$$

Oleh karena itu, untuk $x_1 = x_2 = 1$ dan setiap $\boldsymbol{s} \in S$, didapat

$$1\boldsymbol{s} + 1\boldsymbol{0} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{s} = 1\boldsymbol{0} + 1\boldsymbol{s} \in S.$$

Selanjutnya untuk $x_1 = 1, x_2 = -1$ dan setiap $\boldsymbol{s} \in S$ didapat

$$1\boldsymbol{s} + (-1)\boldsymbol{s} = (1 + (-1))\boldsymbol{s} = 0\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

($\boldsymbol{s}$ punya invers yaitu $-\boldsymbol{s}$).

$\square$

<u>Catatan</u> Pernyataan $x_1\boldsymbol{s}_1 + x_2\boldsymbol{s}_2 \in S$ untuk setiap $x_1, x_2 \in K$ dan $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in S$, dapat diganti oleh

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + x_2\boldsymbol{s}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n \in S$$

untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ dan $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in S$.

<u>Contoh penggunaan sifat ruang bagian</u>

1. Himpunan
$$B=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x+y+z=0\right\}$$
adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$. Sebab, untuk setiap $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in B$, maka
$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_1-z_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=y_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y_2-z_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=y_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$
Sehingga untuk $a,b\in\mathbb{R}$, didapat:
$$a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2=\underbrace{(ay_1+by_2)}_{\in\mathbb{R}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{(az_1+bz_2)}_{\in\mathbb{R}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\in B.$$

2. Misalkan ruang vektor dari semua himpunan fungsi yaitu
$$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$$
dan $D\subset V$, dengan
$$D=\left\{f\in V\,\middle|\,\frac{d^2f}{dx^2}+f=0\right\},$$
maka D adalah ruang bagian dari ruang vektor V atas $\mathbb{R}$. Sebab, misalkan $f,g\in D$ dan $a,b\in\mathbb{R}$, maka
$$\begin{aligned}\frac{d^2(af+bg)}{dx^2}+(af+bg) &= a\frac{d^2f}{dx^2}+af+b\frac{d^2g}{dx^2}+bg\\ &= a(\frac{d^2f}{dx^2}+f)+b(\frac{d^2g}{dx^2}+g)=a\cdot 0+b\cdot 0=0.\end{aligned}$$
Jadi $af+bg\in D$.

3. Himpunan $P_3(\mathbb{R})$ adalah ruang bagian dari ruang vektor $P_n(\mathbb{R})$ atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan $n\geq 3$. Sebab, misalkan $p(x),q(x)\in P_3(\mathbb{R})$ dan $a,b\in\mathbb{R}$, maka
$$\begin{aligned}ap(x)+bq(x) &= a(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+b(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\\ &= \underbrace{(aa_0+bb_0)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{(aa_1+bb_1)}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{(aa_2+bb_2)}_{\in\mathbb{R}}x^2\\ &\quad+\underbrace{(aa_3+bb_3)}_{\in\mathbb{R}}x^3.\end{aligned}$$
Jadi $ap(x)+bq(x)\in P_3(\mathbb{R})$.

5.4 Pembentang (Span)

Misalkan V suatu ruang vektor atas K dan $S \subset V$. Himpunan pembentang dari S adalah himpunan:

$$< S > \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n \,|\, x_1, \ldots, x_n \in K, \boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in S\}.$$

Penulisan $x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n$ juga dinamakan **kombinasi linier** dari vektor-vektor $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$. Berikut ini diberikan sifat dari suatu $< S >$ sebagaimana berikut.

Bila V merupakan suatu ruang vektor atas K dan $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$, maka $< S >$ adalah suatu ruang bagian dari V.

Bukti

Misalkan

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n$$

dan

$$\boldsymbol{w} = x_{n+1}\boldsymbol{s}_{n+1} + \ldots + x_m\boldsymbol{s}_m$$

di $< S >$ dan $a, b \in K$, maka

$$\begin{aligned} a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} &= a(x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n) + b(x_{n+1}\boldsymbol{s}_{n+1} + \ldots + x_m\boldsymbol{s}_m) \\ &= (ax_1)\boldsymbol{s}_1 + \ldots + (ax_n)\boldsymbol{s}_n + (bx_{n+1})\boldsymbol{s}_{n+1} + \ldots + (bx_m)\boldsymbol{s}_m. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} \in < S >$, oleh karena itu $< S >$ adalah ruang bagian dari V. $\square$

Contoh

1. Misalkan V ruang vektor atas K untuk setiap $\boldsymbol{v} \in V$, maka $\langle\{\boldsymbol{v}\}\rangle = \{k\boldsymbol{v} \,|\, k \in K\}$.
2. Misalkan ruang vektor $\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$, maka $\langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle = \mathbb{R}^2$ dimana $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)'$ dan $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)'$. Sebab,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \langle\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}\rangle. \end{aligned}$$

3. Misalkan $V = \mathbb{R}^n$ ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dan diberikan suatu matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$. Didefinisikan suatu himpunan

$$S = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\},$$

maka S adalah ruang bagian dari V. Sebab bila untuk sebarang $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \in S$ dan sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ didapat

$$A(a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a(A\mathbf{y}) + b(A\mathbf{z}) = a \cdot \mathbf{0} + b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Jadi $a\mathbf{y} + b\mathbf{z} \in S$, maka dari itu S merupakan sub ruang dari V.

Ruang bagian $\langle S \rangle$ dari suatu ruang vektor V juga dinamakan **ruang vektor yang dibangun oleh** S. Berikut ini diberikan sifat dari suatu himpunan pembentang.

Misalkan V suatu ruang vektor atas K dan $\langle S \rangle$ adalah suatu himpunan pembentang dari S dan $\boldsymbol{v} \in V$, maka

$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle$$

bila dan hanya bila $\boldsymbol{v} \in \langle S \rangle$.

<u>Bukti</u>
Misalkan $\langle S \rangle = \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle$, jelas bahwa $\boldsymbol{v} \in \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle$. Jadi juga $\boldsymbol{v} \in \langle S \rangle$. Sebaliknya misalkan bahwa $\boldsymbol{v} \in \langle S \rangle$, akan ditunjukkan bahwa $\langle S \rangle = \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle$. Jelas bahwa $S \subset \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle$. Tinggal menunjukkan bahwa $\langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle \subset \langle S \rangle$.Tulis

$$\boldsymbol{v} = a_0 \boldsymbol{s}_0 + \ldots + a_n \boldsymbol{s}_n$$

dan misalkan

$$\boldsymbol{w} \in \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle .$$

Didapat

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= b_0 \boldsymbol{v} + a_{n+1} \boldsymbol{s}_{n+1} + \ldots + a_m \boldsymbol{s}_m \\ &= (b_0 a_0) \boldsymbol{s}_0 + \ldots + (b_0 a_n) \boldsymbol{s}_n + a_{n+1} \boldsymbol{s}_{n+1} + \ldots + a_m \boldsymbol{s}_m. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{w} \in \langle S \rangle$. Jadi

$$\langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle \subset \langle S \rangle$$

dan karena

$$\langle S \rangle \subset \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle ,$$

oleh karena itu haruslah

$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\} \rangle .$$

$\square$

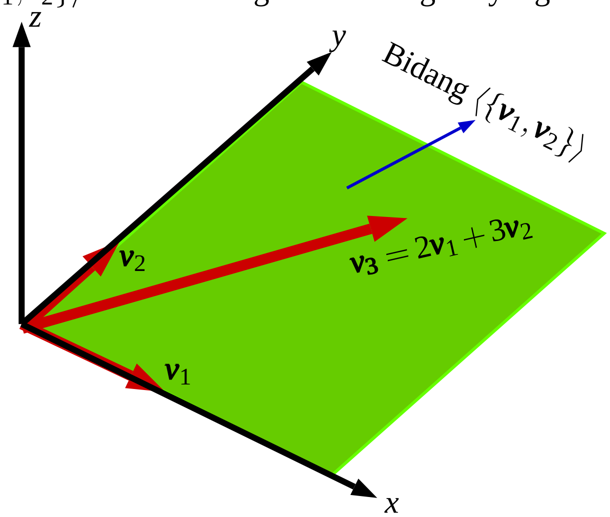
<u>Contoh</u> Misalkan dalam $\mathbb{R}^3$, vektor-vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Didapat $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2$, jadi $\boldsymbol{v}_3 \in \langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle$. Maka dari itu

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle = \langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}\rangle.$$

Hasil bentangan $\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle$ adalah bidang dalam ruang $\mathbb{R}^3$ yang diberikan oleh gambar berikut.



Sifat dari suatu himpunan pembentang (span) yang dibahas sebelumnya, menyatakan bahwa suatu vektor $\boldsymbol{v}$ di $\bar{S}$ bisa dihapus untuk memperoleh himpunan baru S dengan himpunan pembentang yang sama yaitu $\langle\bar{S}\rangle = \langle S\rangle$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{v}$ adalah kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Jadi dengan pengertian ini, suatu himpuan $S \subset V$ adalah minimal bila dan hanya S tidak memuat vektor-vektor yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lainnya dalam himpunan tersebut (vektor-vektor di S yang demikian ini nantinya dinamakan bebas linear). Dengan demikian bila hasil bentangan $\bar{S}$ diinginkan lebih luas dari bentangan S, yaitu

$$\langle S\rangle \subset \langle S \cup \{\boldsymbol{v}\}\rangle = \langle\bar{S}\rangle,$$

maka haruslah dipilih $\boldsymbol{v} \notin \langle S\rangle$.

Pereduksian banyaknya vektor-vektor bergantungan linier yang membangun W dapat dinyatakan ulang oleh sifat berikut:

Misalkan $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ adalah vektor di suatu ruang vektor atas suatu lapangan K dan misalkan $W = \langle\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}\rangle$. Bila vektor $\boldsymbol{v_n}$ adalah suatu kombinasi linier dari $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n-1}}$, maka

$$W = \langle\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle.$$

Bukti

Bila diberikan sebarang $\boldsymbol{v} \in \langle\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle$, maka dapat dipilih skalar $k_1, \ldots, k_{n-1}$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}}$$

sehingga didapat

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}} + 0.\boldsymbol{v_n}.$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{v} \in \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\rangle$. Jadi

$$\langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle \subseteq \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\rangle. \tag{5.1}$$

Sebaliknya, bila diberikansebarang $\boldsymbol{v} \in \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\rangle$, maka dapat dipilih skalar $a_1,\ldots,a_n$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}.$$

Tetapi karena $\boldsymbol{v_n}$ adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-1}}$, maka dapat dipilih skalar $b_1,\ldots,b_{n-1}$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{v_n} = b_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + b_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}}.$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}} + a_n\boldsymbol{v_n} \\
&= a_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}} + a_n(b_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + b_{n-1}\boldsymbol{v_{n-1}}) \\
&= (a_1 + a_nb_1)\boldsymbol{v_1} + \cdots + (a_{n-1} + a_nb_{n-1})\boldsymbol{v_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{v} \in \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle$. Jadi

$$\langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\rangle \subseteq \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle. \tag{5.2}$$

Dengan demikian dari (5.1) dan (5.2) didapat

$$W = \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}\rangle = \langle\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-1}}\}\rangle.$$

$\square$

5.5 Bebas Linear

Berikut ini diberikan suatu pengertian mengenai bebas linier. Vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ di suatu ruang vektor V atas lapangan K dikatakan *bebas linier* bila vektor $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ bukan merupakan suatu kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya. Bila tidak demikian, maka vektor-vektor $\boldsymbol{v}_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ dikatakan *bergantungan linier*.

Misalkan Vektor-vektor $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n \in S \subset V$, dengan V suatu ruang vektor atas K, vektor-vektor $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1,2\ldots,n$ bebas linier bila dan hanya bila $x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{0}$, $x_i \in K$ dipenuhi hanya untuk $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Bukti
Misalkan $\boldsymbol{s}_i \in S$, $i = 1,2\ldots,n$ bebas linier dan andaikan $x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{0}$ tetapi untuk beberapa i, $x_i \neq 0$. Didapat

$$\boldsymbol{s}_i = \left(-\frac{x_1}{x_i}\right)\boldsymbol{s}_1 + \ldots + \left(-\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)\boldsymbol{s}_{i-1} + \left(-\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\boldsymbol{s}_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{x_n}{x_i}\right)\boldsymbol{s}_n.$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{s}_i$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{s}_j$, $j \neq i$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bebas linier. Jadi haruslah

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = 0$$

dipenuhi hanya untuk $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Selanjutnya misalkan

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = \mathbf{0},\, x_i \in K$$

dipenuhi hanya untuk $x_1 = \ldots = x_n = 0$, maka jelas bahwa

$$\boldsymbol{s}_i,\, i = 1, 2 \ldots, n$$

bebas linier. Bila tidak berarti bahwa untuk beberapa i,

$$\boldsymbol{s}_i = c_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{s}_{i-1} + c_{i+1}\boldsymbol{s}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{s}_n$$

atau

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{s}_{i-1} + c_i\boldsymbol{s}_i + c_{i+1}\boldsymbol{s}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{s}_n$$

dengan $c_i = -1$. Ini bertentangan dengan kenyataan bahwa

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{s}_{i-1} + c_i\boldsymbol{s}_i + c_{i+1}\boldsymbol{s}_{i+1} + \ldots + c_n\boldsymbol{s}_n$$

dipenuhi hanya unuk $c_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

<u>Komentar:</u> Pernyataan vektor-vektor

$$\boldsymbol{s}_i,\, i = 1, 2 \ldots, n$$

dalam ruang vektor V atas K bebas linier ekivalen dengan

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = \mathbf{0},\, x_i \in K$$

dipenuhi hanya untuk $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Bila

$$V = \mathbb{R}^n \text{ dan } K = \mathbb{R},$$

maka vektor-vektor $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$ dalam ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas $\mathbb{R}$ bebas linier mempunyai arti bahwa sistem persamaan linier homogin

$$x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n = \mathbf{0}$$

mempunyai penyelesaian trivial, yaitu $x_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Bila persamaan homogin ini mempunyai jawab non trivial, yaitu $x_i \neq 0$ untuk beberapa i, maka hal ini berarti bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{s}_i$ tsb. tidak bebas linier atau bergantungan linier. Bila vektor $\boldsymbol{s} \neq \mathbf{0}$ di ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dan memenuhi

$$\boldsymbol{s} = x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n,$$

yaitu vektor $\boldsymbol{s}$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n$. Hal ini berarti bahwa sistem persamaan linier tak homogin

$$\boldsymbol{s} = x_1\boldsymbol{s}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{s}_n,$$

mempunyai jawab $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)'$.

<u>Contoh</u>

1. Dalam $\mathbb{R}^4$ vektor $(1,4,-2,6)'$ adalah kombinasi linier dari dua vektor $(1,2,0,4)'$ dan $(1,1,1,3)'$, sebab:
$$(1,4,-2,6)' = 3(1,2,0,4)' - 2(1,1,1,3)'.$$
Sedangkan vektor $(2,6,0,9)'$ bukan kombinasi linier $(1,2,0,4)$ dan $(1,1,1,3)'$, sebab bila
$$(2,6,0,9)' = x_1(1,2,0,4)' + x_2(1,1,1,3)'$$
ekivalen dengan sistem persamaan linier
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 9 \end{aligned}$$
mudah diselidiki bahwa sistem persamaan linier ini tidak mempunyai jawab.

2. Misalkan ruang vektor $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ atas $\mathbb{R}$, maka fungsi $\cos 2x$ merupakan kombinasi linier dari fungsi-fungsi $\cos^2 x, \sinh^2 x$ dan $\cosh^2 x$, sebab
$$\cos 2x = 2\cos^2 x + \sinh^2 x - \cosh^2 x,$$
ingat bahwa
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
dan
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

3. Misalkan tiga vektor $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)', \boldsymbol{v}_2 = (3,2,1)'$ dan $\boldsymbol{v}_3 = (3,3,3)'$ di $\mathbb{R}^3$. Maka
$$\begin{aligned} \langle\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}\rangle &= \{x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1+3x_2+3x_3, 2x_1+2x_2+3x_3, 3x_1+x_2+3x_3)'\} \end{aligned}$$
Tulis $(x,y,z)' = (x_1+3x_2+3x_3, 2x_1+2x_2+3x_3, 3x_1+x_2+3x_3)'$. Didapat:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$(1\ -2\ \ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\ -2\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

atau $x-2y+z=0$. Catatan $3\boldsymbol{v}_1+3\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}$ dan juga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Terlihat bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ bergantungan linear. Jadi persamaan homogin :

$$x_1\boldsymbol{v_1}+x_2\boldsymbol{v_2}+x_3\boldsymbol{v_3}=\mathbf{0}$$

atau dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mempunyai jawab non-trivial. Salah satu jawabannya adalah :

$$x_1=3, x_2=3 \text{ dan } x_3=-4.$$

Dengan demikian himpunan

$$S=\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$$

bukan himpunan minimal.

4. Dua vektor $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 40 & 15 \end{pmatrix}', \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -50 & 25 \end{pmatrix}' \in \mathbb{R}^2$ adalah bebas linear sebab

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2=\mathbf{0}$$

dipenuhi hanya untuk $x_1=x_2=0$, hal ini bisa diselidiki sbb:

$$\left.\begin{array}{rcl} 40x_1-50x_2 & = & 0 \\ 15x_1+25x_2 & = & 0 \end{array}\right\} -\frac{15}{40}B_1+B_2 \quad \left.\begin{array}{rcl} 40x_1-50x_2 & = & 0 \\ \frac{175}{4}x_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x_2=0, x_1=0.$$

5. Diberikan $S\subset\mathbb{R}^3$ dengan

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Perhatikan persamaan berikut:

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Himpunan penyelesaiannya adalah:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Hal ini menunjukkan bahwa semua vektor di S saling bergantungan linier. Untuk $x_3 = 0, x_5 = 1$, didapat bahwa vektor ke-5 dalam S merupakan kombinasi linier dari dua vektor pertama. Gunakan sifat yang ada untuk menghapus vektor ke-5 didapat:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ jadi } \langle S \rangle = \langle S_1 \rangle .$$

Vektor ke-3 dalam S_1 merupakan kombinasi linier dari dua vektor yang pertama, sehingga vektor ke-3 ini bisa dihapus dan didapat:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Juga, dalam hal ini $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$. Jadi $\langle S \rangle = \langle S_2 \rangle$.

6. Misalkan tiga vektor $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0)', \boldsymbol{v}_2 = (5,1,-3)'$ dan $\boldsymbol{v}_3 = (2,7,4)'$ di $\mathbb{R}^3$, maka

$$\begin{aligned} \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} \rangle &= \{x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1,0)' + x_2(5,1,-3)' + x_3(2,7,4)' \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1 + 5x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 7x_3, -3x_2 + 4x_3)' | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Tulis $(x,y,z)' = (x_1 + 5x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 7x_3, -3x_2 + 4x_3)'$, didapat:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa, untuk setiap $(x,y,z)' \in \mathbb{R}^3$ selalu bisa diperoleh $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$(x,y,z)' = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 \in \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} \rangle .$$

Jadi $\mathbb{R}^3 \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} \rangle$, dilain pihak $\langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Maka dari itu $\mathbb{R}^3 = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\} \rangle$.

5.6 Basis dan Dimensi

Misalkan $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots\} \subset V$ dengan V adalah ruang vektor atas K. Bila $\langle\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots\}\rangle = V$ dan vektor-vektor $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ bebas linier maka B dikatakan suatu *basis* dari V. Banyaknya anggota dari B dinamakan *dimensi* dari ruang vektor V.

Contoh:

1. Dalam $\mathbb{R}^2$, $B_1 = \{(2,4)', (1,1)'\}$ adalah suatu basis dari $\mathbb{R}^2$, basis yang lainnya adalah $B_2 = \{(1,0)', (0,1)'\}$. Secara umum $B_3 = \{(a_{11}, a_{21})', (a_{12}, a_{22})'\}$ adalah suatu basis dari $\mathbb{R}^2$ bila
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. Diberikan ruang vektor $V = \{x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ atas $\mathbb{R}$, maka suatu basis dari V adalah
$$\{\cos\theta, \sin\theta\}.$$
Sebab
$$\begin{aligned} x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) &= 0 \\ -x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) &= 0 \end{aligned}$$
atau dalam bentuk persamaan matriks
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Didapat
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Jadi $\cos(\theta), \sin(\theta)$ adalah bebas linear dan juga
$$V = \langle\{\cos(\theta), \sin(\theta)\}\rangle,$$
maka $\{\cos(\theta), \sin(\theta)\}$ adalah suatu basis dari V.

3. Dalam ruang vektor $P_3(x)$, maka $\{1, x, x^2, x^3\}$ adalah suatu basis dari $P_3(x)$. Sedangkan $\{1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor $P_\infty(x)$.

4. Dalam ruang vektor $M_{2,2}(\mathbb{R})$, yaitu himpunan matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$, maka
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

adalah suatu basis dari $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Sebab bila

$$x_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

didapat

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Jadi

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

adalah bebas linear. Selanjutnya untuk sebarang

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

didapat

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}=a_{1,1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{1,2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{2,1}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{2,2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa

$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{pmatrix}\in\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Jadi

$$M_{2,2}(\mathbb{R})=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari suatu basis.

Diberikan $B=\{\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$ adalah suatu basis dari suatu ruang vektor V atas suatu lapangan K dan k adalah suatu skalar taknol di K. Maka

$$B_k=\{k\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_n}\}$$

adalah suatu basis dari V.

Bukti
Bila $\boldsymbol{v}$ sebarang vektor di V, maka karena B adalah suatu basis dari V dengan demikian dapat dipilih skalar $k_1,\ldots,k_n$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{v}=k_1\boldsymbol{v_1}+k_2\boldsymbol{v_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{v_n}.$$

Tetapi karena $k \neq 0$, maka didapat

$$\boldsymbol{v} = \frac{k_1}{k}(k\boldsymbol{v_1}) + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}.$$

Terlihat bahwa sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor di B_k. Jadi $\langle B_k \rangle = V$. Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa B_k adalah bebas linier, tinjau persamaan

$$a_1(k\boldsymbol{v_1}) + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}.$$

Persamaan tersebut dapat ditulis ulang sebagai

$$(a_1k)\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}.$$

Karena B adalah bebas linier, maka haruslah

$$a_1k = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots\ , a_n = 0.$$

Karena $k \neq 0$, maka $a_1 = 0$. Dengan demikian B_k adalah bebas linier, jadi B_k adalah suatu basis dari V.

□

Contoh.
Misalkan W adalah ruang bagian dari $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ yang merupakan himpunan matriks-matriks dengan trace sama dengan nol. Selanjutnya bila

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

maka tunjukkan bahwa S adalah suatu basis dari W. Pertama ditunjukkan bahwa $\langle S \rangle = W$. Diberikan sebarang matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mempunyai trace sama dengan nol bila dan hanya bila $a + d = 0$, jadi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa sebarang matriks A di W adalah kombinasi linier dari matriks-matriks di S. Jadi $\langle S \rangle = W$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa S adalah bebas linier sebagai berikut. Tinjau sistem persamaan linier berikut

$$k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan tersebut ekivalen dengan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & -k_1 \end{bmatrix}.$$

Hal ini memberikan penyelesaian trivial $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Jadi S adalah bebas linier. Karena $\langle S \rangle = W$ dan vektor-vektor di S adalah bebas linier, maka S adalah suatu basis dari W.

<u>Sifat</u> Misalkan V suatu ruang vektor atas K dan $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis dari V, maka sebarang elemen $\boldsymbol{v} \in V$ dapat diungkapkan secara tunggal sebagai kombinasi linier:

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n, \quad \text{dimana} \quad x_1, \ldots, x_n \in K.$$

<u>Bukti</u>
Misalkan vektor $\boldsymbol{v}$ dapat diungkapkan sebagai dua kombinasi linier

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

dan

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n,$$

didapat:

$$(x_1 - a_1)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (x_n - a_n)\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0},$$

karena vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ bebas linier, maka haruslah $x_1 - a_1 = 0, \ldots, x_n - a_n = 0$. Dengan demikian didapat $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Jadi pengungkapan sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V sebagai kombinasi linier

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n, \quad \text{dimana} \quad x_1, \ldots, x_n \in K$$

adalah tunggal.

$\square$

<u>Komentar:</u>
Pernyataan

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + x_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n},$$

dapat ditulis secara tunggal mempunyai arti yang ekivalen dengan sistem persamaan linear tak-homogin

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + x_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}$$

mempunyai jawab tunggal. Misalnya, pada contoh sebelumnya yaitu dalam $\mathbb{R}^2$,

$$B = \{(2,4)^{'}, (1,1)^{'}\}$$

adalah suatu basis dari $\mathbb{R}^2$. Misalkan diberikan sebarang $\boldsymbol{v} = (a,b)^{'} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, maka dengan basis B, vektor $\boldsymbol{v}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear

$$\boldsymbol{v} = x_1(2,4)^{'} + x_2(1,1)^{'}$$

atau dalam bentuk sistem persamaan linear tak-homogin

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Didapat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ 2a - b \end{pmatrix}.$$

Nilai $x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ dan $x_2 = 2a - b$ adalah tunggal. Jadi, untuk sebarang $\boldsymbol{v} = (a,b)' \neq \boldsymbol{0}$ ada dengan tunggal $x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ dan $x_2 = 2a - b$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = x_1(2,4)' + x_2(1,1)'.$$

Berikut ini, diberikan suatu sifat untuk ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas $\mathbb{R}$, yaitu misalkan

$$\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,\ldots,m.$$

Bila $m > n$, maka vektor-vektor $\boldsymbol{v}_i,\ i = 1,2,\ldots,m$ bergantungan linier.

<u>Bukti</u> Untuk setiap $j = 1,2,\ldots,m$, tulis vektor $\boldsymbol{v}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})'$, sehingga persamaan $x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$ dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa, persamaan homogin terdiri dari n persamaan dengan variabel yang takdiketahui sebanyak m. Karena $m > n$, maka persamaan mempunyai suatu solusi yang nontrivial, yaitu ada beberapa $x_k,\ k = 1,2,\ldots,m$ yang tidak semuanya sama dengan nol. Jadi $\boldsymbol{v}_j,\ j = 1,2,\ldots,m$ bergantungan linier.

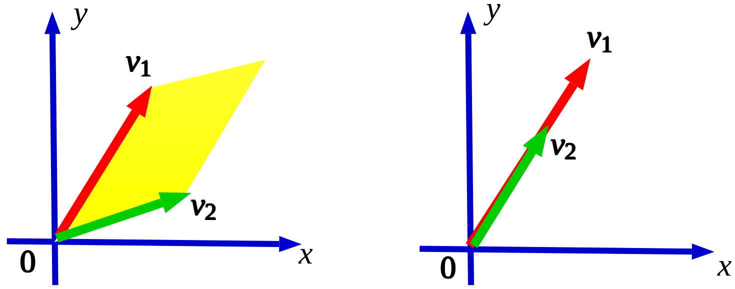
$\square$

<u>Contoh</u>

Dalam ruang vektor $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$, Misalkan $\boldsymbol{v}_1 = (a_{11}, a_{21})', \boldsymbol{v}_2 = (a_{12}, a_{22})' \in \mathbb{R}^2$. Bila vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, bebas linier, maka persamaan: $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ atau dalam bentuk matriks: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mempunyai jawab trivial hanya bila $\det(A) \neq 0$. Secara geometris, hal ini menyatakan bahwa luas daerah jajaran genjang yang dibentuk oleh dua vektor $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ sama dengan $|\det(A)|$. Sebaliknya bila $\det(A) = 0$, maka luas daerah ini sama dengan 0. Hal ini menunjukkan bahwa dua vektor $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ terletak pada satu garis yang sama atau dengan kata lain dua vektor $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ bergantungan linier. Jadi $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ adalah suatu basis dari $\mathbb{R}^2$ dengan dimensi 2. Hal ini dijelaskan dalam gambar berikut.



Sifat. Misalkan V suatu ruang vektor atas K dan $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ suatu basis dari V. Bila vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ dengan $m > n$, maka vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ bergantungan linier.

Bukti

Karena $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ suatu basis dari V, didapat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\ &\vdots \\ \boldsymbol{u}_m &= a_{1m}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nm}\boldsymbol{v}_n, \end{aligned}$$

dengan $a_{ij} \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$. Vektor-vektor $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ bebas linier, untuk $x_1, \ldots, x_m \in K$ didapat:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m \\ &= x_1(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n) + \ldots + x_m(a_{1m}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nm}\boldsymbol{v}_n) \\ &= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m)\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

dan haruslah $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = 0, \ldots, a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = 0$ atau dengan notasi matriks:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan homogin diatas mempunyai jawab non-trivial (sebab $m > n$). Jadi vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ bergantungan linier.

$\square$

Kesimpulan Misalkan V suatu ruang vektor atas K dengan dimensi hingga. Maka setiap dua basis yang berbeda dari V harus mempunyai banyak elemen yang sama.

$\square$

Contoh

1. Dalam ruang vektor $P_3(\mathbb{R})$ atas $\mathbb{R}$, $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ adalah suatu basis baku dari $P_3(\mathbb{R})$. Basis yang lainnya adalah $B_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$.

2. Persamaan homogin $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, diberikan oleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Himpunan penyelesaiannya adalah:

$$\langle\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}\rangle = \left\{ \boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$ dengan dimensi dua.

Sifat
Misalkan V suatu ruang vektor atas K berdimensi hingga. Maka setiap himpunan hingga $S \subset V$ yang terdiri dari vektor-vektor bebas linier di V tetapi S bukan merupakan suatu basis dari V dapat diperluas sampai merupakan suatu basis dari V.

Bukti. Misalkan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ dengan $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, m$ adalah vektor-vektor yang bebas linier. Karena $\langle S \rangle \neq V$, maka pilih vektor $\boldsymbol{v}_{m+1} \in V$ sehingga $\boldsymbol{v}_{m+1}$ bukan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Selanjutnya namakan $T = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}\}$, bila $\langle T \rangle = V$, maka T adalah basis dan sudah tidak bisa lagi diperluas menjadi vektor-vektor yang bebas linier. Bila $\langle T \rangle \neq V$, lakukan lagi cara perluasan seperti sebelumnya sehingga diperoleh himpunan vektor-vektor yang bebas linier di U yang memenuhi $\langle U \rangle = V$.

$\square$

Kesimpulan. Misalkan V ruang vektor atas K berdimensi n, maka setiap himpunan dari n vektor yang bebas linier adalah suatu basis dari V.

$\square$

Contoh
Misalkan
$$S = \{(1,1,1)', (0,-1,0)'\} \subset \mathbb{R}^3,$$
jelas bahwa vektor-vektor di S bebas linier dan
$$\langle S \rangle = \{x(1,1,1)' + y(0,-1,0)' = (x, x-y, x)' \,|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$
jelas bahwa bila
$$(x_1, x_2, x_3)' \in \langle S \rangle,$$
maka $x_3 = x_1$. Oleh karena itu $(x,y,z)' \notin \langle S \rangle$ bila $x \neq z$. Pilih vektor $(1,0,0)$ sehingga didapat $T = \{(1,1,1)', (0,-1,0)', (1,0,0)'\}$ dimana vektor-vektor di T bebas linier, maka dari itu T merupakan suatu basis dari $\mathbb{R}^3$.

Jumlahan Langsung.
Misalkan U dan V adalah ruang bagian dari suatu ruang vektor W atas K dengan dimensi hingga, maka $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$, dimana $U+V = \{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V\}$.

Bukti. Misalkan $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r\}$ suatu basis dari $U \cap V$ perluas basis ini masing-masing menjadi
$$\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$$
adalah suatu basis dari U dan
$$\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$
suatu basis dari V. Terlihat bahwa,
$$\dim(U \cap V) = r, \dim(U) = r+m \text{ dan } \dim(V) = r+n.$$
Selanjutnya, ditunjukkan bahwa
$$\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$
adalah suatu basis dari $U+V$. Sehingga, dalam hal ini didapat
$$\begin{aligned}\dim(U+V) &= r+m+n = (r+m)+(r+n)-r \\ &= \dim(U)+\dim(V)-\dim(U \cap V).\end{aligned}$$

Misalkan sebarang $\boldsymbol{w} \in U+V$, maka $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ untuk beberapa $\boldsymbol{u} \in U$ dan beberapa $\boldsymbol{v} \in V$. Dengan kenyataan bahwa

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + a_r\boldsymbol{z}_r + b_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_m\boldsymbol{u}_m$$

untuk beberapa skalar a_i, b_j dan

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c_r\boldsymbol{z}_r + d_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + d_m\boldsymbol{v}_n$$

untuk beberapa skalar c_k, d_l, didapat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \\ &= (a_1+c_1)\boldsymbol{z}_1 + \ldots + (a_r+c_r)\boldsymbol{z}_r + b_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_m\boldsymbol{u}_m + d_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + d_m\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

terlihat bahwa

$$\boldsymbol{w} \in \langle\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle .$$

Maka dari itu didapat

$$\langle\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle = U+V.$$

Diberikan

$$x_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + x_r\boldsymbol{z}_r + x_{r+1}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_{r+m}\boldsymbol{u}_m + x_{r+m+1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_{r+m+n}\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

untuk beberapa skalar x_j. Tulis

$$\boldsymbol{w} = x_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + x_r\boldsymbol{z}_r + x_{r+1}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_{r+m}\boldsymbol{u}_m,$$

didapat

$$\boldsymbol{w} = -x_{r+m+1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots - x_{r+m+n}\boldsymbol{v}_n.$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{w} \in U$ dan $\boldsymbol{w} \in V$, jadi $\boldsymbol{w} \in U \cap V$. Tetapi $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r\}$ adalah suatu basis dari $U \cap V$, jadi

$$\boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + b_r\boldsymbol{z}_r$$

untuk beberapa skalar b_i. Sehingga didapat

$$b_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + b_r\boldsymbol{z}_r = -x_{r+m+1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots - x_{r+m+n}\boldsymbol{v}_n$$

atau

$$b_1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + b_r\boldsymbol{z}_r + x_{r+m+1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_{r+m+n}\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}.$$

Tetapi
$$\{\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_r,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$$
adalah suatu basis dari V, maka dari itu haruslah
$$b_1=\ldots=b_r=x_{r+m+1}=\ldots=x_{r+m+n}=0,$$
sehingga persamaan
$$x_1\boldsymbol{z}_1+\ldots+x_r\boldsymbol{z}_r+x_{r+1}\boldsymbol{u}_1+\ldots+x_{r+m}\boldsymbol{u}_m+x_{r+m+1}\boldsymbol{v}_1+\ldots+x_{r+m+n}\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$
menjadi
$$x_1\boldsymbol{z}_1+\ldots+x_r\boldsymbol{z}_r+x_{r+1}\boldsymbol{u}_1+\ldots+x_{r+m}\boldsymbol{u}_m=\mathbf{0}.$$
Tetapi
$$\{\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_r,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m\}$$
juga adalah suatu basis dari U. Jadi haruslah
$$x_1=\ldots=x_r=x_{r+1}=\ldots=x_{r+m}=0.$$
Sehingga didapat
$$x_k=0,\ k=1,2,\ldots,r+m+n.$$
Jadi vektor-vektor
$$\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_r,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$$
bebas linier.

□

<u>Contoh</u>
Misalkan
$$W=\mathbb{R}^4,\boldsymbol{u}_1=(1,1,0,0)',\boldsymbol{u}_2=(-3,7,2,1)',U=\langle\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}\rangle$$
dan
$$V=\{(x_1,x_2,x_3,0)'\,|\,x_i\in\mathbb{R}\}.$$
Vektor-vektor
$$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$$

bebas linier, sebab bila

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}$$

atau

$$a_1(1,1,0,0)' + a_2(-3,7,2,1)' = \mathbf{0}$$

didapat $a_1 = a_2 = 0$. Jadi $\dim(U) = 2$. Suatu basis dari V adalah

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)', \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)', \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)'.$$

Jadi $\dim(V) = 3$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_4 &= (0,0,0,1)' = (-3,7,2,1)' + 3(1,0,0,0)' - 7(0,1,0,0)' - 2(0,0,1,0)' \\ &= \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Jadi $\boldsymbol{e}_4 \in U+V$. Karena

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$$

juga di $U+V$, maka

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$$

adalah suatu basis dari $U+V$. Jadi $\dim(U+V) = 4$. Sehingga didapat:

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) = 2+3-4 = 1.$$

Bisa diselidiki secara langsung bahwa vektor-vektor di $U \cap V$ adalah vektor-vektor di U dengan komponen ke-empat sama dengan nol, yaitu vektor

$$b_1\boldsymbol{u}_1 + b_2\boldsymbol{u}_2 = (b_1 - 3b_2, b_1 + 7b_2, 2b_2, b_2)'$$

dengan $b_2 = 0$. Jadi

$$U \cap V = \langle \{\boldsymbol{u}_1\} \rangle.$$

Terlihat bahwa $\dim(U \cap V) = 1$.

<u>Catatan</u>. Bila U, V ruang bagian berdimensi hingga masing-masing dengan basis $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ dan $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$. Misalkan $W = U+V$ dan sebarang $\boldsymbol{w} \in W$. Didapat

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_m\boldsymbol{u}_m + b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

atau

$$W = \langle \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \rangle.$$

Selanjutnya reduksi vektor-vektor

$$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$$

menjadi vektor-vektor yang bebas linier (sampai minimal) dan himpun kedalam himpunan S, sehingga didapat $W=\langle\{S\}\rangle$. Jadi dimensi dari W sama dengan banyaknya vektor-vektor di S.

Bila U dan V adalah ruang bagian berdimensi hingga dengan $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$, maka $U+V$ dinamakan *jumlahan langsung* dari U dan V.

Contoh.
Himpunan

$$U=\{(x_1,x_2,0)'\,|\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$$

dan

$$V=\{(0,0,x_3)'\,|\,x_3\in\mathbb{R}\}$$

adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$ atas $\mathbb{R}$ dengan $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$. Jadi $U+V$ adalah jumlahan langsung dari U dan V, sedangkan

$$\begin{aligned} U+V &= \{(x_1,x_2,0)'+(0,0,x_3)'=(x_1,x_2,x_3)'\,|\,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,0)'+x_2(0,1,0)'+x_3(0,0,1)'\,|\,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

terlihat bahwa $\dim(U+V)=3$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1,x_2,0)'\,|\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,0)'+x_2(0,1,0)'\,|\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\} \\ &= \left\langle\{(1,0,0)',(0,1,0)'\}\right\rangle, \end{aligned}$$

terlihat bahwa $\dim(U)=2$. Juga,

$$\begin{aligned} V &= \{(0,0,x_3)'\,|\,x_3\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(0,0,1)'\,|\,x_3\in\mathbb{R}\} \\ &= \left\langle\{(0,0,1)'\}\right\rangle \end{aligned}$$

dan $\dim(V)=1$. Makna $U+V$ merupakan jumlahan langsung dari U dan V tampak dari dimensi, yaitu

$$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)=2+1-0=3=\dim(U)+\dim(V)$$

Hal ini juga bisa dilihat dari pengertian basis yaitu, himpunan $\{(1,0,0)',(0,1,0)'\}$ adalah suatu basis dari U dan himpunan $\{(0,0,1)'\}$ adalah suatu basis dari V sedangkan himpunan $\{(1,0,0)',(0,1,0)',(0,0,1)'\}$ sudah bebas linier (tidak bisa lagi direduksi lagi sehingga bebas linier). Jadi, dari sini juga langsung didapat bahwa $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V)$.

Kesimpulan. Dimensi dari suatu ruang jumlahan langsung sama dengan jumlah dari masing-masing dimensi ruang.

$\square$

Berikut ini diberikan suatu sifat yang lain dari ruang jumlahan langsung. Setiap $\boldsymbol{w} \in W = U+V$ dengan $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ mempunyai penulisan tunggal $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V$.

Bukti
Misalkan

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{v}},$$

maka

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}}.$$

Tetapi

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}} \in U,$$

$$\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}} \in V$$

dan $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Maka haruslah

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$$

dan

$$\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}} = \mathbf{0}$$

atau

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}$$

dan

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}}.$$

Koordinat. Misalkan

$$\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$$

adalah suatu basis dari suatu ruang vektor atas K. Jadi setiap $\boldsymbol{v}\in V$ dapat ditulis secara tunggal oleh

$$\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{v}_n$$

untuk beberapa skalar $x_1,\ldots,x_n\in K$. Dalam hal ini skalar-skalar $x_1,\ldots,x_n$ dinamakan *koordinat* dari vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$.

Contoh.
Misalkan $V=\mathbb{R}^3$ dengan basis baku $\{\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)',\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)',\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)'\}$ dan misalkan sebarang $\boldsymbol{v}=(x,y,z)'\in V$, maka $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$. Jadi koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ adalah skalar x,y dan z. Tetapi untuk basis yang lain dari V, misalkan

$$\{\boldsymbol{v}_1=(0,1,1)',\boldsymbol{v}_2=(1,0,1)',\boldsymbol{v}_3=(1,1,0)'\},$$

maka

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)\boldsymbol{v}_1+\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\boldsymbol{v}_2+\left(\frac{x+y-z}{2}\right)\boldsymbol{v}_3.$$

Koordinat dari vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis

$$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$$

adalah skalar

$$\frac{-x+y+z}{2},\ \frac{x-y+z}{2}\ \text{dan}\ \frac{x+y-z}{2}.$$

Terlihat bahwa vektor $\boldsymbol{v}$ terhadap dua basis yang berbeda dari ruang vektor V mempunyai dua koordinat yang berbeda pula.

Basis terurut.
Adalah perlu dijamin bahwa suatu vektor dikaitkan dengan suatu vektor basis yang sesuai, cara baku untuk melakukan hal ini adalah menggunakan penyajian *terurut* untuk koordinat dan vektor basis. Bila urutan dari vektor-vektor dalam suatu basis dipersoalkan dalam hal ini dinamakan *basis terurut* dan basis ini

ditulis sebagai suatu *barisan*. Bila urutan dari vektor basis takdipersoalkan, basis tersebut ditulis sebagai suatu himpunan, dalam hal ini penekanan mengenai diskusi dari suatu vektor basis, urutan tidak bergantung pada urutan. Tetapi, bila koordinat dari suatu vektor disajikan sebagai baris atau kolom dalam suatu matriks, maka secara esensi penyajian bergantung pada urutan vektor-vektor basis. Begitu juga, bila suatu pemetaan linier disajikan sebagai suatu matriks, maka sangatlah penting menggunakan vektor basis terurut. Dikaji ulang penulisan koordinat dari suatu vektor relatif terhadap basis terurut. Diberikan basis terurut $B = \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ dari suatu ruang vektor V atas suatu lapangan K. Misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V, maka dapat dipilih dengan tunggal skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}.$$

Dalam hal ini skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dinamakan ***koordinat*** dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis terurut B dan ditulis

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \in K^n$$

sebagai vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis terurut B.

Contoh 1

Misalkan $V = \mathbb{R}^2$ dan B adalah basis terurut

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dapatkan koordinat dari vektor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis B. Penyelesaiannya sebagai berikut. Koordinat k_1 dan k_2 didapat melalui menuliskan $\boldsymbol{v}$ sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di B, yaitu menyelesaikan sistem persamaan linier takhomogin

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaiannya adalah $k_1 = 3$ dan $k_2 = 2$. Dengan demikian didapat vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B adalah

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

<u>Contoh 2</u>

Misalkan $V = P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ dan B adalah basis terurut

$$B = 1, x-1, (x-1)^2.$$

Dapatkan koordinat $\boldsymbol{v} = p(x) = 2x^2 - 2x + 1$ relatif terhadap basis B. Persoalan ini dijawab sebagai berikut. Kita harus mendapatkan k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi

$$k_1(1) + k_2(x-1) + k_3(x-1)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Dengan melakukan penghitungan bagian kiri persamaan didapat

$$k_3x^2 + (k_2 - 2k_3)x + (k_1 - k_2 + k_3) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Dengan menyamakan koefisien kedua ruas persamaan didapat sistem persamaan linier

$$\left\{ \begin{array}{rcr} k_1 - k_2 + k_3 & = & 1 \\ k_2 - 2k_3 & = & -2 \\ k_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Didapat penyelesaian tunggal $k_1 = 1, k_2 = 2$ dan $k_3 = 2$, jadi

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Contoh 3</u>

Diberikan ruang bagian W himpunan dari semua matriks simetri dalam ruang vektor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Misalkan B adalah vektor-vektor terurut

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tunjukkan bahwa B adalah suatu basis untuk W dan dapatkan koordinat dari

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

relatif terhadap basis B. Untuk menjawab persoalan ini pertama ditunjukkan bahwa B membangun W. Sebarang matriks simetri A di W adalah

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

didapat

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A$$

Terlihat bahwa sebarang A di W juga di $\langle B \rangle$. Jadi $\langle B \rangle = W$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa B adalah bebas linier di W sebagai berikut. Tinjau persamaan homogin berikut

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

didapat

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan terakhir didapat $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Jadi B adalah bebas linier. Dengan demikian B adalah basis terurut di W. Perhatikan matriks $\boldsymbol{v}$ terhadap basis terurut B dapat ditulis sebagai kombinasi linier:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap B adalah

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5.7 Perubahan Basis

Banyak masalah dalam matematika terapan menjadi lebih mudah melalui perubahan suatu basis dari suatu ruang vektor ke basis yang lainnya. Sebagai ilustrasi yang sederhana ditinjau suatu ruang vektor V berdimensi dua atas suatu skalar K. Diberikan ruang vektor V berdimensi dua atas suatu lapangan K dan misalkan

$$B = \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \text{ dan } B' = \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$$

adalah dua basis terurut dari V. Misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V terhadap basis B vektor koordinatnya adalah

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ yaitu } \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + x_2\boldsymbol{v_2}.$$

Untuk menentukan vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B'. Tulis $\boldsymbol{v_1}$ dan $\boldsymbol{v_2}$ dalam suku-suku $\boldsymbol{u_1}$ dan $\boldsymbol{u_2}$. Karena B' adalah suatu basis dari V, maka dapat diplih skalar a_1, a_2, b_1 dan b_2 di K yang memenuhi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_1} &= a_1\boldsymbol{u_1} + a_2\boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{v_2} &= b_1\boldsymbol{u_1} + b_2\boldsymbol{u_2}. \end{aligned}$$

Maka $\boldsymbol{v}$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{v} = x_1(a_1\boldsymbol{u_1} + a_2\boldsymbol{u_2}) + x_2(b_1\boldsymbol{u_1} + b_2\boldsymbol{u_2}).$$

Kumpulkan koefisien dari $\boldsymbol{u_1}$ dan $\boldsymbol{u_2}$ didapat

$$\boldsymbol{v} = (x_1a_1 + x_2b_1)\boldsymbol{u_1} + (x_1a_2 + x_2b_2)\boldsymbol{u_2}.$$

Jadi vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B' adalah

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1a_1 + x_2b_1 \\ x_1a_2 + x_2b_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan menulis ulang bagian kanan sebagai perkalian matriks didapat

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{v}]_B.$$

Perhatikan bahwa kolom dari matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor $[\boldsymbol{v_1}]_B$ dan $[\boldsymbol{v_2}]_B$. Dalam hal yang demikian matriks tersebut dinamakan ***matriks transisi*** dari B ke B' dan dinotasikan oleh $[I]_B^{B'}$. Jadi

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = [I]_B^{B'}[\boldsymbol{v}]_B.$$

Contoh 1

Diberikan $V = \mathbb{R}^2$ dengan basis terurut

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a. Dapatkan matriks transsisi dari B ke B'.

b. Misalkan $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, maka dapatkan $[\boldsymbol{v}]_{B'}$.

Jawab

a. Dinotasikan vektor di B dengan $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ dan di B' dengan $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$. Maka vektor kolom matriks transisi adalah $[\boldsymbol{v_1}]_B$ dan $[\boldsymbol{v_2}]_B$. Koordinat dari vektor tersebut didapat dari menyelesaikan persamaan

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad d_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

yaitu $c_1 = 2, c_2 = 3$ dan $d_1 = 0, d_2 = -1$. Jadi matriks transisi adalah

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b. Karena

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = [I]_B^{B'}[\boldsymbol{v}]_B,$$

maka

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa vektor yang sama relatif terhadap basis yang berbeda adalah diperoleh dari vektor koordinat $[\boldsymbol{v}]_B$ dan $[\boldsymbol{v}]_{B'}$. Yaitu

$$3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

Prosedur untuk mendapatkan matriks transisi diantara dua basis dari suatu ruang vektor V berdimensi dua atas suatu skalar K dapat digeneralisasi ke ruang vektor $\mathbb{R}^n$ atas $\mathbb{R}$. Hal ini dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi n atas suatu lapangan K dengan basis terurut

$$B=\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_n} \quad \text{dan} \quad B'=\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\ldots,\boldsymbol{u_n}.$$

Maka matriks transisi dari B ke B' diberikan oleh

$$[I]_B^{B'}=\left[\begin{bmatrix}\\ \boldsymbol{v_1}\\ \\ \end{bmatrix}_{B'}\ \begin{bmatrix}\\ \boldsymbol{v_2}\\ \\ \end{bmatrix}_{B'}\ \cdots\ \begin{bmatrix}\\ \boldsymbol{v_n}\\ \\ \end{bmatrix}_{B'}\ .\right]$$

Lagipula, vektor perubahan koordinat diberikan oleh

$$[\boldsymbol{v}]_{B'}=[I]_B^{B'}[\boldsymbol{v}]_B.$$

□

<u>Contoh 2</u>

Misalkan ruang vektor $V=P_2(x)$ dengan basis terurut

$$B=1,x,x^2 \quad \text{dan} \quad B'=1,1+x,1+x+x^2.$$

a. Dapatkan matriks transisi $[i]_B^{B'}$.

b. Misalkan $p(x)=3-x+2x^2\in P_2(x)$, maka dapatkan $[p(x)]_{B'}$.

<u>Jawab</u>

a. Untuk memperoleh vektor kolom yang pertama dari matriks transisi harus dipilih skalar a_1,a_2 dan a_3 yang memenuhi

$$a_1(1)+a_2(1+x)+a_3(1+x+x^2)=1,$$

didapat $a_1 = 1, a_2 = 0$ dan $a_3 = 0$. Jadi

$$[1]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor kolom kedua dan ketiga dari matriks transisi masing-masing diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$b_1(1) + b_2(1+x) + b_3(1+x+x^2) = x$$

dan

$$c_1(1) + c_2(1+x) + c_3(1+x+x^2) = x^2.$$

Penyelesaiannya diberikan oleh $b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = 0$ dan $c_1 = 0, c_2 - 1, c_3 = 1$. Jadi matriks transisi adalah

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Basis B adalah basis terurut baku, maka vektor koordinat dari $p(x) = 3 - x + 2x^2$ relatif terhadap B adalah

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$[p(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $3 - x + 2x^2 = 4(1) - 3(1+x) + 2(1+x+x^2)$.

Contoh 3

Diberikan basis baku terurut $B = \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ untuk ruang vektor $\mathbb{R}^2$ atas $\mathbb{R}$, sedangkan basis terurut B' diberikan oleh

$$B' = \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan misalkan $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
a. Dapatkan matriks transisi dari B ke B'.
b. Dapatkan $[\boldsymbol{v}]_{B'}$.
c. Tulis vektor $\boldsymbol{v}$ sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{e_1}$ dan $\boldsymbol{e_2}$ dan juga sebagai kombinasi linier dari $\boldsymbol{u_1}$ dan $\boldsymbol{u_2}$.
d. Tunjukkan hasil dari bagian (c) secara grafik.

Jawab

a. Matriks transisi dari B ke B' dihitung dengan menyelesaikan peersamaan

$$c_1\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad d_1\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian tunggal persamaan tersebut adalah $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$ dan $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{2}$. Dengan demikian matriks transisi diberikan oleh

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

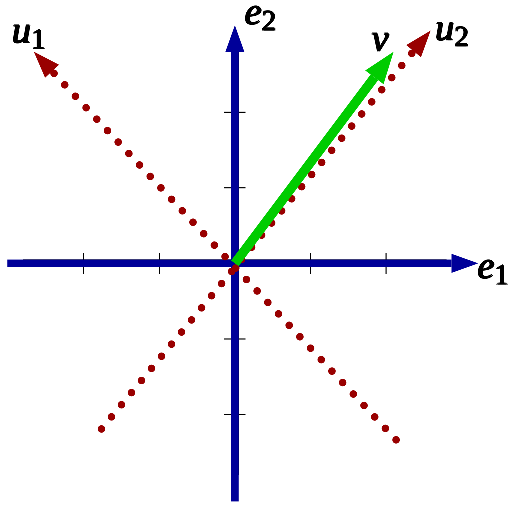
b. Karena B adalah basis baku, maka vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap B adalah $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Jadi vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B' adalah

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

c. Dengan menggunakan koordinat dari $\boldsymbol{v}$ terhadap dua basis B dan B', didapat

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d. Gambar berikut menunjukkan bahwa lokasi titik akhir $(3,4)$ dari vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap sumbu $\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}$ dan sumbu $\boldsymbol{u_1}\boldsymbol{u_2}$.



Invers dari suatu Matriks Transisi

Fakta yang akan bermanfaat bahwa matriks transisi diantara basis terurut B dan B' dari suatu ruamg vektor berdimensi hingga atas suatu lapangan K adalah mempunyai invers. Lagi pula, matriks transisi dari B' ke B adalah invers dari matriks $[I]_B^{B'}$. Untuk menyelidiki fakta ini misalkan ruang vektor V berdimensi n atas suatu lapangan K dengan basis terurut

$$B = \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \quad \text{dan} \quad B' = \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}.$$

Untuk menunjukkan bahwa $[I]_B^{B'}$ mempunyai invers, misalkan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ memenuhi

$$[I]_B^{B'}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Perhatikan bahwa bagian kiri persamaan dalam bentuk vektor adalah

$$x_1[\boldsymbol{v_1}]_{B'} + \cdots + x_n[\boldsymbol{v_n}]_{B'}.$$

Karena B adalah basis, maka vektor $\boldsymbol{v_i}$ untuk $1 \leq i \leq n$ adalah bebas linier. Juga dengan begitu vektor-vektor $[\boldsymbol{v_1}]_{B'}, \ldots, [\boldsymbol{v_n}]_{B'}$ adalah bebas linier. Jadi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Karena penyelesaian persamaan homogin $[I]_B^{B'}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hanyalah mempunyai penyelesaian trivial, maka matriks $[I]_B^{B'}$ mempunyai invers. Lagi pula, karena

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = [I]_B^{B'}[\boldsymbol{v}]_B \quad \text{dan bahwa} \quad \left([I]_B^{B'}\right)^{-1}[\boldsymbol{v}]_{B'} = [\boldsymbol{v}]_{B'},$$

maka

$$[I]_{B'}^{B} = \left([I]_B^{B'}\right)^{-1}.$$

Apa yang telah dibahas ini diringkas dalam sifat berikut.

Sifat
Misalkan V suatu ruang vektor berdimensi n atas suatu lapangan K dengan basis terurut

$$B = \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \quad \text{dan} \quad B' = \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}.$$

Maka matriks transisi $[I]_B^{B'}$ mempunyai invers dan

$$[I]_{B'}^{B} = \left([I]_B^{B'}\right)^{-1}.$$

□

5.8 Ruang Bagian Fundamental

Diisini dibahas ruang bagian fundamental dari suatu matriks yang mencakup ruang null, Range, ruang baris dan ruang.

5.9 Ruang Hasil Kali Dalam

disini dibahas suatu ruang vektor khusus dan diberikan pengertian hasil kali dalam.

5.10 Basis Orthonormal

disini dikembangkan dan digunakan proses Gram-Schmidt untuk mengkonstruksi suatu basis orthogonal/orthonormal dari suatu ruang hasil kali dalam.

5.11 Kuadrat Terkecil (Least Square)

disini diberikan suatu aplikasi dari beberapa ide yang akan dibahas.

5.12 Dekomposisi *QR*

disini dibahas dekomposisi *QR* dari suatu matriks dan bagaimana dekomposisi ini digunakan dalam proses kuadrat terkecil.

5.13 Matriks Orthogonal

disini dibahas pengertian matriks orthogonal.

5.14 General Invers

disisni dibahas general invers dari suatu matriks.

Bab 6

Nilai-Karakteristik dan Vektor-Karakteristik

6.1 Sekilas Mengenai Determinan

disini secara ringkas diulang lagi determinan.

6.2 Nilai-Karakteristik dan Vektor-Karakteristik

disini dibahas konsep dari nilai karakteristik dan vektor karakteristik.

6.3 Eksistensi Nilai-Karakteristik dan Vektor-Karakteristik

disini dibahas eksistensi dari suatu nilai karakteristik dan vektor karakteristik.

6.4 Sifat-sifat Nilai-Karakteristik dan Vektor-Karakteristik

disini dibahas beberapa sifat nilai karakteristik dan vektor karakteristik.

6.5 Kesimilaran dan Pendiagonalan

disini dibahas kesimilaran pendiagonalan matriks.

Bab 7

Transformasi Linear

Bila V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K, maka suatu ***pemetaan*** T dari V ke W adalah suatu fungsi mengaitkan setiap vektor $\boldsymbol{v} \in V$ dengan tunggal kesuatu vektor $\boldsymbol{w} \in W$. Dalam hal ini dikatakan T memetakan V kedalam W dan ditulis $T : V \to W$. Untuk masing-masing $\boldsymbol{v} \in V$, maka vektor $\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v})$ di W adalah ***image*** dari $\boldsymbol{v}$ oleh pemetaan T.

Contoh 1.
Didefinisikan suatu pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

a. Dapatkan image dari vektor koordinat $\boldsymbol{e_1}$ dan $\boldsymbol{e_2}$ oleh pemetaan T.

b. Berikan suatu uraian dari semua vektor di $\mathbb{R}^2$ yang dipetakan ke vektor nol.

c. Tunjukkan bahwa T memenuhi

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad \text{(mempertahankan penjumlahan ruang vektor)}$$

dan

$$T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v}) \qquad \text{(mempertahankan perkalian skalar),}$$

untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$ dan semua skalar $k \in \mathbb{R}$.

Jawab.

a. Karena $\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, maka didapat

$$T(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix}1+0\\1-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad T(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix}0+1\\0-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

b. Untuk menjawab bagian ini, diselesaikan persamaan

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\x-y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk sistem persamaan linier

$$\begin{cases} x+y &= 0\\ x-y &= 0\end{cases}$$

Didapat penyelesaian tunggal $x = 0, y = 0$. Jadi hanya satu vektor di $\mathbb{R}^2$ (domain) yaitu $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ yang dipetakan oleh T ke $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

c. Untuk menunjukkan bahwa T mempertahankan jumlahan ruang vektor, misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}.$$

Maka

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)\\
&= T\left(\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\\(u_1+v_1)-(u_2+v_2)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v_1+v_2\\v_1-v_2\end{bmatrix}\\
&= T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)\\
&= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

Juga didapat untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} T(k\boldsymbol{u}) &= T\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} ku_1 + ku_2 \\ ku_1 - ku_2 \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} \\ &= kT(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Contoh yang baru saja dibahas adalah suatu pemetaan T dari ruang vektor V ke ruang vektor W atas suatu lapangan K yang memenuhi dua sifat

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad \text{dan} \qquad T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u}),$$

untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ di V dan semua k di K. Dua sifat ini digabung menjadi satu, maka diperoleh pengertian berikut.

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K. Pemetaan $T : V \to W$ dinamakan suatu **transformasi linier** bila dan hanya bila

$$T(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}),$$

untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ di V dan semua k di K. Dalam hal $V = W$, maka T dinamakan **operator linier**.

Contoh 2
Diberikan matriks A berukuran $m \times n$. Didefinisikan pemetaan $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oleh

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

a. Tunjukkan bahwa T adalah suatu transformasi linier.

b. Misalkan A adalah matriks 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dapatkan bayangan dari

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \begin{bmatrix}7\\-1\\5\end{bmatrix}$$

oleh pemetaan $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dimana $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Jawab

a. Untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dan semua skalar k di $\mathbb{R}$ berlaku

$$A(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = kA\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}.$$

Jadi

$$T(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = kA\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = kT(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}).$$

b. Karena T didefinisikan oleh perkalian matriks, maka didapat

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

dan

$$T\left(\begin{bmatrix}7\\-1\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Contoh 3

Diberikan suatu transformasi linier $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

a. Diskusikan tindakan dari T pada suatu vektor di $\mathbb{R}^3$ dan berikan suatu intepretasi geometri dari persamaan

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

b. Dapatkan image dari himpunan

$$S_1 = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, k \in \mathbb{R} \right\}$$

c. Dapatkan image dari himpunan

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

d. Uraikan himpunan

$$S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

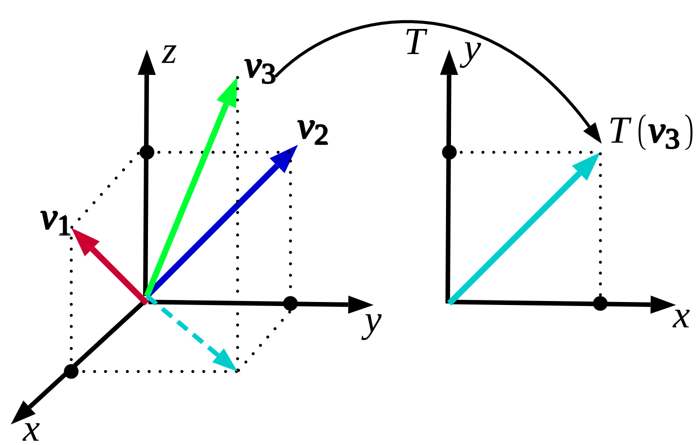
dan dapatkan imagenya.

Jawab

a. Transformasi linier T adalah ***proyeksi*** dari suatu vektor dalam ruang $\mathbb{R}^3$ ke imagenya dalam bidang-xy. Misalkan

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Image dari vektor $\boldsymbol{v_3}$ diberikan oleh gambar berikut.



b. Himpunan S_1 adalah suatu bidang dalam ruang R^3 dengan vektor arah $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

Dengan definisi dari T didapat

$$T(S_1) = \left\{ k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\}$$

adalah suatu garis dalam bidang $\mathbb{R}^2$ melalui titik asal dengan gradien sama dengan 2.

c. Himpunan S_2 adalah suatu bidang dalam ruang $\mathbb{R}^3$ diatas 3 satuan sejajar dengan bidang-xy. Dalam hal ini

$$T(S_2) = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jadi image dari S_2 adalah seluruh bidang-xy hal ini sesuai uraian T sebagai suatu proyeksi sebagai mana yang diharapkan.

d. Himpunan S_3 adalah bidang-xz dalam ruang $\mathbb{R}^3$. Dalam hal ini didapat

$$T(S_3) = \left\{ \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

yang merukan sumbu-x. Lagi, hal ini sesuai uraian T sebagai suatu proyeksi sebagai mana yang diharapkan.

Contoh berikut digunakan turunan dari suatu fungsi untuk mendefinisikan suatu transformasi linier diantara ruang vektor dari polinomial.

Contoh 4

Didefinisikan suatu pemetaan $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ oleh

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \forall p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

a. Tunjukkan bahwa T adalah suatu transformasi linier

b. Dapatkan image dari polinomial $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$.

c. Uraikan polinomial dalam $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ yang dipetakan ke vektor nol di $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Jawab
Perhatikan bahwa sebarang $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ mempunyai bentuk

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

jadi

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Karena $\frac{dp(x)}{dx}$ di $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, maka T adalah suatu pemetaan dari $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ke $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

a. Untuk menunjukkan bahwa T adalah suatu pemetaan linier, misalkan sebarang $p(x)$ dan $q(x)$ di $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dan sebarang $k \in \mathbb{R}$, Didapat

$$\begin{aligned} T(kp(x)+q(x)) &= \frac{d}{dx}(kp(x)+q(x)) \\ &= \frac{d}{dx}(kp(x)) + \frac{d}{dx}(q(x)) \\ &= k\frac{dp(x)}{dx} + \frac{dq(x)}{dx} \\ &= kT(p(x)) + T(q(x)). \end{aligned}$$

Jadi pemetaan T adalah suatu pemetaan linier.

b. Image dari polinomial $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ adalah

$$T(p(x)) = \frac{d}{dx}(3x^3 + 2x^2 - x + 2) = 9x^2 + 4x - 1.$$

c. Polinomial di $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ yang mempunyai derivatif sama dengan nol adalah polinomial konstan $p(x) = k$, dimana $k \in \mathbb{R}$.

Proposisi 1
Misalkan suatu transformormasi linier $T : V \to W$, maka $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Bukti
Karena T adalah transformasi linier didapat

$$T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + T(\mathbf{0}_V).$$

Kedua ruas persamaan tambahkan dengan $-T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}})$ didapat

$$\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} = -T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) + T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) = (-T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) + T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}})) + T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}) = T(\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}).$$

Contoh 5
Didefinisikan suatu pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^x \\ e^y \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Tentukan apakah T suatu pemetaan linier.

Jawab
Karena

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^0 \\ e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka dengan menggunakan Proposisi 1 pemetaan T bukan suatu transformasi linier.

Contoh 6
Didefinisikan suatu pemetaan $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}$ oleh

$$T(A) = A^t,\ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

dimana tanda ^{t} adalah transpose. Tunjukkan bahwa T adalah suatu pemetaan linier.

Jawab
Sebagai mana diketahui untuk setiap $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, maka $(A+B)^t = A^t + B^t$. Dengan demikian didapat

$$T(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B).$$

Juga

$$T(kA) = (kA)^t = kA^t = kT(A), \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{dan} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Jadi T adalah suatu transformasi linier.

Contoh 7
Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas suatu lapangan K dengan $\dim(V) = n$ dan

$$B = \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$$

adalah suatu basis terurut untuk V. Misalkan $T : V \to K^n$ adalah pemetaan yang memetakan suatu vektor $\boldsymbol{v}$ di V ke vektor koordinatnya di K^n relatif terhadap basis B. Yaitu

$$T(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B.$$

Pemetaan ini terdefinisi dengan baik sebab vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B adalah tunggal. Tunjukkan bahwa pemetaan T adalah suatu pemetaan linier.

Jawab
Misalkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ sebarang vektor di V dan sebarang $k \in K$. Karena B adalah suatu basis terurut, maka dapat dipilih dengan tunggal skalar $c_1, \ldots, c_n$ dan $d_1, \ldots, d_n$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + c_n\boldsymbol{v_n} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{v_1} + \ldots + d_n\boldsymbol{v_n}.$$

Gunakan T pada vektor $k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ didapat

$$\begin{aligned}
T(k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= T((kc_1 + d_1)\boldsymbol{v_1} + \ldots + (kc_n + d_n)\boldsymbol{v_1}) \\
&= \begin{bmatrix} kc_1 + d_2 \\ kc_2 + d_2 \\ \vdots \\ kc_n + d_n \end{bmatrix} \\
&= k \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \\
&= kT(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa pemetaan T adalah suatu transformasi linier.

Sebagaimana telah disebutkan bila $T : V \to W$ adalah suatu pemetaan linier, maka struktur dari V dipertahankan ketika dipetakan ke W. Secara khusus, image dari suatu kombinasi kombinasi linier dari vektor-vektor terhadap pemetaan linier ini sama dengan kombinasi linier dari vektor-vektor imagenya dengan koefisien yang sama. Untuk menunjukkan hal ini, misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linier. Maka dengan pengulangan definisi transformasi linier, didapat

$$\begin{aligned} T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}) &= T(c_1\boldsymbol{v_1}) + T(c_2\boldsymbol{v_2}) + \cdots + T(c_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= c_1T(\boldsymbol{v_1}) + c_2T(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v_n}). \end{aligned}$$

Fakta bahwa suatu transformasi linier T diantara ruang vektor V dengan ruang vektor W atas suatu lapangan K mempertahankan kombinasi linier adalah suatu yang berguna dalam perhitungan ketika T bertindak pada vektor-vektor dari suatu basis dari V diketahui. Hal ini dijelaskan dalam contoh berikut.

Contoh 8

Diberikan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ adalah suatu transformasi linier dan misalkan B adalah suatu basis terurut baku untuk $\mathbb{R}3$. Bila

$$T(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad T(\boldsymbol{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka dapatkan $T(\boldsymbol{v})$ bila

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jawab

Untuk mendapatkan image dari vektor $\boldsymbol{v}$ tulis vektor tersebut sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor basis terurut B, didapat

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}.$$

Gunakan T pada kombinasi linier tersebut dan gunakan sifat kelinieran dari T, didapat

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}) \\ &= T(\boldsymbol{e_1}) + 3T(\boldsymbol{e_2}) + 2T(\boldsymbol{v_3}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Contoh 9

Misalkan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah suatu operator linier dan B adalah suatu basis terurut untuk $\mathbb{R}^3$ diberikan oleh

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bila

$$T = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad T = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

maka dapatkan

$$T = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

Jawab

Karena B adalah suatu basisuntuk $\mathbb{R}^3$, pilih skalar k_1, k_2 dan k_3 yang memenuhi persamaan

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Selesaikan persamaan ini, didapat $k_1 = -1, k_2 = 1$ dan $k_3 = 2$. Jadi

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = T\left(-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Dengan menggunakan kelinieran dari T didapat

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}\right) &= -1T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)+2T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)\\ &= -\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Operasi dengan Transformasi Linier

Transformasi linier dapat dikombinasikan dengan menggunakan tambah biasa dan perkalian skalar untuk menghasilkan transformasi linier baru. Misalkan $S,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh

$$S\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\-x\end{bmatrix}\qquad \text{dan}\qquad T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x-y\\x+3y\end{bmatrix}.$$

Kemudian didefinisikan

$$(S+T)(\boldsymbol{v})\overset{\text{def}}{=}S(\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{v})\qquad \text{dan}\qquad (kT)(\boldsymbol{v})\overset{\text{def}}{=}k(T(\boldsymbol{v})),\ \ \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2,k\in\mathbb{R}.$$

Untuk mengilustrasikan definisi ini, misalkan $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, maka

$$(S+T)(\boldsymbol{v})=S(\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}2+(-1)\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2(2)-(-1)\\2+3(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}.$$

Untuk perkalian dengan skalar, misalkan $k=3$. Maka didapat

$$(3T)(\boldsymbol{v})=3T(\boldsymbol{v})=3\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\-3\end{bmatrix}.$$

Dalam teorema berikut ditunjukkan bahwa operasi-operasi yang telah dibahas menghasilkan transformasi linier.

Teorema 7.0.1 Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu skalar K dan $S,T : V \to W$ adalah transformasi linier. Pemetaan $S+T$ yang didefinisikan oleh

$$(S+T)(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} S(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$$

adalah suatu transformasi linier dari V ke W. Bila c adalah sebarang skalar di K, maka pemetaan cT didefinisikan oleh

$$(cT)(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} cT(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \ V$$

adalah transformasi linier dari V ke W.

Bukti Misalkan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ dan sebarang skalar $k \in K$. Maka

$$\begin{aligned}
(S+T)(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= S(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + T(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \\
&= S(k\boldsymbol{u}) + S(\boldsymbol{v}) + T(k\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \\
&= kS(\boldsymbol{u}) + S(\boldsymbol{v}) + kT(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \\
&= k(S(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u})) + S(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{v}) \\
&= k(S+T)(\boldsymbol{u}) + (S+T)(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $S+T$ adalah suatu transformasi linier. Juga, untuk sebarang $c \in K$ didapat

$$\begin{aligned}
(cT)(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= c(T(k\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})) \\
&= c(T(k\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})) \\
&= c(kT(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})) \\
&= (ck)T(\boldsymbol{u}) + cT(\boldsymbol{v}) \\
&= k(cT)(\boldsymbol{u}) + (cS)(\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

Jadi, cT adalah suatu transformasi linier.

$\square$

Dengan menggunakan jumlah dua transformasi linier dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan dalam Teorema 7.0.1, himpunan dari semua transformasi linier diantara dua ruang vektor yang diberikan atas suatu lapangan yang sama adalah suatu ruang vektor dinotasikan oleh $\mathcal{L}(U,V)$.

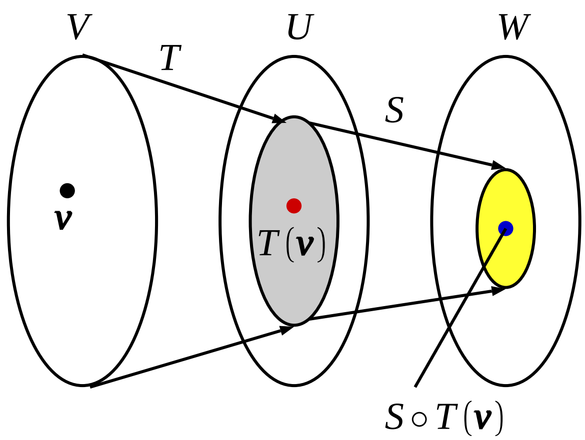
Sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 2, setiap matriks A berukuran $m \times n$ mendefinisikan suatu pemetaan linier dari K^n ke K^m. Juga, bila matriks B

berukuran $n \times p$, maka B mendefinisikan suatu pemetaan linier dari K^p ke K^n. Maka perkalian matriks AB berukuran $m \times p$ mendefinisikan suatu transformasi linier dari K^p ke K^n. Pemetaan ini berkaitan dengan komposisi dari pemetaan yang didefinisikan melalui A dan B.

Teorema 7.0.2 Misalkan U, V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan yang sama. Bila $T : V \to U$ dan $S : U \to W$ adalah transformasi linier, maka pemetaan komposisi $S \circ T : V \to W$, didefinisikan oleh

$$(S \circ T)(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} S(T(\boldsymbol{v})), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$$

adalah suatu transformasi linier (lihat gambar berikut).



Bukti
Untuk membuktikan $S \circ T$ adalah suatu transformasi linier, misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{v_1}$ dan $\boldsymbol{v_2}$ di V dan sebarang skalar $k \in K$. Gunakan $S \circ T$ pada $k\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$, didapat

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(k\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) &= S(T(k\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2})) \\
&= S(kT(\boldsymbol{v_1}) + T(\boldsymbol{v_2})) \\
&= S(kT(\boldsymbol{v_1})) + S(T(\boldsymbol{v_2})) \\
&= kS(T(\boldsymbol{v_1})) + S(T(\boldsymbol{v_2})) \\
&= k(S \circ T)(\boldsymbol{v_1}) + (S \circ T)(\boldsymbol{v_2}).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $S \circ T$ adalah suatu pemetaan linier. $\square$

7.1 Ruang Null dan Range

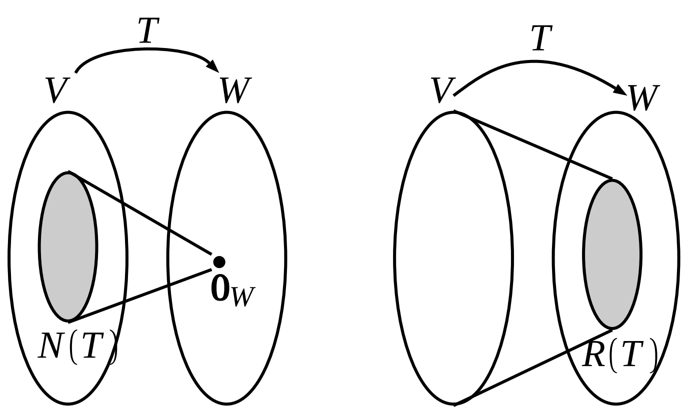
Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K. Untuk suatu transformasi linier $T:V\to W$ **ruang null** dari T atau disebut juga **kernel** dinotasikan oleh $N(T)$ adalah

$$N(T)=\{\mathbf{v}\in V\,|\,T(\mathbf{v})=\mathbf{0}_W\}\subseteq V.$$

Sedangkan **range** dari T dinotasikan oleh $R(T)$, didefinisikan oleh

$$R(T)=\{T(\mathbf{v})\in W\,|\,\mathbf{v}\in V\}\subseteq W.$$

Ruang null dari suatu pemetaan linier adalah himpunan semua vektor-vektor di V yang dipetakan ke vektor nol $\mathbf{0}_W$, sedangkan range adalah himpunan dari semua image dari pemetaan sebagai mana diberikan oleh gambar berikut.



Teorema berikut menyatkan bahwa ruang null dan range adalah ruang bagian.

Teorema 7.1.1 Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T:V\to W$ adalah suatu transformasi linier. Maka

(1) Ruang Null $N(T)$ adalah ruang bagian dari V.

(2) Range $R(T)$ adalah ruang bagian dari $R(T)$.

Bukti

(1) Diberikan sebarang $\mathbf{v_1}$ dan $\mathbf{v_2}$ di $N(T)$ dan skalar $c\in K$, maka dengan menggunakan kelinieran didapat

$$T(c\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2})=cT(\mathbf{v_1})+T(\mathbf{v_2})=c\mathbf{0}_W+\mathbf{0}_W=\mathbf{0}_W.$$

Jadi $c\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}$ di $N(T)$ dengan demikian $N(T)$ adalah subruang dari V.

(2) Diberikan sebarang $\boldsymbol{w_1}$ dan $\boldsymbol{w_2}$ di $R(T)$, maka dapat dipilih $\boldsymbol{v_1}$ dan $\boldsymbol{v_2}$ di V yang memenuhi $T(\boldsymbol{v_1})=\boldsymbol{w_1}$ dan $T(\boldsymbol{v_2})=\boldsymbol{w_2}$. Sehingga untuk sebarang $c\in K$ didapat

$$T(c\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2})=cT(\boldsymbol{v_1})+T(\boldsymbol{v_2})=c\boldsymbol{w_1}+\boldsymbol{w_2}.$$

Jadi $c\boldsymbol{w_1}+\boldsymbol{w_2}\in R(T)$ dengan demikian $R(T)$ adalah ruang bagian dari ruang vektor W.

$\square$

Contoh 1 Diberikan suatu transformasi linier $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b\\ b-c\\ a+d\end{bmatrix}.$$

(a) Dapatkan suatu basis dari $N(T)$ dan dimensinya.

(b) Berikan gambaran dari $R(T)$.

(c) Dapatkan suatu basis dari $R(T)$ dan dimensinya.

Jawab

(a) Ruang $N(T)$ adalah didapat dengan menjadikan komponen dari imagenya sama dengan nol. Dengan demikian didapat sistem persamaan linier homogin:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0\\ b-c &=& 0\\ a+d &=& 0\end{array}\right.$$

Sistem persamaan linier homogin ini mempunyai banyak penyelesaian diberikan oleh

$$S=\left\{\begin{bmatrix} -t\\ t\\ t\\ t\end{bmatrix}\;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Jadi

$$N(T) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Suatu basis di $N(T)$ hanya memuat satu vektor

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akibatnya , $\dim(N(T)) = 1$.

(b) Perhatikan bahwa sebarang vektor $\boldsymbol{w}$ di range bisa ditulis sebagai

$$\boldsymbol{w} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

untuk beberapa bilangan real a, b, c dan d. Dengan demikian

$$R(T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(c) Karena $R(T)$ adalah suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^3$, maka $\dim(R(T)) \leq 3$. Akibatnya, empat vektor yang dihasilkan dalam (b) adalah bergantungan linier dan tidak membentuk suatu basis dari $R(T)$. Perhatikan bahwa tiga vektor pertama dari vektor-vektor tersebut adalah bebas linier. Jadi

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

adalah bebas linier. Dengan demikian B adalah suatu basisi dari $R(T)$ dan $\dim(R(T)) = 3$. Perhatikan juga B membangun $\mathbb{R}^3$, jadi $R(T) = \mathbb{R}^3$.

Contoh 2 Didefinisikan suatu transformasi linier $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ oleh

$$T(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx}, \ \forall p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}).$$

Dapatkan $N(T)$ dan $R(T)$.

Jawab Perhatikan bahwa semua polinomial konstan $p(x) = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$ didapat $\frac{dp(x)}{dx} = 0$, maka

$$N(T) = \{p(x) = a \,|\, a \in \mathbb{R}\}.$$

Ditunjukkan pemetaan T adalah pada sebagai berikut. Diberikan sebarang $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dapat dipilih $p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ yaitu

$$p(x) = \int q(x)dx = \int (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3x^3} + \frac{c}{2}x^2 + dx + e$$

yang memenuhi

$$q(x) = \frac{d(p(x))}{dx} = T(p(x)).$$

Dengan demikian

$$R(T) = \{T(p(x)) \,|\, p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})\} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

Dalam pembahasan sebelumya telah ditunjukkan bahwa image dari sebarang $\boldsymbol{v} \in V$ bisa dihitung bila image $T(\boldsymbol{v_i})$ diketahui untuk masing-masing vektor $\boldsymbol{v_i}$ dalam suatu basis dari V. Hal ini juga ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 7.1.2 Bila V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga atas suatu lapangan K dan

$$B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$$

adalah suatu basis untuk V. Bila $T : V \to W$ adalah suatu pemetaan linier, maka

$$R(T) = \langle \{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n}).\} \rangle$$

Bukti Untuk menunjukkan bahwa dua himpunan sama adalah masing-masing merupakan himpunan bagian dari yang lainnya. Pertama, Bila $\boldsymbol{w} \in R(T)$, maka dapat dipilih suatu vektor $\boldsymbol{v} \in V$ yang memenuhi $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Selanjutnya, karena

B adalah suatu basis dari V, maka juga dapat dipilih $c_1, c_2, \ldots, c_n$ di K yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}.$$

Sehingga didapat

$$T(\boldsymbol{v}) = T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}).$$

Dengan menggunakan kelinieran dari T, didapat

$$\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v_1}) + c_2T(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v_n}).$$

Terlihat bahwa sebarang $\boldsymbol{w} \in R(T)$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor

$$T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n}).$$

Jadi $\boldsymbol{w} \in \langle\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n}).\}\rangle$. Dengan demikian

$$R(T) \subseteq \langle\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n}).\}\rangle.$$

Sebaliknya, misalkan bahwa sebarang vektor

$$\boldsymbol{w} \in \langle\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}\rangle.$$

Maka dapat dipilih skalar-skalar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ di K yang memenuhi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= k_1T(\boldsymbol{v_1}) + k_2T(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + k_nT(\boldsymbol{v_n})\\ &= T(k_1\boldsymbol{v_1}) + T(k_2\boldsymbol{v_2}) + \cdots + T(k_n\boldsymbol{v_n})\\ &= T(k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}).\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{w}$ adalah image dari kombinasi linier

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$$

yang merupakan suatu elemen dari V. Jadi $\boldsymbol{w} \in R(T)$, dengan demikian

$$\langle\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}\rangle \subseteq R(T).$$

Akibatnya $R(T) = \langle\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \ldots, T(\boldsymbol{v_n})\}\rangle$. $\square$

Contoh 3 Misalkan $T : |R^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah suatu operator linier dan $B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ adalah suatu basis untuk $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi

$$T(\boldsymbol{v_1}) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad T(\boldsymbol{v_2}) = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \quad T(\boldsymbol{v_3}) = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

a. Apakah $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ di $R(T)$?

b. Dapatkan suatu basis untuk $R(T)$.

c. Dapatkan ruang null $N(T)$.

Jawab

a. Dari Teorema 7.1.2 vektor $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ di $R(T)$ bila ada skalar k_1, k_2 dan k_3 di $\mathbb{R}$ yang memenuhi

$$k_1 T(\boldsymbol{v_1}) + k_2 T(\boldsymbol{v_2}) + k_3 T(\boldsymbol{v_3}) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

yaitu

$$k_1 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier ini diberikan oleh

$$S = \{(2-r, -1-r, r) \,|\, r \in \mathbb{R}\}.$$

Khususnya bila $r = 0$, maka $k_1 = 2, k_2 = -1$ dan $k_3 = 0$. Jadi $\boldsymbol{w} \in R(T)$.

b. Untuk mendapatkan suatu basis dari $R(T)$, lakukan operasi baris elementer matriks

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{untuk memperoleh} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Karena koefisien pivot dalam kolom ke-1 dan ke-2, maka suatu basis untuk $R(T)$ diberikan oleh

$$R(T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Perhatikan bahwa karena $R(T)$ dibangun oleh dua vektor yang bebas linier, maka $R(T)$ adalah suatu bidang dalam $\mathbb{R}^3$ (lihat gambar!).

c. Karena B adalah suatu basis untuk $\mathbb{R}^3$, maka ruang null adalah himpunan semua vektor $k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3}$ yang memenuhi

$$k_1T(\boldsymbol{v_1}) + k_2T(\boldsymbol{v_2}) + k_3T(\boldsymbol{v_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

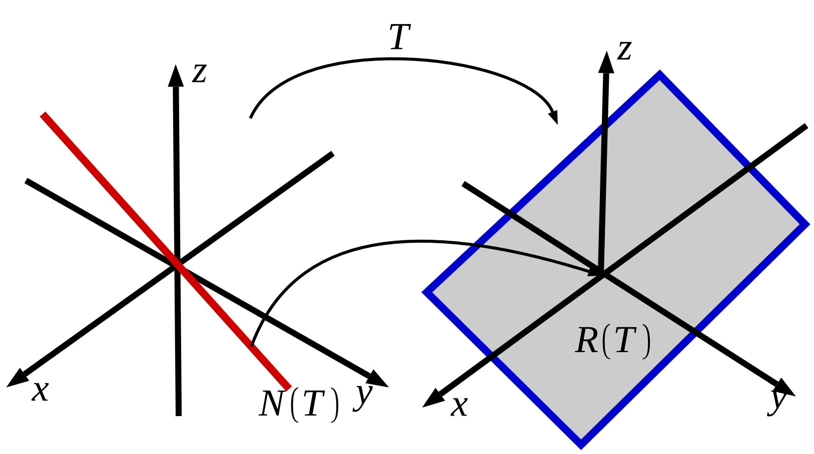
Dengan menggunakan operasi baris elementer didapat matriks tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat $k_1 = -k_3, k_2 = -k_3$ dan k_3 sebarang di $\mathbb{R}$. Dengan demikian ruang null adalah

$$N(T) = \langle -\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3} \rangle$$

yang merupakan suatu garis dalam $\mathbb{R}^3$ (lihat gambar!).



Teorema 7.1.3 Diberikan V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga atas suatu lapangan yang sama yaitu K. Bila $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linier, maka

$$\dim(V) = \dim(R(T)) + \dim(N(T)).$$

Bukti Misalkan bahwa $\dim(V) = n$. Untuk pembuktian teorema ditinjau tiga kasus. Pertama, untuk $\dim N(T) = \dim V = n$. Dalam kasus ini, bayangan (image) dari setiap vektor di V adalah vektor nol $\mathbf{0}_W \in W$, dengan demikian $R(T) = \{0_V\}$. Sehingga didapat

$$n = \dim V = \dim R(T) + \dim(N(T)) = 0 + n.$$

Selanjutnya, untuk $1 \leq r = \dim N(T) < n$. Misalkan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah suatu basis untuk $N(T)$. Perluas basis ini di V sehingga dapat dipilih vektor-vektor di V

$$\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

yang semuanya bukan di $N(T)$ dan memenuhi

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

adalah suatu basis dari V. Ditunjukkan bahwa himpunan

$$S = \{T(\boldsymbol{v}_{r+1}), T(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah suatu basis di $R(T)$. Menurut Teorema 7.1.2 didapat

$$R(T) = \langle \{T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_r), T(\boldsymbol{v}_{r+1}), T(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\} \rangle .$$

Karena $T(\boldsymbol{v}_1) = T(\boldsymbol{v}_2) = \cdots = T(\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}_W$, maka vektor-vektor di $R(T)$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor

$$T(\boldsymbol{v}_{r+1}), T(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n).$$

Jadi

$$S = \langle \{T(\boldsymbol{v}_{r+1}), T(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\} \rangle = R(T).$$

Untuk menunjukkan bahwa S bebas linier, tinjau persamaan

$$k_{r+1}T(\boldsymbol{v}_{r+1}) + k_{r+2}T(\boldsymbol{v}_{r+2}) + \cdots + k_nT(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_W .$$

Karena T adalah transformasi linier, maka didapat

$$T(k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \in N(T).$$

Tetapi $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ adalah suatu basis di $N(T)$, maka dapat dipilih skalar $k_1, k_2, \ldots, k_r$ di K yang memenuhi

$$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r.$$

Sehingga didapat

$$-k_1\boldsymbol{v}_1 - k_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - k_r\boldsymbol{v}_r + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_W.$$

Karena $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis di V, maka bebas linier dan

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_n = 0.$$

Khususnya didapat $k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_n = 0$. Jadi $n - r$ vektor

$$T(\boldsymbol{v}_{r+1}), T(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$$

adalah suatu basis di $R(T)$. Akibatnya

$$\dim(V) = n = (n-r) + r = \dim(R(T)) + \dim(N(T)).$$

Terakhir, untuk $N(T) = \{0_V\}$, maka $\dim(N(T)) = 0$. Bila $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis di V, maka dengan menggunakan Teorema 7.1.2 didapat

$$R(T) = \langle\{T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle.$$

Dengan argumen yang sama sebagaimana dilakukan sebelumnya didapat bahwa

$$\{T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah bebas linier. Jadi $\dim(N(T)) + \dim(R(T)) = 0 + n = n = \dim(V)$. $\square$

Contoh 7.1.1 Didefinisikan transformasi linier $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_(\mathbb{R})$ oleh

$$T(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 p(x)}{dx^2}.$$

Dapatkan dimensi dari range T dan berikan diskripsi dari range.

Jawab Misalkan $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ adalah basis baku untuk $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Karena $p(x)$ di $N(T)$ bila dan hanya bila mempunyai derajad 0 atau 1, maka ruang null adalah runag bagian dari $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ yang terdiri dari polinomial berderajad kurang atau sama dengan satu.. Dengan demikian, $C = \{1, x\}$ adalah suatu basis untuk $N(T)$ dan $\dim(N(T)) = 2$. Karena $\dim(\mathcal{P}_4(\mathbb{R})) = 5$, maka berdasarkan Teorema 7.1.3 didapat

$$2 + \dim(R(T)) = 5, \quad \text{jadi} \quad \dim(R(T)) = 5 - 2 = 3.$$

Kemudian sebagaimana bukti dalam Teorema 7.1.3 didapat

$$\{T(x^2), T(x^3), T(x^4)\} = \{2, 6x, 12x^2\}$$

adalah suatu basis untuk $R(T)$. Perhatikan bahwa $R(T)$ adalah $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ yang merupakan subruang dari $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

$\square$

7.2 Isomorpisma

Banyak ruang vektor yang sudah dibahas deri pandangan aljabar adalah sama. Dalam bagian ini ditunjukkan bahwa suatu ***isomorpisma*** yang merupakan suatu transformasi linier khusus dapat digunakan untuk menjelaskan hubungan diantara dua ruang vektor. Secara esensi pembahasan berkaitan dengan pemetaan ***satu-satu*** (injektif) dan ***pada*** (surjektif).

Definisi 7.2.1 Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T : U \to V$ adalah suatu transformasi linier.

1. Pemetaan T adalah ***satu-satu*** (injektif) bila $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ berakibat bahwa $T(\boldsymbol{u}) \neq T(\boldsymbol{v})$. Yaitu, elemen-elemen yang berbeda di U, harus menghasilkan elemen-elemen image yang berbeda di V.

2. Pemetaan T adalah ***pada*** (surjektif) bila $T(U) = V$. Yaitu range dari T adalah V.

Pemetaan T dinamakan ***satu-satu pada*** (bijektif) bila T adalah satu-satu dan pada.

□

Ketika untuk menunjukkan bahwa suatu pemetaan adalah satu-satu, suatu pernyataan ekivelen dapat digunakan. Yaitu, T adalah satu-satu bila $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v})$ berakibat bahwa $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Untuk menunjukkan bahwa suatu pemetaan pada, haruslah ditunjukkan bahwa bila sebarang $\boldsymbol{v}$ di V, maka ada beberapa elemen $\boldsymbol{u} \in U$ yang memenuhi $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

Contoh 7.2.1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah pemetaan yang didefinisikan oleh $T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tunjukkan bahwa T adalah pemetaan bijektif.

Jawab Pertama ditunjukkan bahwa T adalah satu-satu., misalkan

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Maka,

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

dan

$$T(\boldsymbol{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + b_2 \\ -a_2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, bila $T(\boldsymbol{u}_1) = T(\boldsymbol{u}_2)$, maka

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + b_2 \\ -a_2 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$. Dengan demikian $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. Jadi, T adalah satu-satu. Selanjutnya ditunjukkan bahwa T adalah pada. Misalkan sebarang $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Pilih $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ yang memenuhi

$$T(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Kedua ruas persamaan kalikan dengan invers dari matriks A didapat

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian T adalah pada. Karena T adalah satu-satu dan pada, maka T adalah bijektif. Suatu argumentasi alternatif adalah menunjukkan bahwa vektor kolom-kolom dari A adalah bebas linier, jadi merupakan suatu basis dari $\mathbb{R}^2$. Oleh karena itu, range dari T adalah ruang kolom dari A adalah semua vektor di $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Berikut ini diberikan suatu kegunaan dari ruang nul untuk menunjukkan bahwa suatu transformasi linier adalah satu-satu.

Teorema 7.2.1 Suatu transformasi linier $T : U \to V$ adalah satu-satu bila dan hanya bila ruang nul terdiri dari hanya vektor nol di U.

Bukti Misalkan bahwa T adalah satu-satu. Maka ditunjukkan bahwa $N(T) = \{\mathbf{0}_U\}$. Untuk menunjukkan hal ini, misalkan sebarang vektor $\boldsymbol{u}$ di $N(T)$, jadi $T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V$. Juga,sebgaimana telah diketahui $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$. Karena T satu-satu, maka hanyalah vektor nol $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_U$ dipetakan menjadi $\mathbf{0}_V$. Jadi $N(T) = \{\mathbf{0}_U\}$. Sebaliknya, misalkan bahwa $N(T) = \{\mathbf{0}_U\}$ dan $T(\boldsymbol{u}_1) = T(\boldsymbol{u}_2)$. Didapat

$$T(\boldsymbol{u}_1) - T(\boldsymbol{u}_2) = \mathbf{0}_V \Longrightarrow T(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \mathbf{0}_V.$$

Jadi $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in N(T) = \{\mathbf{0}_U\}$, sehingga didapat $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}_U$ atau $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. dengan demikian T adalah pemetaan satu-satu.

$\square$

Contoh 7.2.2 Didefinisikan suatu operator linier $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ 5x + 2y \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa T adalah satu-satu.

Jawab Sebarang vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ di $N(T)$ bila dan hanya bila

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$$

Sistem persamaan linier homogini ini mempunyai jawab trivial $x = 0, y = 0$. Jadi $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Dengan menggunakan Teorema 7.2.1, maka T adalah satu-satu.

$\square$

Telah diketahui bahwa bila $T : U \to V$ adalah suatu pemetaan linier dan

$$B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

adalah suatu basis untuk U, maka

$$R(T) = \langle \{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\} \rangle .$$

Suatu pertanyaan adalaah apa syarat bagi T supaya

$$\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$$

adalah juga suatu basis untuk $R(T)$? Teorema berikut menjawab pertanyaan ini.

Teorema 7.2.2 Misalkan $T : U \to V$ adalah suatu pemetaan linier dan

$$B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

adalah suatu basis untuk U. Bila T adalah satu-satu, maka

$$\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$$

adalah suatu basis untuk $R(T)$.

Bukti Dari Teorema 7.1.2, maka

$$R(T) = \langle\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\}\rangle\,.$$

Jadi, cukup ditunjukkan bahwa

$$\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$$

bebas linier di $R(T)$. Tinjau persamaan

$$c_1 T(\boldsymbol{u}_1) + c_2 T(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + c_n T(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V$$

atau ekivalen dengan

$$T(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V\,.$$

Karena T adalah satu-satu, maka $N(T) = \{0_U\}$, jadi

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_U\,.$$

Karena $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ adalah besas linier, maka $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Dengan demikian

$$\{T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$$

adalah suatu basis untuk $R(T)$.

$\square$

Definisi 7.2.2 Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T : U \to V$ adalah suatu transformasi linier dimana T adalah satu-satu dan pada, maka T dinamakan **isomorpisma**. Dalam hal ini ruang vektor U dan V adalah **isomorpik** dan dinotasikan oleh $U \cong V$.

$\square$

Proposisi 7.2.1 Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adalah suatu pemetaan linier yang didefinisikan oleh $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Maka T adalah sautu isomorpisma bila dan hanya bila matriks A mempunyai invers.

Bukti Misalkan A mempunyai invers dan $\boldsymbol{b}$ sebarang vektor di $\mathbb{R}^n$ (kodomain).

Maka $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ (di domain T) *preimage* dari $\boldsymbol{b}$. Jadi, pemetaan T adalah pada. Untuk menunjukkan bahwa T pada, perhatikan bahwa persamaan $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial $\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Jadi $N(T) = \{\mathbf{0}\}$, dengan demikian T adalah satu-satu. Jadi T adalah satu-satu dan pada. Sehingga T adalah isomorpisma. Sebaliknya, misalkan bahwa T adalah suatu isomorpisma. Maka $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adalah pada, maka vektor kolom dari A membangun $\mathbb{R}^n$ dan karena $\mathbb{R}^n$ berdimensi n, makavektor-vektor kolom dari A adalah bebas linier. Akibatnya $\det(A) \neq 0$, jadi A punya invers.

$\square$

Teorema berikut merupakan hasil utama bahasan pada bagian ini yang berkaitan dengan ruang vektor brdimensi hingga.

Teorema 7.2.3 Bila V adalah ruang vektor atas suatu lapangan K berdimensi n, maka V dan $\mathbb{R}^n$ adalah isomorpik.

Bukti Misalkan $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis terurut untuk V. Misalkan $T : V \to \mathbb{R}^n$ adalah transformasi koordinat didefinisikan oleh $T(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B$. Ditunjukkan bahwa T adalah isomorpisma. Pertama ditunjukkan bahwa T adalah satu-satu. Misalkan bahwa $T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Karena B adalah suatu basis, dapat dipilih dengan tunggal skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Jadi,

$$T(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

terlihat bahwa $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Dengan demikian $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, jadi T adalah satu-satu. Selanjutnya mislkan bahwa

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

sebarang vektor di $\mathbb{R}^n$. Pilih vektor $\boldsymbol{v} \in V$ diberikan oleh $\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$. Perhatikan bahwa $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, jadi T adalah pada. Dengan demikian T adalah suatu isomorpisma dan $V \cong \mathbb{R}^n$.

$\square$

Definisi 7.2.3 Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T : U \to V$ adalah suatu transformasi linier satu-satu. Pemetaan

$$T^{-1} : R(T) \to U,$$

didefinisikan oleh

$$T^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \quad \text{bila dan hanyabila} \quad T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v},$$

dinamakan **invers** dari T. Bila T pada, maka T^{-1} didefinisikan pada semua vektor di V.

$\square$

Proposisi 7.2.2 Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan $T : U \to V$ suatu pemetaan linier satu-satu. Maka pemetaan $T^{-1} : R(T) \to U$ adalah juga suatu transformasi linier.

Bukti Misalkan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in R(T)$ dan skalar $c \in K$. Pilih vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ yang memenuhi $\boldsymbol{v}_1 = T(\boldsymbol{u}_1)$ dan $\boldsymbol{v}_2 = T(\boldsymbol{u}_2)$. Karena T adalah suatu pemetaan linier maka

$$T(c\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = cT(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2) = c\boldsymbol{v}_\mathbf{1} + \boldsymbol{v}_2.$$

Jadi

$$T^{-1}(c\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = c\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = cT^{-1}(\boldsymbol{v}_1) + T^{-1}(\boldsymbol{v}_2).$$

Akibatnya T^{-1} adal suatu pemetaan linier.

$\square$

Kesimpulan 7.2.1 Misalkan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang mempunyai invers dan $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pemetaan linier didefinisikan oleh $T(\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Maka $T^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$.

Bukti Bisa digunakan sebagai latihan.

$\square$

Teorema 7.2.4 Bila U dan V adalah ruang vektor berdimensi$n$ atas suatu lapangan K, maka U dan V adalah isomorpik.

Bukti Dengan menggunakan Teorema 7.2.3 ada isomorpisma $T_1 : U \to \mathbb{R}^n$ dan $T_2 : V \to \mathbb{R}^n$ sebagaimana diberikan oleh Gambar 7.1. Misalkan

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R}^n \\ V \arrow[ur, "T_2"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 7.1: $\phi = T_2^{-1} \circ T_1 : U \to V$

$$\phi = T_2^{-1} \circ T_1 : U \to V.$$

Untuk menunjukkan bahwa ϕ adalah pemetaan linier, ingat bahwa T_2^{-1} adalah pemetaan linier (Proposisi 7.2.2). Dengan menggunakan Teorema 7.0.2, maka komposisi $T_2^{-1} \circ T_1$ adalah suatu pemetaan linier. Pemetaan ϕ adalah satu-satu dan pada sebab berdasarkan Gambar 7.1 maka $\phi = T_1$. Jadi ϕ adalah suatu isomorpisma, akibatnya $U \cong V$.

$\square$

Contoh 7.2.3 Diberikan ruang vektor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dan ruang vektor mariks simetri

$$S_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dapatkan secara langsung suatu isomorpisma dari $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ke $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Jawab Misalkan basis terurut baku di $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dan $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ masing diberikan oleh

$$B_1 = \{1, x, x^3\} \qquad \text{dan} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Misalkan masing-masing T_1 dan T_2 adalah pemetaan koordinat dari $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dan $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ke $\mathbb{R}^3$. Maka

$$T_1(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad T_2\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $T_2^{-1} : \mathbb{R}^3 \to S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ memetakan vektor

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{ke matriks simetri} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Jadi, isomorpisma yang diharapkan adalah

$$T_2^{-1} \circ T_1 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to S_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

yang didefinisikan oleh

$$(T_2^{-1} \circ T_1)(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \ \forall a+bx+cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Misalnya,

$$\begin{aligned} (T_2^{-1} \circ T_1)(1+2x+3x^2) &= T_2^{-1}(T_1(1+2x+3x^2)) \\ &= T_2^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

7.3 Matriks Representasi dari suatu Pemetaan Linier

Diberikan matriks A dengan elemen-elemen di $\mathbb{R}$ dan berukuran $m \times n$. Kombinasi liner dari vektor-vektor kolom dari A di $\mathbb{R}^m$ dinamakan **ruang kolom** dari A dinotasikan oleh $\text{kol}(A)$. Juga, didefinisikan ruang nul dari matriks A adalah himpunan semua vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}$. Selanjutnya dibahas matriks A dalam kenteks transformasi linier $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah suatu transformasi linier yang didefinisikan oleh

$$T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Persamaan ini, dapat ditulis dalam bentuk vektor sebagai

$$T(\boldsymbol{v}) = v_1\boldsymbol{A}_1 + v_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{A}_n,$$

dimana $\boldsymbol{A}_i$ adalah vektor kolom dari A dan v_i adalah komponen ke-i dari vektor $\boldsymbol{v}$ untuk $1 \leq i \leq n$. Dalam hal yang demikian, $R(T)$ yang merupakan ruang bagian dari $\mathbb{R}^m$ adalah sama dengan ruang kolom dari A, yaitu

$$R(T) = \text{kol}(A).$$

Dimensi dari ruang kolom A dinamakan **rank kolom** dari A. Juga dapat

$$N(T) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}\} = N(A).$$

Dimensi dari $N(A)$ dinamakan **nullitas** dari A dan menggunakan Teorema 7.1.3 didapat

$$\text{rank kolom}(A) + \text{nullitas}(A) = n.$$

Suatu ruang bagian yang lain dari $\mathbb{R}^n$ dikaitkan dengan A adalah **ruang baris** dari A, dinotasikan oleh $\text{bar}(A)$ dan merupakan hasil bentangan dari vektor-vektor baris dari A. Karena operasi tanspose memetakan vektor-vektor baris dari A ke vektor-vektor klom dari A, ruang baris dari A adalah sama dengan dengan ruang kolom dari A^t (tanda ^{t} adalah transpose), sehingga didapat

$$\text{bar}(A) = \text{kol}(A^t).$$

Dengan demikian suatu basis dari A dapat diperoeleh dengan melakukan reduksi baris. Kususnya, basis-basis ini adalah vektor-vektor baris taknol dari hasil pereduksian baris. Sebagai kesimulan adalah

Kesimpulan 7.3.1 rank baris dan rank kolom dari suatu matriks A adalah sama.

□

Selajutnya didefinisikan **rank** dari suatu matriks A sebagai $\dim(\text{bar}(A))$ atau $\dim(\text{kol}(A))$ ditulis $\text{rank}(A)$, lagi dengan menggunakan Teorema 7.1.3 didapat

$$\text{rank}(A) + \text{nullitas}(A) = n.$$

Matriks sudah memainkan peranan penting dalam kajian aljabar linier. Dalam nagian ini dijelaskan keterkaitan diantara matriks dengan transformasi linier. Untuk mengilustrasikan ide ini, misalkan diberikan sebarang matriks A berukuran $m \times n$, dapat didefinisikan suatu transformasi linier $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diberikan oleh

$$T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Dalam Contoh 87, telah ditunjukkan bahwa suatu transformasi linier $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ adalah secara lengkap ditentuknan oleh image dari vektor-vektor koordinat $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ dan $\boldsymbol{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$. Kuncinya adalah menegenali suatu vektor $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ bisa ditulis sebagai

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3,$$

sehingga didapat

$$T(\boldsymbol{v})=v_1T(\boldsymbol{e}_1)+v_2T(\boldsymbol{e}_2)+v_3T(\boldsymbol{e}_3).$$

Dalam contoh ini, T telah didefinisikan, sehingga didapt

$$T(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},T(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\quad \text{dan}\quad T(\boldsymbol{e}_3)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya,matriks Aadalah berukuran 2×3 yang mempuyai kolom adalah $T(\boldsymbol{e}_1, T(\boldsymbol{e}_2$ dan $T(\boldsymbol{e}_3$. Maka untuk sebarang $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ didapat

$$T(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{v}.$$

Terlihat bahwa transformasi linier T diberikan oleh suatu perkalian matriks. Umumnya,bila $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ adalah suatu transformasi linier, maka adalah memungkinkan untuk menulis

$$T(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v},$$

dimana A adalah matriks berukuran $m\times n$ yang mempunyai vektor kolom ke-j adalah $T(\boldsymbol{e}_j)$ untuk $j=1,2,\ldots,n$. Matriks A dinamakan **representasi matriks** dari T **relatif terhadap basis baku** di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$.

Dalam bagian ini akan ditunjukkan bahwa setiap transformasi linier diantara ruang vektor berdimensi hingga dapat ditulis sebagai suatuperkalian matriks. S ecara umum, misalkan V dan W adalah ruang vektor atas suatu lapangan K dan mempunyai dimensi berhingga dengan masing-masing basis terurut tetap B dan B'. Bila $T:V\to W$ adalah suatu transformasi linier, maka ada suatu matriks A yang memenuhi

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B'}=A[\boldsymbol{v}]_B. \tag{7.1}$$

Dalam kasus ini $V \cong \mathbb{R}^n$ dan $W \cong \mathbb{R}^m$; dan masing-masing B dan B' adalah basis baku di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$. Persamaan 7.1 ekivalen dengan

$$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{v}.$$

Berikut ini secara rinci dibahas representasi matriks dari suatu pemetaan linier.

Misal V dan W adalah ruang vektor berturut-turut dengan basis terurut

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \quad \text{dan} \quad B' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}.$$

Selanjutnya, misalkan $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linier. Berikutnya, diberikan sebarang vektor $\boldsymbol{v}$ di V dan misalkan

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

adalah vektor koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B. Jadi

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

Pada persamaan ini kedua sisi kenakan T didapat

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}) &= T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n). \end{aligned} \tag{7.2}$$

catatan bahwa untuk masing-masing $i = 1, 2, \ldots, n$ vektor $T(\boldsymbol{v}_i)$ di W. Jadi ada dengan tunggal skalar $a_{i,j}$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}_1) &= a_{1,1}\boldsymbol{w}_1 + a_{2,1}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m,1}\boldsymbol{w}_m \\ T(\boldsymbol{v}_2) &= a_{1,2}\boldsymbol{w}_1 + a_{2,2}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m,2}\boldsymbol{w}_m \\ &\vdots \\ T(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1,n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2,n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m,n}\boldsymbol{w}_m. \end{aligned}$$

Jadi, vektor koordinat relatif terhadap basis B' diberikan oleh

$$[T(\boldsymbol{v}_i)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}, \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dengan demikian vektor koordinat dari vektor $T(\mathbf{v})$ pada Persamaan 7.2 menjadi

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = c_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

atau dalam bentuk persamaan matriks

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Matriks sebelah kanan Perasamaan 7.4 dinotasikan oleh $[T]_B^{B'}$, sehingga didapat

$$[T]_B^{B'} = \left[[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} \quad \cdots \quad [T(\mathbf{v}_n)]_{B'} . \right]$$

Matriks $[T]_B^{B'}$ dinamakan **matriks dari** T **relatif terhadap basis** B **dan** B'. Dalam kasus $T : V \to V$ adalah suatu operator linier dan B adalah suatu basis terurut tetap untuk V representasi matriks untuk pemetaan T dinotasikan oleh $[T]_B$.

Apa yang telah dibahas ini diringkas dalam kesimpulan berikut:

Kesimpulan 7.3.2 Misalkan V dan W ruang vektor bedimensi hingga dengan masing-masing basis terurut

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{dan} \quad B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$$

dan misalkan $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linier. Maka matriks $[T]_B^{B'}$ adalah representasi matriks dari T relatif terhadap basis B dan B'. Lagipula, koordinat dari $T(\mathbf{v})$ relatif terhadap basis B' diberikan oleh

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = [T]_B^{B'} [\mathbf{v}]_B.$$

$\square$

Misalkan dalam Kesimpulan 7.3.2 ruang vektor $V = W$ B dan B' adalah dua basis terurut yang berbedauntuk V dan $T : V \to V$ adalah suatu operator identitas yaitu $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \ forall \mathbf{v} \in V$. Maka $[T]_B^{B'}$ adalah suatu matriks perubahan basis $[I]_B^{B'}$ (matriks transisi) yang telah dibahas dalam Bagian 5.7.

Contoh 7.3.1 Didefinisikan suatu operator linier $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}.$$

a. Dapatkan matriks dari T relatif terhadap basis baku untuk $\mathbb{R}^3$.
b. Gunakan hasil (a) untuk mendapatkan

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

Jawab
a. Misalkan $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ adalah basis baku untuk $\mathbb{R}^3$. Karena

$$[T(\boldsymbol{e}_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\boldsymbol{e}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [T(\boldsymbol{e}_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Karena B adalah basis baku untuk $\mathbb{R}^3$, maka

$$[\boldsymbol{v}]_B = \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat

$$T(\boldsymbol{v}) = [T(\boldsymbol{v})]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Berikut ini diberikan ringkasan proses untuk memperoleh representasi matriks dari suatu transformasi linier $T : V \to W$ relatif terhadap basis B dan B'.

1. Untuk basis $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, dapatkan $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$.

2. Dapatkan masing-masing koordinat dari $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$ relatif terhadap basis
$$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}.$$
Yaitu, dapatkan
$$[T(\boldsymbol{v}_1)]_{B'}, [T(\boldsymbol{v}_2)]_{B'}, \ldots, [T(\boldsymbol{v}_n)]_{B'}.$$

3. Hitung $[\boldsymbol{v}]_B$.

4. Hitung koordinat dari $T(\boldsymbol{v})$ relatif terhadap basis B' melalui
$$[T(\boldsymbol{v})]_{B'} = [T]_B^{B'} [\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

5. Maka $T(\boldsymbol{v}) = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{w}_m$.

Contoh 7.3.2 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ adalah transformasi linier didefinisikan oleh
$$T(\boldsymbol{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$
dan misalkan masing-masing
$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{dan} \quad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
adalah basis terurut untuk $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$.

a. Dapatkan $[T]_B^{B'}$.

b. Misalkan $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dapatkan $T(\boldsymbol{v})$ secara langsung dan kemudian gunakan matriks dari hasil (a).

Jawab

a. Kenakan T pada vektor basis di B, didapat

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dapatkan masing-masing koordinat dari vektor tersebut relatif terhadap basis B'. Yaitu mendapatkan skalar-skalar yang memenuhi

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dan

$$b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian pada sistem perasamaa linier yang pertama adalah

$$a_1 = -1, a_2 = 4 \quad \text{dan} \quad a_3 = -1$$

dan peyelesaian pada sistem perasamaa linier yang kedua adalah

$$b_1 = -3, b_2 = 2 \quad \text{dan} \quad b_3 = 2.$$

Jadi

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Dengan menggunakan definisi T langsung, didapat

$$T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3-2 \\ -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Berikutnya, untuk menggunakan matriks $[T]_B^{B'}$ pada bagian (a) diperlukan koordinat dari $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis B. Perhatikan bahwa, penyelesaian dari persamaan

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{adalah} \quad a_1 = -\frac{3}{5},\ a_2 = -\frac{4}{5}.$$

Jadi, vektor koordinat dari $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ relatif terhadap basis B adalah

$$[\boldsymbol{v}]_B == \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}_B == \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dapat dihitung T menggunakan perkalian matriks sehingga didapat

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$T(\boldsymbol{v}) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

terlihat hasilnya sama dengan hasil perhitungan langsung.

$\square$

Contoh 7.3.3 Didefinisikan suatu transformasi linier $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ oleh

$$T(p(x)) = x^2 \frac{d^2 p(x)}{dx^2} - 2\frac{dp(x)}{dx} + xp(x),\ \forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Dapatkan representasi matriksdari T relatif terhadap basi baku untuk $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dan $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Jawab Karena basis baku untuk $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ adalah $B = \{1, x, x^2\}$, maka pertama dihitung

$$T(1) = x,\ T(x) = x^2 - 2, T(x^2) = x^2(2) - 2(2x) + x(x^2) = x^3 + 2x^2 - 4x.$$

Karena basis baku untuk $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ adalah $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$, maka koordinat dari vektor $T(1), T(x), T(x^2)$ relatif terhadap basis B' adalah:

$$[T(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [T(x^2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi representasi matriks dari T relatif terhadap basis B dan B' adalah

$$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sebagai suatu contoh, misalkan $p(x) = x^2 - 3x + 1$. Karena $p'(x) = 2x - 3$ dan $p''(x) = 2$, maka didapat

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= x^2(2) - 2(2x-3) + x(x^2 - 3x + 1) \\ &= x^3 - x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

Untuk menggunakan representasi matriks dari T relatif terhadap basis B' ditentukan dulu

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga koordinat dari image dari $p(x)$ oleh pemetaan T relatif terhadap basis B' diberikan oleh

$$[T(p(x))]_{B'} = [T]_B^{B'}[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat

$$T(p(x)) = 6 - 3x - x^2 + x^3,$$

hasil ini sesuai dengan penghitungan langsung $T(p(x))$.

$\square$

Sebagai akibat dari beberapa pembahasan diberikan sebagai berikut.

Akibat 7.3.1 Misalkan V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan msaing-masin basis terurut B dan B'. Bila S dan T adalah transformasi linier dari V ke W, maka 1. $[S+T]_B^{B'} = [S]_B^{B'} + [T]_B^{B'}$
2. $[kT]_B^{B'} = k[T]_B^{B'}$, untuk sebarang skalar $k \in K$.

□

Akibat 7.3.2 Misalkan U, V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan masing-msing basis terurut B, B' dan B''. Bila $T : U \to V$ dan $S : V \to W$ adalah transformasi linier, maka

$$[S \circ T]_B^{B''} = [S]_{B'}^{B''} [T]_B^{B'}.$$

□

Kesimpulan 7.3.3 Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan basis tereurut B. Bila T adalah suatu operator linier pada V, maka

$$[T^n]_B = ([T]_B)^n.$$

□

Kesimpulan 7.3.4 Misalkan T adalah suatu operator linier yang mempunyai invers pada suatu ruang vektor V berdimensi hingga dan B adalah suatu basis terurut untuk V. Maka

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}.$$

□

7.4 Similaritas

Sebagaimana telah dibahas bahwa bila $T : V \to V$ adalah operator linier pada ruang vektor V dan B adalah suatu basis terurut untuk V, maka T mempunyai suatu representasi matriks relatif terhadap basis B. Matriks yang tertentu untuk T bergantung pada pilihan basis yang ditentutkan. Sebagai akibat matriks yang berkaitan dengan suatu transformasi linier tidak tunggal. Apapun hal ini, tindakan dari operator T pada V tampa memperhatikan representasi matriks tertentu adalah selalu sama. Hal ini dijelaskan oleh contoh berikut.

Contoh 7.4.1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah operator linier didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ -2x+4y \end{bmatrix}.$$

Juga, misalkan diberikan dua basis terurut untuk $\mathbb{R}^2$ yaitu basis baku $B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ dan $B_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Selidiki bahwa tindakan pada vektor $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ oleh operator T adalah sama terhadap pilihan basis B_1 ataupun basis B_2 dari representasi matriks T yang digunakan.

Jawab Representasi matriks dari T relatif terhadap basis B_1 dan B_2 masing-masing adalah

$$[T]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [T]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa

$$[\boldsymbol{v}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\boldsymbol{v}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gunakan representasi dari operator T relatif masing-masing terhadap basis B_1 dan B_2 didapat

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_1} = [T]_{B_1}[\boldsymbol{v}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

dan

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = [T]_{B_2}[\boldsymbol{v}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Untuk melihat hasil-hasil ini sama sebagai berikut:

$$T(\boldsymbol{v}) = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ dan } T(\boldsymbol{v}) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

□

Teorema berikut memberikan hubungan diantara matriks-matriks untuk suatu operator linier relatif terhadap dua basis yang berbeda.

Teorema 7.4.1 Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi hingga, B_1 dan B_2 adalah dua basis terurut yang berbeda untuk V; dan $T : V \to V$ adalah suatu operator linier. Misalkan $P = [I]_{B_2}^{B_1}$ adalah matriks transisi dari B_2 ke B_1. Maka

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}P.$$

Bukti Misalkan $\boldsymbol{v}$ sebarang vektor V, didapat

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = [T]_{B_2}[\boldsymbol{v}]_{B_2}.$$

Cara lain untuk menghitung $[T\boldsymbol{v}]_{B_2}$ sebagai berikut: Karena P adalah matriks transisi dari B_2 ke B_1, maka

$$[\boldsymbol{v}]_{B_1} = P[\boldsymbol{v}]_{B_2}.$$

Jadi koordinat dari $T(\boldsymbol{v})$ relatif terhadap B_1 diberikan oleh

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_1} = [T]_{B_1}[\boldsymbol{v}]_{B_1} = [T]_{B_1}P[\boldsymbol{v}]_{B_2}.$$

Kedua ruas persamaan kalikan dari kiri dengan P^{-1} yaitu merupakan matriks transisi dari B_1 ke B_2, didapat

$$P^{-1}[T(\boldsymbol{v})]_{B_1} = P^{-1}[T]_{B_1}P[\boldsymbol{v}]_{B_2},$$

tetapi $P^{-1}[T(\boldsymbol{v})]_{B_1} = [T(\boldsymbol{v})]_{B_2}$. Jadi

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}P[\boldsymbol{v}]_{B_2}. \tag{7.5}$$

karena dalam Persamaan 7.5 berlaku untuk semua vektor $\boldsymbol{v}$ di V, maka

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}P. \qquad \text{(Lihat Gambar 7.2)}$$

□

Contoh 7.4.1 Misalkan bahwa T, B_1 dan B_2 adalah operator linier dan basis-basis terurut sebagaimana dalam Contoh 7.4.1. Maka

$$[T]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd}
{[\boldsymbol{v}]_{B_1}} \arrow[r, "{[T]_{B_1}}"'] & {[T(\boldsymbol{v})_{B_1}} \arrow[d, "P^{-1}"'] \\
{[\boldsymbol{v}]_{B_2}} \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "{[T]_{B_2}}"] & {[T(\boldsymbol{v})]_{B_2}}
\end{tikzcd}$$

Gambar 7.2: Diagram Perubahan Basis

Gunakan Teorema 7.4.1 untuk menyelidiki bahwa

$$[T]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Jawab Karena B_1 adalah basis baku untuk $\mathbb{R}^2$, maka matriks transisi dari B_2 ke B_1 adalah

$$P = [I]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

sehingga didapat

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi,

$$P^{-1}[T]_{B_1}P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [T]_{B_2}.$$

□

Contoh 7.4.2 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah operator linier didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 3x+y \end{bmatrix}, \ \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Misalkan

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{dan} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

adalah basis terurut untuk $\mathbb{R}^2$. Dapatkan matriks dari T relatif terhadap B_1 dan gunakan Teorema 7.4.1 untuk mendapatkan matriks dari T relatif terhadap B_2.

Jawab Karena

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}\quad\text{dan}\quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},$$

didapat

$$[T]_{B_1}=\left[\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}_{B_1}\ \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}_{B_1}\right]=\begin{bmatrix}-5&-3\\6&5\end{bmatrix}.$$

matriks transisi dari B_2 ke B_1 adalah

$$P=[I]_{B_2}^{B_1}=\left[\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}_{B_1}\ \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}_{B_1}\right]=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

Gunakan Teorema 7.4.1 didapat

$$\begin{aligned}[T]_{B_2} &= P^{-1}[T]_{B_1}P=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-3\\6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-3&2\\-1&3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

Secara umum, bila A dan B matriks persegi adalah representasi untuk operator linier yang sama, maka kedua matriks tersebut dinamakan **similar**. Dengan menggunakan Teorema 7.4.1 dapat didefinisikan similaritas untuk matriks-matriks persegi tampa merujuk pada suatu operator linier.

Definisi 7.4.1 Misalkan A dan B matriks berukuran $n\times n$. Dikatakan bahwa A **similar** dengan B bila ada suatu matriks P yang punya invers sedemikian hingga $B=P^{-1}AP$.

□

Pengertian dari similaritas menjelaskan suatu relasi diantara matriks persegi yang mempunyai sifat:

1. Similar dengan dirinya sendiri $A=I^{-1}AI$ untuk sebarang matriks persegi A dan matriks identitas I yang sesuai ukurannya.

2. Simetri, Bila A similar dengan B, maka B similar dengan A. Sebab bila $B = P^{-1}AP$, maka $A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ$ dimana $Q = P^{-1}$.

3. Transitif, Bila A similar dengan B, dan B similar dengan C, maka A similar dengan C. Sebab bila $B = P^{-1}AP$ dan $C = Q^{-1}BQ$ maka

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ) = R^{-1}AR,$$

dimana $R = PQ$. Terlihat bahwa similaritas diantara matriks-matriks adalah relasi **ekivalen**.

Pada pembahasan berikut ini digunakan notasi $A = (T, B, B')$ yang menyatakan representasi matriks dari T, dimana $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linier dengan V dan W berdimensi hingga dan masing-masing B dan B' adalah basis terurut untuk V dan W.

7.5 BENTUK NORMAL DIAGONAL SATUAN

Diberikan pemetaan linier $T : V \to W$ terhadap basis terurut B untuk ruang vektor V dan basis terurut B' untuk ruang vektor W, bagaimana cara memilih basis terurut $\overline{B}$ untuk ruang vektor V dan basis terurut $\overline{B'}$ untuk ruang vektor W supaya representasi matriks $\overline{A} = (T, \overline{B}, \overline{B'})$ mempunyai bentuk normal diagonal satuan yang sederhana, yaitu matriks:

$$\begin{bmatrix} I_r & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

dengan I_r adalah matriks satuan berukuran $r \times r$ dan $r \leq \min\{\dim(V), \dim(W)\}$. Untuk memperoleh cara yang dimaksud ini digunakan sifat berikut.

SIFAT Misalkan pemetaan linier $T : V \to W$, masing-masing dimensi V dan W adalah m dan n dengan $\dim(\mathrm{Im}(T)) = r$. Maka ada basis terurut $\overline{B}$ dari V dan basis terurut $\overline{B'}$ dari W sehingga representasi matriks dari T berbentuk normal diagonal satuan, yaitu

$$\overline{A} = (f,\overline{B},\overline{C}) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I_r & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{cc} \updownarrow & r \\ & \\ \updownarrow & n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ r & m-r \end{array} & \end{array}$$

Bukti Dari sifat dimensi pemetaan linier didapat,

$$\dim(N(T)) = \dim(V) - \dim(R(T)) = m - r.$$

Misalkan $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ adalah suatu basis terurut dari $N(T)$. Perluas basis ini sampai diperoleh basis terurut

$$\overline{B} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$$

dari ruang vektor V. Dari pengertian kernel didapat

$$T(\boldsymbol{v}_{r+1}) = \mathbf{0}_W, \ldots, T(\boldsymbol{v}_m) = \mathbf{0}_W.$$

Selanjutnya pilih vektor-vektor

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r \in R(T)$$

yang memenuhi

$$T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, \ldots, T(\boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{w}_r.$$

Jelas bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ adalah suatu basis terurut dari $R(T)$. Selanjutnya perluas basis ini sampai diperoleh basis terurut

$$\overline{B'} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$$

dari ruang vektor W. Jadi, terhadap basis terurut $\overline{B}$ dari ruang vektor V dan basis terurut $\overline{B'}$ dari ruang vektor W, pemetaan T didefinisikan oleh

$$T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, \ldots, T(\boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{w}_r, T(\boldsymbol{v}_{r+1}) = \mathbf{0}_W, \ldots, T(\boldsymbol{v}_m) = \mathbf{0}_W.$$

Dari definisi ini terlihat bahwa representasi matriks $\overline{A} = (T,\overline{B},\overline{B'})$ adalah:

$$\overline{A} = (T,\overline{B},\overline{C}) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I_r & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{cc} \updownarrow & r \\ & \\ \updownarrow & n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ r & m-r \end{array} & \end{array}$$

■

Contoh 7.5.1 Misalkan representasi matriks dari suatu pemetaan linier terhadap basis baku terurut, diberikan oleh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dapatkan basis-basis terurut dari V dan W supaya dengan basis-basis ini pemetaan linier mempunyai representasi matriks berbentuk normal diagonal satuan.

Jawab Pertama, tentukan kernel dari A dengan menyelesaikan persamaan $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, didapat:

$$\ker(A) = \left\{ x(7,-5,1)' \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

atau

$$\ker(A) = \left\langle \left\{ (7,-5,1)' \right\} \right\rangle.$$

Perluas basis dari kernel sehingga diperoleh basis terurut

$$\overline{B} = \left\{ (1,0,0)', (0,1,0)', (7,-5,1)' \right\}.$$

Selanjutnya dapatkan basis terurut dari Image A sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Perluas basis terurut ini sehingga diperoleh:

$$\overline{B'} = \left\{ (1,2,3)', (2,3,5)', (1,0,0)' \right\}$$

adalah basis terurut dari ruang vektor W. Selanjutnya selidiki dengan basis-basis terurut $\overline{B}$ dan $\overline{B'}$, matriks representasi berbentuk normal diagonal satuan sebagaimana berikut ini. Persamaan-persamaan yang memberikan matriks

$$P^{-1} = (T, \overline{B}, B)$$

dengan B basis terurut baku adalah:

$I_V(\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}) = \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (1,0,0)'$,

$I_V(\bar{\mathbf{v}}_2) = \bar{\mathbf{v}}_2 = (0,1,0)'$
dan
$I_V(\bar{\mathbf{v}}_3) = \bar{\mathbf{v}}_3 = (7,-5,1)'$.
Sehingga didapat:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara serupa, persamaan-persamaan yang memberikan matriks $Q^{-1} = (T,\overline{B'},B)$ dengan B' basis terurut baku adalah:
$I_W(\bar{\boldsymbol{w}}_1) = \bar{\boldsymbol{w}}_1 = (1,2,3)'$,
$I_W(\bar{\boldsymbol{w}}_2) = \bar{\boldsymbol{w}}_2 = (2,3,5)'$
dan
$I_W(\bar{\boldsymbol{w}}_3) = \bar{\boldsymbol{w}}_3 = (1,0,0)'$.
Sehingga didapat:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dan matriks $\bar{A} = QAP^{-1}$ diberikan oleh:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

7.6 Vektor-Karakteristik dan Ruang-Karakteristik Tergeneralisir

Misalkan $T : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ suatu pemetaan linier pada ruang vektor $\mathbb{U}$ berdimensi n atas lapangan $\mathbb{F}$. Bila $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ dan $\lambda \in \mathbb{F}$ memenuhi $T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$, maka $\boldsymbol{u}$ dinamakan suatu vektor-eigen dari T yang bersesuaian dengan nilai-eigen λ.

Misalkan A suatu matriks ukuran $n \times n$ dengan elemen-elemennya di suatu lapangan $\mathbb{F}$. Bila ada vektor tak nol $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ dan skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, maka $\boldsymbol{x}$ dikatakan suatu vektor-eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan nilai-eigen λ.

Misalkan matriks $A = (T, B, B)$ adalah representasi dari pemetaan linier $T : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ terhadap basis terurut $\mathbb{B}$ dari ruang vektor $\mathbb{U}$. Selanjutnya bila $\rho_{\mathbb{B}}$ adalah pemetaan koordinat dari $\mathbb{U}$ ke $\mathbb{F}^n$, maka $A = \rho_{\mathbb{B}} T \rho_{\mathbb{B}}^{-1}$ dan $\boldsymbol{x} = \rho_{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u})$. Jadi

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} &\Leftrightarrow (\rho_{\mathbb{B}} T \rho_{\mathbb{B}}^{-1})(\rho_{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u})) = \lambda\rho_{\mathbb{B}}(\boldsymbol{u}) \\ &\Leftrightarrow \rho_{\mathbb{B}}(T(\boldsymbol{u})) = \rho_{\mathbb{B}}(\lambda\boldsymbol{u}) \\ &\Leftrightarrow T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Teorema 7.6.1 Bila $T : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ suatu pemetaan linier dan masing masing matriks $A = (T, \mathbb{B}, \mathbb{B})$ dan $\overline{A} = (T, \overline{\mathbb{B}}, \overline{\mathbb{B}})$ adalah representasi dari T dengan basis terurut yang berbeda, maka nilai-eigen dari A sama dengan nilai-eigen dari $\overline{A}$.

Bukti Misalkan $P = (I_{\mathbb{U}}, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{B}})$ matriks perubahan basis dari basis $\mathbb{B}$ ke basis $\overline{\mathbb{B}}$, maka $\overline{A} = PAP^{-1}$. Bila $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ didapat $(PAP^{-1})(P\boldsymbol{x}) = \lambda(P\boldsymbol{x})$. Sehingga diperoleh $\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}$ dimana $\overline{\boldsymbol{x}} = P\boldsymbol{x}$. Terlihat bahwa matriks A dan $\overline{A}$ mempunyai nilai-eigen yang sama.

$\square$

Cara Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ dan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ dengan $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$, maka $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, dengan I adalah matriks identitas berukuran ukuran $n \times n$. Persamaan homogin $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ mempunyai jawab nontrivial bila dan hanya bila $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ dinamakan persamaan kharakteristik dari matriks A yang merupakan persamaan polinomial dalam λ dengan derajad n.

Contoh 7.6.1 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{bmatrix}) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Untuk $\lambda = 2$ didapat:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 2x_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

sedangkan untuk $\lambda = 1$ didapat:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

7.7 Pendiagonalan Matriks Persegi

Pendiagonalan matriks persegi merupakan suatu alat yang berguna bagi matriks yang bisa didiagonalkan dan banyak aplikasinya. Berikut ini diberikan sifat mengenai pendiagonalan suatu matriks persegi.

Teorema 7.7.1 Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen di $\mathbb{F}$ similar dengan matriks diagonal bila dan hanya bila eigenvektor-eigenvektornya membentang ruang $\mathbb{F}^n$ (span $\mathbb{F}^n$).

Bukti Misalkan $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ adalah vektor-eigen dari matriks A dengan

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle = \mathbb{F}^n.$$

Jadi matriks

$$Q = [\boldsymbol{x}_1 \,|\, \boldsymbol{x}_2 \,|\, \ldots \,|\, \boldsymbol{x}_n]$$

mempunyai invers, misalkan $Q^{-1} = P$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned} AQ &= A\,[\boldsymbol{x}_1 \,|\, \boldsymbol{x}_2 \,|\, \ldots \,|\, \boldsymbol{x}_n] \\ &= [A\boldsymbol{x}_1 \,|\, A\boldsymbol{x}_2 \,|\, \ldots \,|\, A\boldsymbol{x}_n] \\ &= [\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \,|\, \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \,|\, \ldots \,|\, \lambda_n\boldsymbol{x}_n] \\ &= [\boldsymbol{x}_1 \,|\, \boldsymbol{x}_2 \,|\, \ldots \,|\, \boldsymbol{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= Q\overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} = Q^{-1}AQ \Rightarrow \overline{A} = PAP^{-1}. \end{aligned}$$

□

Contoh 7.7.1 Selidiki apakah matriks dibawah ini bisa didiagonalkan!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dalam pembahasan sebelum didapat bahwa

$$A\mathbf{X}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{X}_1 \text{ dan } A\boldsymbol{X}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{X}_2$$

dengan

$$\lambda_1 = 2,\ \boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \lambda_2 = 1,\ \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks

$$Q = [\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

didapat

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa matriks A dapat didiagonalkan menjadi matriks $\bar{A}$.

□

Teorema 7.7.2 Bila matriks A berukuran $n \times n$ mempunyai n eigenvalue yang berbeda satu dengan yang lainnya, maka eigenvektor-eigenvektornya bebas linier.

Bukti Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah eigenvalue-eigenvalue yang berbeda satu dengan yang lainnya dan $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ adalah eigenvektor-eigenvektor. yang bersesuaian. Dengan menggunakan induksi dibuktikan bahwa eigenvektor eigenvektor tsb. bebas linier. Misalkan bahwa

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_k$$

bebas linier dan untuk

$$a_1 \boldsymbol{X}_1 + a_2 \boldsymbol{X}_2 + \ldots + a_k \boldsymbol{X}_k + a_{k+1} \boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{7.6}$$

Sehingga didapat

$$A(a_1\boldsymbol{X}_1 + a_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + a_k\boldsymbol{X}_k + a_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}) = \mathbf{0}$$

atau

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{X}_1 + a_2\lambda_2\boldsymbol{X}_2 + \ldots + a_k\lambda_k\boldsymbol{X}_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{7.7}$$

Kalikan λ_{k+1} pada Persamaan 7.6 selanjutnya hasilnya kurangkan pada Persamaan 7.7 didapat:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{X}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\boldsymbol{X}_2 + \ldots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\boldsymbol{X}_k = \mathbf{0}.$$

Karena $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k$ bebas linier dan $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$, maka haruslah

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

. Sehingga Persamaan 7.6 menjadi $a_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{0}$ dan karena $\boldsymbol{X}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, maka haruslah $a_{k+1} = 0$. Terlihat bahwa bila dari kenyataan Persamaan 7.6 menjadi $a_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1} = \mathbf{0}$ dan karena dipenuhi maka berakibat

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1} = 0,$$

hal ini menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{X}_{k+1}$$

adalah bebas linier.

□

Kesimpulan 7.7.1 Bila matriks A berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen di lapangan $\mathbb{F}$ mempunyai eigenvalue-eigenvalue yang berbeda, maka matriks A dapat didiagonalkan.

Bukti Dengan menggunakan dua hasil sebelumnya didapat bahwa, eigenvektor-eigenvektor yang bersesuaian dengan eigenvalue-eigenvalue merupakan vektor-vektor yang bebas linier. Sehingga vektor-vektor ini membentangkan keseluruhan ruang $\mathbb{F}^n$. Akibatnya matriks A dapat didiagonalkan.

□

Contoh 7.7.2 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}.$$

Polinomial kharakteristik A adalah

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -6 & 11 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 11 & \lambda - 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$

atau

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda) + 11\lambda - 6 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

Didapat $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 1$. Sehingga didapat pasangan eigenvalue-eigenvektor:

$$\lambda_1 = 3, \boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 2, \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \lambda_3 = 1, \boldsymbol{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

dan

$$Q = [\boldsymbol{X}_1\, \boldsymbol{X}_2\, \boldsymbol{X}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Matriks $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 1$.

□

MATRIKS INVARIAN

Suatu matriks persegi invarian adalah suatu sifat dari matriks yang tidak berubah bila matriks ditransformasi dengan suatu cara tertentu. Eigenvalue-eigenvalue dari suatu matriks adalah invarian dibawah suatu transformasi kesemilaran, begitu juga trace dan determinannya. (Trace suatu matriks A adalah jumlah keseluruhan eleme-elemen diagonalnya: $\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$).

Teorema 7.7.3 Bila λ adalah eigenvalue dari matriks A, maka λ juga eigenvalue dari suatu matriks PAP^{-1}

Bukti Misalkan

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{Y} = P\boldsymbol{X}$$

dengan P matriks yang punya invers, jadi $\boldsymbol{X} = P^{-1}\boldsymbol{Y}$. Sehingga didapat

$$A(P^{-1}\boldsymbol{Y}) = \lambda(P^{-1}\boldsymbol{Y}) \Rightarrow (PAP^{-1})\boldsymbol{Y} = \lambda\boldsymbol{Y}.$$

Terlihat bahwa λ juga eigenvalue dari matriks PAP^{-1}.

$\square$

Teorema 7.7.4 Bila ABC adalah hasil kali matriks persegi, maka $\mathbf{tr}(ABC) = \mathbf{tr}(BCA)$.

Bukti

$$(ABC)_{i,l} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l}\right).$$

Didapat

$$\begin{aligned}
\mathbf{tr}(ABC) &= \sum_{i=1}^{n}(ABC)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}c_{k,i}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}c_{k,i}a_{i,j}\right)\right) = \mathbf{tr}(BCA).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 7.7.5 Trace dan determinan dari suatu matriks persegi adalah invarian dalam suatu tranformasi similar. Lagi pula bila matriks A dapat didiagonalkan dengan eigenvalue $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, maka

$$\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \quad \text{dan} \quad \mathbf{det}(A) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

Bukti Dari hasil sebelumnya, $\mathbf{tr}(PAP^{-1}) = \mathbf{tr}(P^{-1}PA) = \mathbf{tr}(A)$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned}\mathbf{det}(PAP^{-1}) &= \mathbf{det}(P)\mathbf{det}(A)\mathbf{det}(P^{-1})\\ &= \mathbf{det}(A)(\mathbf{det}(P)\mathbf{det}(P^{-1}))\\ &= \mathbf{det}(A)\mathbf{det}(PP^{-1})\\ &= \mathbf{det}(A)\mathbf{det}(I) = \mathbf{det}(A).\end{aligned}$$

Jelas bahwa bila $PAP^{-1} = \bar{A}$ dengan $\bar{A}$ matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, maka

$$\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{dan} \quad \mathbf{det}(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

$\square$

Contoh 7.7.3 Diberikan matriks matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1.$$

Sedangkan trace dari matriks A adalah

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{tr}(A) = 0 + 0 + 6 = 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 2 + 1 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Sehinggadidapat

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{det}(A) = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \\ \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3(2)(1) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{det}(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

$\square$

MULTIPLISITAS GEOMETRI dan ALJABAR

Misalkan λ adalah suatu eigenvalue dari pemetaan linier $T : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$. Himpunan semua eigenvektor-eigenvektor yang bersesuaian dengan eigenvalue λ beserta vektor nol dinamakan ruang eigen (eigen space) dari $\mathbb{U}$ dinotasikan oleh $\mathbf{E}_\lambda(\mathbb{U})$. Ruang eigen $\mathbf{E}_\lambda(\mathbb{U})$ adalah ruang bagian dari ruang vektor $\mathbb{U}$, sebab merupakan kernel dari pemetaan

$$(\lambda I_{\mathbb{U}} - A).$$

Dimensi dari subruang $\mathbf{E}_\lambda(\mathbb{U})$ dinamakan ***multiplisitas geometri*** dari λ dan banyaknya λ yang sama (kembar/rangkap) dinamakan ***multiplisitas aljabar*** dari λ. Misalkan multiplisitas geometri dari λ adalah a dan multiplisitas aljabar dari λ adalah b, maka $a \leq b$

Contoh 7.7.4 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{det}(\lambda I - A) = (\lambda - 4)\ (\lambda - 2)^2.$$

Sehingga didapat

$$\mathbf{E}_4(\mathbb{R}^3) = \mathbf{ker}(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

dan

$$\mathbf{E}_2(\mathbb{R}^3) = \mathbf{ker}(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Terlihat bahwa untuk $\lambda = 4$ ataupun $\lambda = 2$, multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar. Jadi matriks A dapat didiagonalkan.

$\square$

Contoh 7.7.5 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{det}(\lambda I - A) = (\lambda - 4)\ (\lambda - 2)^2.$$

Sehingga didapat

$$\mathbf{E}_4(\mathbb{R}^3) = \mathbf{ker}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

dan

$$\mathbf{E}_2(\mathbb{R}^3) = \mathbf{ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Terlihat bahwa untuk $\lambda = 4$ multiplisitas geometri $=$ multiplisitas aljabar, tetapi untuk $\lambda = 2$ multiplisitas geometri $<$ multiplisitas aljabar. Dengan demikian matriks A tidak dapat didiagonalkan.

$\square$

Teorema 7.7.6 Bila $\mathbf{det}(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = p(\lambda)$, maka

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I = \mathbf{0}.$$

Bukti Bila $PAP^{-1} = D$ dimana matriks D adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ adalah eigenvalue-eigenvalue dari matriks A. Maka didapat :

$$\begin{aligned} A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 &= P^{-1}(D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_0 I)P \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} P \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} P \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\square$

Contoh 7.7.6 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{det}(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Didapat matriks $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 36 & -60 & 25 \\ 150 & -239 & 90 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 36 & -66 & 36 \\ 216 & -360 & 150 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \\ 66 & -121 & 66 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} (6-6) & (-11+11) & (6-6) \\ (36-36) & (-60+66-6) & (25-36+11) \\ (150-216+66) & (-239+360-121) & (90-150+66-6) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

7.8 Orthogonal

Misalkan $\mathbb{V}$ suatu ruang vektor atas lapangan riil $\mathbb{R}$. Hasil kali dalam riil (real inner product) juga dinamakan bilinier adalah fungsi dari $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ ke $\mathbb{R}$ dinotasikan oleh $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ yang memenuhi

- ☺ $\langle r_1 \boldsymbol{u}_1 + r_2 \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = r_1 \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + r_2 \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle$ dan $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (Linier).
- ☺ $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$ untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ (Simetri).
- ☺ $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ untuk semua $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ dan $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ (semi definit positip).

Bila

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)', \ \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

maka hasil kali dalam baku diberikan oleh

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(juga dinamakan dot product dalam geometri Euclide). Bila vektor-vektor $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ disajikan dalam vektor kolom, maka

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}.$$

Suatu ***norm*** dari ruang vektor $\mathbb{V}$ ke lapangan riil $\mathbb{R}$ adalah suatu fungsi dinotasikan oleh $\|\cdot\|$ yang memenuhi

- ☑ $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ untuk semua $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ dan $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (Definit positip).
- ☑ $\|r\boldsymbol{v}\| = |r|\,\|\boldsymbol{v}\|$ untuk semua $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, r \in \mathbb{R}$
- ☑ $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ untuk semua $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ (Pertaksamaan segitiga).

NORM EUCLIDE

Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ norm Euclide diberikan oleh

$$\|\boldsymbol{u}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dalam hal ini dinamakan norm-p. Khusus untuk $p = 2$ cukup ditulis

$$\|\boldsymbol{u}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Misalkan $\mathbb{V}$ suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

- ☻ Dua vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ dikatakan ***orthogonal*** bila $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

- ☻ Suatu himpunan dari vektor-vektor adalah ***orthogonal*** bila setiap dua pasang vektor orthogonal.
- ☻ Suatu vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ adalah ***ternormalisir*** bila $\|\boldsymbol{u}\| = 1$.
- ☻ Dua vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ dikatakan ***orthonormal*** bila

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1 \quad \text{dan} \quad \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0.$$

Setiap vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ bisa dinormalisir kedalam bentuk $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$.

Contoh 7.8.1 Himpunan vektor-vektor

$$\left\{(1,0)', (0,1)'\right\}$$

adalah orthonormal, tetapi

$$\left\{(1,1)', (-1,1)'\right\}$$

adalah orthogonal. Himpunan yang terakhir ini dapat dijadikan orthonormal sebagai mana himpunan berikut ini

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)', \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)'\right\}.$$

□

Perhatikan bahwa norm $\boldsymbol{u} = (x, y)'$ diberikan oleh:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{xx^* + yy^*}$$

dimana x^* adalah konjuget dari x bila x adalah bilangan kompleks. Suatu basis orthonormal dari suatu ruang vektor mempunyai beberapa kemanfaatan dan basis baku dari ruang vektor $\mathbb{R}^n$ adalah orthonormal, yaitu basis baku dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$ adalah himpunan

$$\left\{(1,0,0)', (0,1,0)', (0,0,1)'\right\}.$$

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$, matriks A dikatakan matriks simetri bila $A = A'$ dan dikatakan anti-simetri (skew-symmetric) bila $A = -A'$. Matriks simetri bermaanfaat dalam bentuk kuadrat, misalnya

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2$$

Masalah bentuk kuadrat akan dibahas pada pembahasan mendatang. Berikut ini diberikan dua sifat penting dari matriks simetri yang sangat berguna pada pembahasan mendatang, khususnya pada pembahasan masalah dekomposisi spektral, faktorisasi QR dan dekomposisi nilai singular.

Teorema 7.8.1 Bila matriks A simetri dengan elemen-elemen riil dan berlaku

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

dengan $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, maka λ selalu merupakan bilangan riil.

Bukti Digunakan tanda * untuk menyatakan komplek sekawan (complex conjugate). Kedua ruas dari

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

kalikan dengan $\boldsymbol{x}^{*'}$ didapat

$$\boldsymbol{x}^{*'} A\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x}). \tag{7.8}$$

Persamaan7.8 kedua ruas ditranspose-konjuget didapat

$$\boldsymbol{x}^{*'} A\boldsymbol{x} = \lambda^*(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x}). \tag{7.9}$$

Persamaan 7.9 dikurangi Persamaan 7.8 didapat

$$0 = (\lambda^* - \lambda)(\boldsymbol{x}^{*'}\boldsymbol{x}) \Rightarrow 0 = \lambda^* - \lambda \quad (\text{sebab } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}).$$

Jadi $\lambda^* = \lambda$, maka dari itu λ adalah bilangan riil.

□

Teorema 7.8.2 Misalkan A matriks simetri berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen riil. Bila λ dan μ adalah sebarang dua eigenvalue dari matriks A dengan masing-masing eigenvektor adalah $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ dan $\lambda \neq \mu$, maka $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

Bukti Kedua ruas persamaan

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \text{kalikan dengan} \quad \boldsymbol{y}'$$

didapat

$$\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}). \tag{7.10}$$

Kedua ruas persamaan

$$A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y} \quad \text{kalikan dengan} \quad \boldsymbol{x}'$$

didapat

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{y} = \mu(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}). \tag{7.11}$$

Kedua ruas Persamaan 7.11 ditranspose didapat

$$\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{x} = \mu(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}). \tag{7.12}$$

Persamaan 7.12 dikurangi Persamaan 7.10 didapat

$$0 = (\mu - \lambda)(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{x}) \Rightarrow 0 = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\text{sebab } \lambda \neq \mu).$$

□

Contoh 7.8.2 Diberikan matriks simetri

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari A didapat dari polininomial karakteristik matriks A yaitu $p(\lambda)$ dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - A) = 0$, didapat

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 17\lambda^2 + 90\lambda - 144 \\ &= (\lambda - 8)\,(\lambda - 6)\,(\lambda - 3)\,. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa nilai-eigen dari A berbeda, yaitu $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$ dan $\lambda_3 = 3$. Vektor-eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-eigen adalah:

$$\lambda_1 = 8 \Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 6 \Rightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3} \rangle = 0 \quad \text{dan} \quad \langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle = 0\,.$$

Terlihat bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2}$ saling orthogonal.

□

MATRIKS ORTHOGONAL

Matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan ***orthogonal*** bila $AA' = I = A'A$ yaitu

$$A^{-1} = A'.$$

Teorema 7.8.3 Bila B_i dan K_j masing-masing menyatakan baris ke-i dan kolom ke-j dari suatu matriks orthogonal A berukuran $n \times n$, maka

$$\{B_i, i = 1, \ldots, n\} \quad \text{dan} \quad \{K_j, j = 1, \ldots, n\}$$

adalah himpunan dari vektor-vektor orthonormal.

Bukti Dari elemen perkalian matriks $(AA')_{i,j} = \langle B_i, B_j \rangle$ dan fakta $AA' = I$ didapat

$$\langle B_i, B_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{yang lainnya}, \end{cases}$$

terlihat bahwa baris-baris dari A adalah orthonormal. Bila A orthogonal, maka A' juga orthogonal, jadi kolom-kolom dari A juga orthonormal. $\square$

Contoh 7.8.3 Bila matriks A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

maka

$$AA' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

. Juga dapat dicek bahwa $A'A = I$. Jadi A adalah matriks orthogonal. $\square$

Contoh 7.8.4 Bila matriks A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

maka

$$AA' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I\ .$$

Juga dapat dicek bahwa $A'A = I$. Jadi A adalah matriks orthogonal. □

Teorema 7.8.4 Suatu pemetaan linier yang direpresentasikan oleh suatu matriks orthogonal adalah mempertahankan jarak dari suatu vektor, yaitu bila A suatu matriks orthogonal, maka $||A\boldsymbol{x}|| = ||x||$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Bukti Dari persamaan

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \qquad \text{dan} \qquad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x},$$

didapat

$$||\boldsymbol{x}||^2 = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}.$$

Oleh karena itu

$$||A\boldsymbol{x}||^2 = \boldsymbol{x}'A'A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}||^2 \ \Rightarrow\ ||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||.$$

□

Contoh 7.8.5 Diberikan matriks orthogonal

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{dan sebarang} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

maka dapat ditunjukkan bahwa $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ sebagai mana berikut ini:

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \\ x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \end{bmatrix} \right\| =$$

$$\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2 + x_1^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2}$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|\boldsymbol{x}\|.$$

$\square$

KOMENTAR:

Karena matriks A mempunyai eigenvalue-eigenvalue yang berbeda, maka dapat didiagonalkan menjadi matriks

$$Q^{-1}AQ$$

dengan matriks

$$Q = [\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\ldots|\boldsymbol{x}_n] \quad \text{dengan} \quad \boldsymbol{x}_i, i = 1,\ldots,n$$

adalah eigenvektor-eigenvektor dari A yang sesuai dengan eigenvaluenya. Berdasarkan hasil sebelumnya vektor-vektor

$$\boldsymbol{x}_i, \;\; i = 1,\ldots,n$$

saling orthogonal. Bila vektor-vektor ini dinormalkan maka didapat matriks orthogonal

$$P = \left[\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \;\middle|\; \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; \frac{\boldsymbol{x}_n}{\|\boldsymbol{x}_n\|} \right],$$

dengan demikian matriks $P'AP$ juga matriks diagonal.

Contoh 7.8.6 Diberikan matriks simetri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda-1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda-2 \end{bmatrix} \right|.$$

Sehingga didapat polinomial kharakteristik dari matriks A adalah

$$p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)-2 = \lambda^2-3\lambda = \lambda(\lambda-3).$$

Untuk eigenvalue $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 3$ didapat masing-masing eigenvektor yang sesuai adalah:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Bila matriks

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} & \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} \end{bmatrix},$$

maka pendiagonalan dari matriks A adalah $P'AP$ dan hasilnya diberikan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

CATATAN:

Berkaitan dengan matriks simetri dengan elemen-elemen riil. Sebagaimana telah diketahui matriks simetri pasti semua eigenvaluenya adalah riil, tetapi tidak menjamin bahwa semua eigenvalue-eigenvalue ini berbeda satu dengan yang lainnya, bila semuanya berbeda maka pasti matriks simetri ini bisa didiagonalkan.

Bila ada yang rangkap, maka hal ini ada dua kasus. Yang pertama bila masing-masing multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar, maka pendiagonalan matriks bisa dilakukan. Kedua, bila masing-masing multiplisitas geometri $<$ multiplisitas aljabar, maka pendiagonalan tidak dapat dilakukan.

Pada khasus yang kedua tentunya hanya beberapa eigenvektor yang orthogonal satu dengan yang lainnya, yaitu yang berkaitan dengan eigenvalue-eigenvalue yang saling berbeda satu dengan lainnya. Tetapi untuk eigenvalue yang rangkap walaupun memberikan eigenvektor-eigenvektor yang saling bebas linier tetapi tidak menjamin bahwa eigenvektor-eigenvektor ini orthogonal. Oleh karena itu matriks yang kolom-kolomnya merupakan eigenvektor-eigenvektor bukan matriks orthogonal. Tetapi dengan beberapa modifikasi matriks tsb. bisa dijadikan matriks orthogonal, cara pengorthogonalan ini mengarah apa yang dinamakan proses ***Pengorthogonalan Gram-Schmidt*** . Contoh berikut memberikan kejelasan mengenai pengorthogonalan suatu matriks.

Contoh 7.8.7 Diberikan suatu matriks simetri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Polinomial kharakteristik dari A diberikan oleh

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

Pasangan eigenvalue eigenvektor diberikan oleh

$$\lambda_1 = 2, \boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 2, \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};\ \lambda_3 = -1, \boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle = 0$ tetapi $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 1 \neq 0$. Penormalan dari $\boldsymbol{x}_2$ dan $\boldsymbol{x}_3$ didapat :

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Untuk memperoleh suatu vektor $\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}$ supaya $\langle \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0$, sebagai berikut. Misalkan $\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + a\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1$, didapat

$$\boldsymbol{x}_2'\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + a\boldsymbol{x}_2'\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2'\boldsymbol{x}_1$$

atau

$$\langle \bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{x}_2 \rangle + a\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \Rightarrow a = \frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 \rangle}.$$

Sehingga didapat

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{x}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 \rangle} \boldsymbol{x}_2.$$

Jadi

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dengan menormalkan vektor $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}$ didapat:

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}}{\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Jadi matriks $P = [\boldsymbol{p}_1 \,|\, \boldsymbol{p}_2 \,|\, \boldsymbol{p}_3]$ diberikan oleh:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow P'P = I = PP' \ (P \text{ matriks orthogonal}).$$

Sehingga didapat :

$$P'AP = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{3}} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\square$

7.9 PROSES ORTHOGONAL GRAM-SCHMIDT

Dalam bagian ini dibahas proses pengorthogonalan dari **GRAM-SCHMIDT**. Diberikan himpunan vektor-vektor yang bebas linier

$$S = \{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n\},$$

dari S dibentuk himpunan vektor-vektor orthormal

$$T = \{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \ldots, \boldsymbol{T}_n\}$$

sebagi berikut:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_1 &= \boldsymbol{X}_1 \Rightarrow \boldsymbol{T}_1 = \frac{\boldsymbol{t}_1}{\|\boldsymbol{t}_1\|} \\
\boldsymbol{t}_2 &= \boldsymbol{X}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_1 \rangle} \quad \boldsymbol{t}_1 \Rightarrow \boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{t}_2}{\|\boldsymbol{t}_2\|} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\boldsymbol{t}_n &= \boldsymbol{X}_n - \frac{\langle \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{t}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_1 \rangle} \quad \boldsymbol{t}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{t}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_2 \rangle} \quad \boldsymbol{t}_2 - \ldots - \frac{\langle \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{t}_{n-1} \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_{n-1}, \boldsymbol{t}_{n-1} \rangle} \quad \boldsymbol{t}_{n-1} \Rightarrow \boldsymbol{T}_n = \frac{\boldsymbol{t}_n}{\|\boldsymbol{t}_n\|}
\end{aligned}$$

Didapat matriks orthogonal

$$T = [\boldsymbol{T}_1 \,|\, \boldsymbol{T}_2 \,|\, \ldots \,|\, \boldsymbol{T}_n].$$

Contoh 7.9.1 Diberikan matriks dengan kolom-kolom merupakan vektor-vektor yang bebas linier, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ dan $\boldsymbol{X}_3$ adalah vektor-vektor kolom dari A, maka

$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T}_1 = \frac{\boldsymbol{t}_1}{\|\boldsymbol{t}_1\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\langle \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{t}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_1 \rangle} \boldsymbol{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T}_2 = \frac{\boldsymbol{t}_2}{\|\boldsymbol{t}_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\langle \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{t}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_1 \rangle} \boldsymbol{t}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{t}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_2 \rangle} \boldsymbol{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T}_3 = \frac{\boldsymbol{t}_3}{\|\boldsymbol{t}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa matriks $T = [\boldsymbol{T}_1\ \boldsymbol{T}_2\ \boldsymbol{T}_3]$ adalah matriks orthogonal. □

PROYEKSI dan GENERAL INVERS

Proses orthogonal Gram-Schmid erat kaitannya dengan apa yang dinamakan proyeksi sebagaimana akan terlihat dalam pembahasan berikut ini. Ada kalanya sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ tidak mempunyai penyelesaian secara analitik (eksak). Tetapi bila model linier yang dikaji ini merupakan suatu problem nyata yang dijumpai, maka diperlukan suatu alternatif penyelesaian untuk menjawab problem yang ada sehingga penyelesaian yang didapat cukup untuk menjawab problem. Suatu contoh berikut menjelaskan hal ini: Diberikan sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Jawab eksak dari persamaan ini tidak ada. Dalam hal ini, selalu bisa didapat penyelesaian pendekatan $\boldsymbol{x}$ melalui penggantian $\boldsymbol{y}$ dengan vektor $\hat{\boldsymbol{y}}$ di ruang kolom dalam A yang dekat dengan $\boldsymbol{y}$ dan sebagi penggantinya selesaikan persamaan $A\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{y}}$.

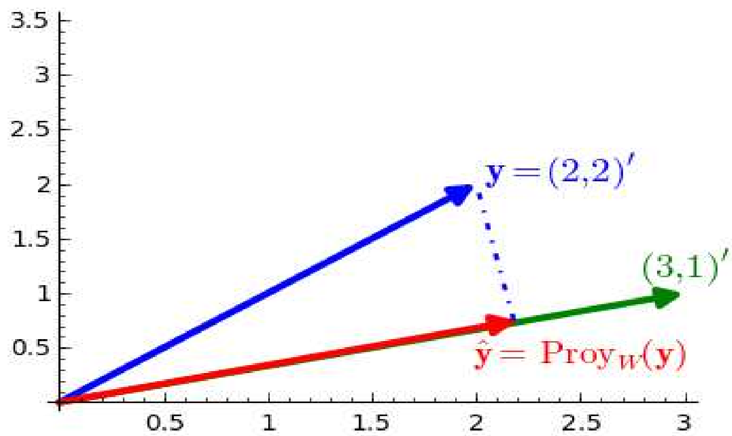
Untuk kasus yang diberikan dalam Persamaan 7.13 ruang kolom dari A adalah span

$$W = \left\{ r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dengan demikian dipilih $\hat{\boldsymbol{y}} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sehingga panjang

$$\|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}\| = \left\|\left[\begin{array}{c}2\\2\end{array}\right] - r\left[\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right]\right\|$$

sekecil mungkin. Gambar berikut secara geometri menjelaskan pilihan dari vektor $\hat{\boldsymbol{y}}$.



PEMBAHASAN MASALAH :

Sebelum menyelesaikan masalah yang ada diberikan pengertian berikut. Misalkan W suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^n$ dan tulis

$$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

sebagai

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2,$$

dengan $\boldsymbol{y}_1 \in W$ dan $\boldsymbol{y}_2 \in W^\perp$, maka $\boldsymbol{y}_1$ dinamakan proyeksi dari $\boldsymbol{y}$ pada W dan dinotasikan oleh $\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{Proy}_w(\boldsymbol{y})$. Selanjutnya diselesaikan masalah persamaan linier

$$\left[\begin{array}{cc}6 & 3\\2 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x_1\\x_2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}2\\2\end{array}\right].$$

Berikutnya pilih ruang bagian $W = \left\langle \left[\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right] \right\rangle$ sehingga didapat ruang bagian orthogonal

$$W^\perp = \left\langle \left[\begin{array}{c}-1\\3\end{array}\right] \right\rangle.$$

Jadi

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Untuk meminimumkan panjang

$$\begin{array}{rcl} \|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\| & = & \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \\ & = & \left\| \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \\ & = & \left\| (\frac{4}{5} - r)\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|, \end{array}$$

dan karena $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ orthogonal, maka haruslah $r = \frac{4}{5}$. Dengan demikian didapat

$$\boldsymbol{y}' = \text{Proy}_w \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa penyelesaian pendekatan adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = \frac{4}{5}$.

Teorema 7.9.1 Misalkan W suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^n$, maka vektor $\hat{\boldsymbol{y}} \in W$ yang dekat ke $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ adalah $\boldsymbol{y}' = \text{Proy}_w(\boldsymbol{y})$.

Bukti Tulis $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ dengan $\boldsymbol{y}_1 \in W$ dan $\boldsymbol{y}_2 \in W^{\perp}$. Jadi $\boldsymbol{y}_1 = \text{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y})$. Untuk sebarang $\boldsymbol{w} \in W$ jarak kuadrat $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{w}\|^2$ diberikan oleh

$$\begin{array}{rcl} \|(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{y}_2\|^2 & = & < (\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{y}_2, (\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{y}_2 > \\ & = & < \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w} > + < \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_2 > \\ & = & \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{y}_2\|^2, \end{array}$$

akan minimal bila $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}_1 = \text{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y})$. $\square$

LANGKAH-LANGKAH MENDAPATKAN PROYEKSI

Suatu cara singkat untuk menentukan proyeksi dari suatu rauang bagian W yang dibangun hanya oleh satu vektor $\boldsymbol{w}$, dengan $V = W \oplus W^{\perp}$ diberikan oleh

$$\mathrm{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) = \frac{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}>}{<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>}\boldsymbol{w}. \tag{7.14}$$

Dalam hal ini adalah:

1. $\dfrac{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}>}{<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>}\boldsymbol{w} \in W.$
2. $\boldsymbol{y} - \dfrac{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}>}{<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>}\boldsymbol{w} \in W^{\perp}$
3. $\boldsymbol{y} = \dfrac{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}>}{<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>}\boldsymbol{w} + \left(\boldsymbol{y} - \dfrac{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}>}{<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>}\boldsymbol{w}\right)$

Persoalan sebelumnya dapat diselesaikan menggunakan hasil dalam (7.14) didapat

$$\mathrm{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2.3+2.1}{3.3+1.1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 7.9.2 Misalkan W suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^n$ dibangun oleh basis orthogonal

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$$

dan misalkan $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, maka

$$\mathrm{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1\rangle}\ \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_k\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{w}_k\rangle}\ \boldsymbol{w}_k. \tag{7.15}$$

Bukti Misalkan

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1\rangle}\ \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_k\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{w}_k\rangle}\ \boldsymbol{w}_k.$$

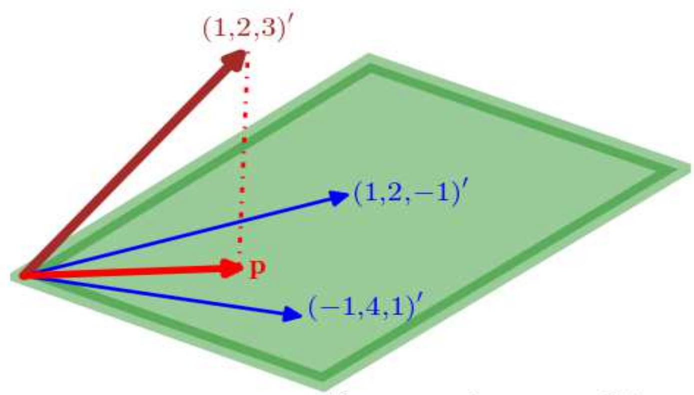
Maka untuk $1 \leq i \leq k$ didapat

$$\langle \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{w}_i\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_i\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{w}_i\rangle}\ \langle \boldsymbol{w}_i,\boldsymbol{w}_i\rangle = 0.$$

Jadi
$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1 \in W^{\perp} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y}_1 = \text{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}).$$
Bila W suatu ruang bagian dari $\mathbb{R}^n$ dengan basis orthonormal
$$\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_k,$$
maka Persamaan (7.15) menjadi
$$\text{Proy}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}) = <\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_1>\boldsymbol{w}_1+\ldots+<\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}_k>\boldsymbol{w}_k. \tag{7.16}$$

$\square$

Contoh 7.9.2 Dapatkan elemen dari ruang bagian W yang dekat dengan vektor $(1,2,3)'$, yang mana W dibangun oleh vektor-vektor $(1,2,-1)',(-1,4,1)'$. Dari gambar diatas, vektor $\boldsymbol{p}$ di bidang $W = \langle\{(1,2,-1)',(-1,4,1)'\}\rangle$ adalah



Gambar : Bidang $W=\langle\{(1,2,-1)',(-1,4,1)'\}\rangle$

proyeksi vektor $(1,2,3)'$ pada bidang $W = \langle\{(1,2,-1)',(-1,4,1)'\}\rangle$. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, didapat basis orthonormal:
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\ (1,2,-1)',\frac{1}{\sqrt{3}}\ (-1,1,1)'.$$
Sehingga proyeksi dari $(1,2,3)'$ pada W adalah:
$$\begin{aligned}\text{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1+4-3)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{3}}(-1+2+3)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\frac{4}{3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Sehingga didapat vektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in W \oplus W^{\perp},$$

elemen dari W dekat ke $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah $\text{Proy}_{\boldsymbol{w}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Contoh 7.9.3 Misalkan dipunyai suatu supply dari 5000 unit S, 4000 unit T dan 2000 unit U. Bahan digunakan dalam pabrik untuk memproduksi P dan Q. Bila setiap unit dari P menggunakan 2 unit S, 0 unit T dan 0 unit U; dan setiap unit dari Q menggunakan 3 unit S , 4 unit T dan 1 unit U. Berapa banyak unit p dari P dan q dari Q yang harus dibuat supaya keseluruhan supply digunakan?

Jawab Model matematika dari persoalan yang ada diberikan oleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Persamaan dari model tidak mempunyai jawab eksak (analitik) sebab vektor

$$\begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

bukan merupakan kombinasi linier dari vektor- vektor

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk meyelesaikan persamaan secara pendekatan, dilakukan hal berikut: Cari vektor didalam ruang bagian W yang merupakan bentuk kombinasi linier

$$p\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}$$

yang dekat dengan vektor

$$\begin{bmatrix}5000\\4000\\2000\end{bmatrix}$$

Dengan melakukan proses Gram-Schmidt di vektor-vektor pembangun yang merupakan basis dari W, didapat basis orthonormal:

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{bmatrix}5000\\4000\\2000\end{bmatrix} &= 5000\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\left(\frac{16000}{\sqrt{17}}+\frac{2000}{\sqrt{17}}\right)\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}\\ &= 5000\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{18000}{17}\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}\\ &= \left(2500-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{18000}{17}\right)\right)\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{18000}{17}\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $p=2500-(\frac{3}{2})(\frac{18000}{17})=911.76$ dan $q=\frac{18000}{17}=1058.82.$ $\square$

PENGGUNAAN GENERAL INVERS dan PSEDO INVERS

Untuk setiap matriks A berukuran $m\times n$ dengan elemen-elemen riil, matriks A^{-} berukuran $n\times n$ dinamakan pendekatan invers (***psedoinverse***) yang memenuhi

$A^{-}\boldsymbol{y}$ adalah penyelesaian pendekatan dari persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Kolom-kolom dari matriks A^{-} adalah penyelesaian pendekatan dari $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, dengan $\boldsymbol{e}_i, i = 1,\ldots,m$ adalah basis baku dari $\mathbb{R}^m$.

Contoh 7.9.4 Dapatkan matriks A^{-} bila

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan hitung

$$A^{-}\begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Jawab Ruang kolom orthonormal dari matriks A adalah span dari vektor-vektor:

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat

$$\text{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix}, \text{Proy}_{\boldsymbol{w}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{17} \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

Dan kolom-kolom matriks A^{-} didapat sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{17} \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{34} \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian didapat matriks A^- adalah:

$$A^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian pendekatan dari persamaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A^- \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 911.76 \\ 1058.82 \end{bmatrix}.$$

Hasil yang didapat sama dengan hasil perhitungan sebelumnya. □

Contoh 7.9.5 Dengan general invers cari garis lurus $y = ax + b$ yang paling mendekati titik

$(1,2), (2,3)$ dan $(3,1)$.

Jawab

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^- = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^- \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Didapat $a = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ dan $b = \frac{8}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 3$. □

Contoh 7.9.6 Dengan general invers dapatkan parabola $y = ax^2 + bx + c$ yang mendekati titik-titik

$$(3,0), (2,0), (1,2), (-1,12).$$

Jelaskan apakah hasilnya pendekatan atau tidak!

Jawab Untuk titik
$$(3,0),(2,0),(1,2),(-1,12)$$
didapat empat persamaan :
$$9a+3b+c=0,\ \ 4a+2a+c=0,\ \ a+b+c=2,\ \ a-b+c=12$$
atau dalam bentuk persamaan matriks
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}.$$
Sehingga didapat
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Cek hasilnya:
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}.$$
Terlihat, hasilnya eksak bukan pendekatan.

□

Catatan dan Komentar Psedo dan General Invers

☻ Psedo invers dan General Invers secara umum berbeda. Umumnya Psedo invers matrix berukuran $m \times n$, sedangkan General invers matriks persegi.

- ☻ Misalkan matriks A berukuran $m \times n$. Bila kolom-kolom dari A bebas linear, maka dijamin matriks $(A'A)^{-1}$ jadi matriks A dijamin mempunyai ***General Invers*** yang diberikan oleh $A^{-} = (A'A)^{-1}A'$.

- ☻ Sebaliknya bila kolom-kolom matriks A tidak bebas linear, maka $(A'A)^{-1}$ tidak ada. Jadi persoalan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ tidak bisa diselesaiakan dengan cara general invers $\boldsymbol{x} = (A'A)^{-1}A'\boldsymbol{y}$. Hal ini bisa diselesaikan dengan cara ***psedo invers*** sebagaimana pada Contoh 7.9.4.

- ☻ Sebagai kesimpulan penyelesaian terdekat dari masalah $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ bisa dilakukan dengan cara ***Psedo Invers*** atau ***General Invers***.

7.10 Dekomposisi Spektral

Sebagaiman telah diketahui pada pembahasan sebelumnya matriks persegi simetri mempunyai suatu peranan yang penting kaitannya dengan basis orthogonal dan pendiagonalan matriks. Hasil yang telah dibahas bisa disimpulkan lagi sebagai berikut:
Suatu matriks persegi A dapat didiagonalkan secara orthogonal bila dan hanya bila A matriks simetri. Yaitu ada matriks orthogonal P sehingga $P'AP = D$, dengan D adalah matriks diagonal. Kesimpulan ini dinamakan **Teorema Spektral**.
Bila matriks

$$P = [\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_n]$$

maka dapat ditulis sebagai

$$A = x_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1' + x_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2' + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n',$$

dengan masing-masing $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ adalah nilai-eigen dari matriks simetri A. Selanjutnya bentuk ini dinamakan **dekomposisi spektral**. Masing-masing matriks $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah **matriks proyeksi** dari sebarang vektor $\boldsymbol{x}$, yaitu vektor $(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i')\boldsymbol{x}$ adalah proyeksi orthogonal dari $\boldsymbol{x}$ pada ruang yang dibangun oleh $\boldsymbol{u_i}$ ($\langle \boldsymbol{u_i} \rangle$).

Contoh 7.10.1 Dibahas lagi matriks simetri

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari A didapat dari polininomial karakteristik matriks A yatitu $p(\lambda)$ dengan menyelesaikan $\det(\lambda I - A) = 0$, didapat

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 17\lambda^2 + 90\lambda - 144 \\ &= (\lambda - 8)\,(\lambda - 6)\,(\lambda - 3)\,. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa nilai-eigen dari A berbeda, yaitu $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 6$ dan $\lambda_3 = 3$. Vektor-eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-eigen adalah:

$$\lambda_1 = 8 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 6 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0, \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 0 \text{ dan } \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = 0\ .$$

Terlihat bahwa vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ saling orthogonal. Dengan melakukan penormalan didapat

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

dan matriks

$$P = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $P'AP = D$ dengan D matriks diagonal, elemen elemen diagonalnya adalah $8,\ 6$ dan 3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P'AP &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ dan $\boldsymbol{u}_3$ memenuhi

$$8\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1' + 6\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2' + 3\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = A.$$

Selanjutnya bila diberikan vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

maka dapat ditunjukkan bahwa proyeksi $\boldsymbol{x}$ pada $\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$ adalah $(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x}$ sebagai berikut

$$(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan proyeksi dari $\boldsymbol{x}$ pada $\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle$ diberikan oleh

$$(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle / \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle)\boldsymbol{u}_1,$$

yaitu:

$$(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle / \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle)\boldsymbol{u}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa

$$(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x} = (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle / \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle)\boldsymbol{u}_1.$$

Juga bisa ditunjukkan bahwa vektor

$$\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x}$$

orthogonal dengan vektor $\boldsymbol{u}_1$ dan

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x}).$$

Vektor $\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{u}_1$ adalah

$$\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa vektor $\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1')\boldsymbol{x}$ orthogonal dengan $\boldsymbol{u}_1$. $\square$

Latihan:

Diberikan matriks simetri

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Konstruksi suatu dekomposisi spektral dari matriks A sehingga

$$A = a\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1' + b\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2'$$

dan $D = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2]'A[\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2]$ dengan D adalah matriks diagoanal dengan elemen diagonal a dan b, dan $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ adalah orthonormal. Selanjutnya bila vektor $\boldsymbol{x}$ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

maka tunjukkan bahwa proyeksi $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{u}_2$ adalah $(\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2')\boldsymbol{x}$. $\square$

BENTUK KUADRAT

Bentuk kuadrat memainkan suatu peranan penting dalam masalah optimasi. Sebagai motifasi dan ide bentuk kuadrat, diberikan contoh berikut. misalkan fungsi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$ diberikan oleh

$$q((x_1, x_2)') = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Tentukan apakah $q((0,0)') = 0$ adalah maksimum global atau minimum global atau tidak kedua-duanya. Ingat bahwa $q((0,0)')$ adalah minimum global bila

$$q((0,0)') \leq q((x_1, x_2)')$$

untuk semua $(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$. Maksimum global didefinisikan dengan cara analogi (mengganti $\leq$ dengan $\geq$).

Ada beberapa cara untuk menyelesaikan masalah pada contoh yang diberikan. Disini akan digunakan matriks untuk menyelesaikannya. Dalam hal ini, dapat ditulis

$$\begin{aligned} q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Secara ringkas, didapat

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks A simetri, dari pembahasan sebelumnya ada basis-eigen orthonormal $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ untuk A. Didapat

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

yang bersesuaian dengan nilai-eigen $\lambda_1 = 9$ dan $\lambda_2 = 4$. Bila $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ didapat

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} \\ &= (c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2)'(c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2) \\ &= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 \\ &= 9c_1^2 + 4c_2^2\,. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $q(\boldsymbol{x}) > 0$ untuk semua $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, sebab setidaknya satu diantara $9c_1^2$ dan $4c_2^2$ adalah positip. Jadi $q((0,0)') = 0$ adalah minimum global. Hasil yang telah didapat menunjukkan bahwa sistem koordinat c_1, c_2 didifinisikan sebagai suatu basis-eigen dari A. Bentuk

$$9c_1^2 + 4c_2^2$$

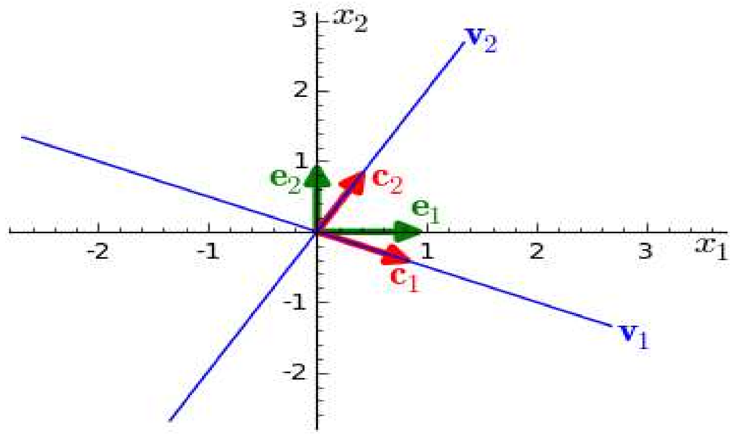
lebih mudah dibandingkan dengan bentuk aslinya

$$8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Dua sistem koordinat dari apa yang telah dibahas ini diberikan oleh gambar berikut.

Selanjutnya dari ide yang telah dibahas disajikan lebih general sebagai berikut. Suatu fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$ yaitu

$$q((x_1, x_2, \ldots, x_n)')$$



dinamakan suatu bentuk kuadrat bila ia adalah suatu kombinasi linear dari bentuk x_ix_j dengan i mungkin sama dengan j. Suatu bentuk kuadrat dapat ditulis sebagai

$$q(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{x}' A\boldsymbol{x},$$

untuk suatu matrik simetri A tunggal yang dinamakan matriks dari q. Himpunan Q_n dari bentuk kuadrat

$$q((x_1, x_2, \ldots, x_n)')$$

adalah suatu ruang bagian dari ruang linear dari semua pemetaan linear dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$.

Contoh 7.10.2 Diberikan bentuk kuadrat

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^3 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Dapatkan matriks dari q.

Jawab Sebagaimana contoh sebelumnya, misalkan

$a_{i,i}$ adalah koefisien dari x_i^2,

$a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2}$ (koefisien dari x_ix_j), bila $i \neq j$.

Didapat

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Pembahasan yang telah dibuat pada Contoh 7.10.2 dapat digeneralisasi sebagai berikut.

Diberikan suatu bentuk kuadrat $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A\boldsymbol{x}$, dengan matriks A berukuran $n \times n$. Misalkan $\mathcal{B}$ adalah suatu basis-eigen orthonormal yang bersesuaian dengan nilai-eigen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$. Maka

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2,$$

dengan c_i adalah koordinat-koordinat dari $\boldsymbol{x}$ relatif terhadap $\mathcal{B}$. Dalam pengkajian suatu bentuk kuadrat q sering tertarik untuk menentukan apakah $q(\boldsymbol{x}) > 0$ untuk semua $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Dalam konteks ini dikenalkan terminologi berikut.

Misalkan suatu bentuk kuadrat

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A\boldsymbol{x},$$

dengan A matriks simetri berukuran $n \times n$, maka A dinamakan **definit positip** bila $q(\boldsymbol{x})$ positip untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ dan dinamakan **semidefinit positip** bila $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Definit negatip dan semedefinit negatip didefinisikan secara analogi. Bila q mempunyai nilai positip dan juga nilai negatip, maka A dinamakan **takdefinit**.

Contoh 7.10.3 Diberikan matriks A berukuran $n \times n$. Tunjukkan bahwa

$$q(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|^2$$

adalah suatu bentuk kuadrat, dapatkan matriks dari q dan tentukan kedefinitannya.

Jawab Persamaan $q(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|^2$ dapat ditulis sebagai

$$q(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x})' A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'(A'A)\boldsymbol{x}$$

Terlihat bahwa q adalah bentuk kuadrat dengan matriksnya adalah $A'A$. Bentuk kuadrat ini semidefinit positip sebab $q(\boldsymbol{x}) = \|A\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Catatan, $q(\boldsymbol{x}) = 0$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{x}$ di kernel dari A. Maka dari itu, bentuk kuadrat adalah definit positip bila dan hanya bila $\ker(A) = \{\boldsymbol{0}\}$.

□

Teorema 7.10.1 Suatu matriks simetri A adalah definit positip bila dan hanya bila semua nilai-eigen dari matriks A positip, Matriks A adalah semidefinit positip bila dan hanya bila nilai-eigen dari A positip atau nol.

Bukti Langsung dari fakta bentuk

$$q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2,$$

dengan λ_i adalah nilai-eigen dari A.

□

Contoh 7.10.4 Diberikan suatu transformasi linear $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Dapatkan suatu basis orthonormal $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ di $\mathbb{R}^2$ sedemikian hingga $L(\boldsymbol{v_1})$ dan $L(\boldsymbol{v_2})$ orthogonal.

(b) Tunjukkan bahwa image dari lingkaran satuan oleh transformasi L dijadikan ellips. Dapatkan sumbu-sumbu ellips dalam nilai-eigen matriks $A'A$.

Jawab

(a) Menggunakan ide contoh pertama, basis-eigen orthonormal dari $A'A$ diperoleh sebagai berikut.

$$A'A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik dari $A'A$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 125\lambda + 2500 = (\lambda - 100)(\lambda - 25),$$

jadi nilai-eigen dari A adalah $\lambda_1 = 100$ dan $\lambda_2 = 25$ dan vektor-eigen yang bersesuaian adalah

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Penormalan dari $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$ didapat

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

(b) Lingkaran dalam bentuk parameter vektor adalah

$$\boldsymbol{x} = \cos(t)\boldsymbol{v_1} + \sin(t)\boldsymbol{v_2},\ 0 \le t \le 2\pi,$$

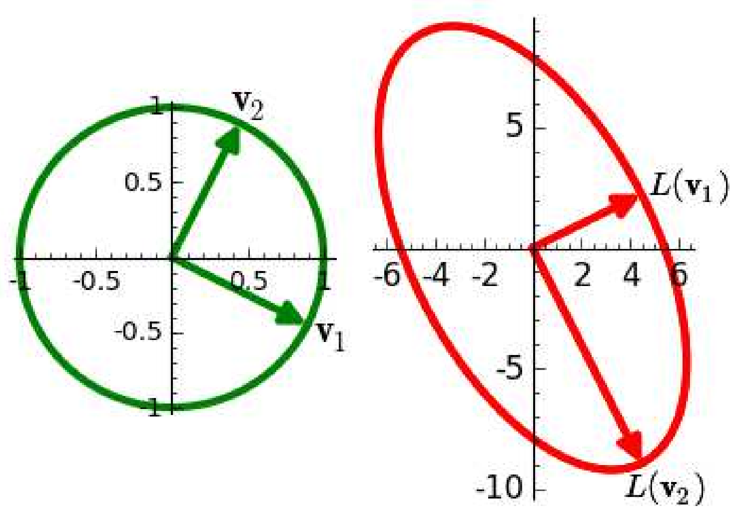
dan image dari lingkaran ini adalah ellips

$$L(\boldsymbol{x}) = \cos(t)L(\boldsymbol{v_1}) + \sin(t)L(\boldsymbol{v_2}),\ 0 \le t \le 2\pi$$

dengan sumbu-sumbu adalah

$$\|L(\boldsymbol{v_1}\|^2 = (A\boldsymbol{v_1})'(A\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1'}(A'A)\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_1'}(\lambda_1\boldsymbol{v_1}) = \lambda_1(\boldsymbol{v_1'}\boldsymbol{v_1}) = \lambda_1\ ,$$
$$\|L(\boldsymbol{v_2}\|^2 = (A\boldsymbol{v_2})'(A\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2'}(A'A)\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_2'}(\lambda_2\boldsymbol{v_2}) = \lambda_2(\boldsymbol{v_2'}\boldsymbol{v_2}) = \lambda_2\ .$$

Jadi $\|L(\boldsymbol{v_1})\| = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{100} = 10$ dan $\|L(\boldsymbol{v_2})\| = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{25} = 5$. Gambar 7.3 adalah lingkaran satuan $\boldsymbol{x}$ dan image $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dari pembahasan (b).



Gambar 7.3: $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

□

7.11 Faktorisasi QR

Dalam bagian ini dibahas langkah-langkah dari pemfaktoran matriks A berukuran $n \times k$ menjadi perkalian dari matriks Q dan R.

Misalkan matriks A berukuran $n \times k$ dengan $n \geq k$ dan kolom kolom A:

$$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k$$

bebas linear, maka A dapat difaktorkan menjadi $A = QR$ dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Gunakan Proses Gram-Schmidt pada
$$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$$
menjadi
$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$$
2. Normalisasi
$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$$
menjadi
$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$$
3. Buat matriks $Q = [\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{u}_k]$
4. Buat matriks $R = Q'A$

Maka didapat $A = QR$.. Contoh berikut menjelaskan langkah-langkah faktorisasi QR.

Contoh 7.11.1 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya gunakan Proses Gram-Schmidt didapat

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 - (\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle / \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menghindari pecahan $\boldsymbol{v}_2$ kalikan dengan 2, didapat

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dihitung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{w}_3 - (\langle \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{v}_1\rangle / \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle)\boldsymbol{v}_1 - (\langle \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{v}_2\rangle / \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle)\boldsymbol{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Juga, untuk menghindari pecahan $\boldsymbol{v}_3$ kalikan dengan 3, didapat

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Normalisasi $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ dan $\boldsymbol{v}_3$ didapat

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian matriks $Q = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ adalah:

$$Q = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Sedangkan matriks $R = Q'A$ adalah

$$R = Q'A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} .$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $QR = A$, sebagai berikut

$$\begin{aligned} QR &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A . \end{aligned}$$

□

Faktorisasi QR suatu alat komputasi untuk menyelesaiakan sistem persamaan linear $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ secara numerik.

Berikut ini diberikan suatu sifat untuk menyelesaikan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ menggunakan faktorisasi QR.

Teorema 7.11.1 Misalkan matriks A berukuran $n \times k$ dengan $n \geq k$ dan kolom-kolom dari A adalah bebas linear, maka penyelesaian

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

diberikan oleh

$$\boldsymbol{x} = R^{-1}Q'\boldsymbol{b}$$

yang mana matriks Q dan R memenuhi $A = QR$.

Bukti

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\; \Rightarrow \;\; (A'A)\boldsymbol{x} = A'\boldsymbol{b}.$$

Misalkan $A = QR$, yang mana matriks Q dan R diperoleh dengan cara faktorisasi QR. Didapat

$$(QR)'(QR)\boldsymbol{x} = (QR)'\boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; (R'Q'QR)\boldsymbol{x} = R'Q'\boldsymbol{b}.$$

Tetapi karena Q matriks orthogonal, maka $Q'Q = I$. Jadi

$$R'R\boldsymbol{x} = R'Q'\boldsymbol{b}$$

atau $R\boldsymbol{x} = Q'\boldsymbol{b}$, tetapi R matriks yang selalu mempunyai invers. Jadi

$$\boldsymbol{x} = R^{-1}Q'\boldsymbol{b}.$$

□

Dalam prakteknya, sering memudahkan untuk menghindari kesalahan pemotongan desimal. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ diselesaikan lewat substitusi mundur dari $R\boldsymbol{x} = Q'\boldsymbol{b}$. Contoh berikut ini menjelaskan masalah ini.

Contoh 7.11.2 Selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 7.5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Disini matriks A dan $\boldsymbol{b}$ adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 7.5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sebagaimana telah dibahas sebelumnya, matriks A dapat didekomposisi menjadi

$A = QR$ dengan Q diberikan oleh

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.70710678118655 & -0.40824829046386 & 0.28867513459481 \\ 0.0 & 0.81649658092773 & 0.28867513459481 \\ 0.70710678118655 & 0.40824829046386 & -0.28867513459481 \\ 0.0 & 0.0 & 0.86602540378444 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sedangkan matriks R adalah

$$
\begin{aligned}
R &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.414213562373095 & 0.70710678118655 & 0.0 \\ 0.0 & 1.224744871391589 & 0.81649658092773 \\ 0.0 & 0.0 & 1.154700538379252 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Matriks $Q'\boldsymbol{b}$ adalah

$$
Q'\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7.424621202458775 \\ 9.18558653543694 \\ 5.629165124598845 \end{bmatrix}
$$

Dari persamaan $R\boldsymbol{x} = Q'\boldsymbol{b}$ didapat $\boldsymbol{x} = (x, y, z)'$ sebagai berikut

$z = 5.629165124598845/1.154700538379252 = 4.874999999999994$

$y = 4.250000000000006$ dan $x = 3.125000000000008$.

Selanjutnya, dapat dilihat seberapa dekat nilai $A\boldsymbol{x}$ dengan $\boldsymbol{b}$ sebagai berikut

$$
A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3.125000000000008 \\ 9.125 \\ 7.375000000000014 \\ 4.874999999999994 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 7.5 \\ 5 \end{bmatrix}.
$$

$\square$

Latihan

Dengan menggunakan dekomposisi QR selesaikan sistem persamaan linear berikut

$3x+10y=-8,\ 4x-4y=30$ dan $12x+27y=10.$ $\square$

7.12 DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR

Diberikan matriks A berukuran $m\times n$, dekomposisi nilai singular matriks A adalah berkaitan dengan matriks Q dan P sehingga $A=QDP'$ dengan Q,P adalah matriks orthogonal dan D matriks berukuran $m\times n$ dengan elemen-elemen didiagonal utamanya nonnegatif dan yang lainnya nol.

1. Nilai Singular dan Vektor Singular Kanan

Bila A matriks berukuran $m\times n$, maka $A'A$ adalah matriks simetri. Sebagai mana telah dibahas matriks A'A dapat didiagonalkan secara orthogonal, yaitu ada matriks orthogonal P sehingga $P'(A'A)P$ adalah matriks diagonal. Selanjutnya bila δ adalah nilai-eigen dari matriks $A'A$ yang bersesuaian dengan vektor-eigen satuan $\boldsymbol{v}$ (salah satu kolom dari P), maka

$$||A\boldsymbol{v}||^2=\langle(A\boldsymbol{v}),(A\boldsymbol{v})\rangle=\boldsymbol{v}'(A'A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'\delta\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}=\delta.$$

Terlihat bahwa $\delta\geq 0$. Jadi nilai-eigen dari $A'A$ adalah nononegatip.

Contoh 7.12.1 Misalkan matriks

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\text{ maka } A'A=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari matriks $A'A$ adalah

$$p(\delta)=\delta^2-6\delta+8=(\delta-4)\,(\delta-2)\,,$$

didapat $\delta_1 = 4$ dan $\delta_2 = 2$. Vektor-eigen yang bersesuaian adalah

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Penormalan vektor-vektor eigen didapat matriks orthogonal

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$P'(A'A)P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Telah dibahas bahwa semua nilai-eigen dari matriks $A'A$ adalah nonnegatif. Didifinisikan hal berikut. Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$ dan

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_k > \delta_{k+1} = \cdots = \delta_n = 0$$

adalah nilai eigen dari $A'A$ ditulis dengan urutan menurun. Bila $\sigma_i = \sqrt{\delta_i}$,maka

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_n = 0$$

dinamakan **nilai-nilai singular** dari matriks A. Selanjutnya bila

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

adalah vektor-vektor eigen orthonorma dari matriks $A'A$ dengan $\boldsymbol{v}_i$ bersesuaian dengan nilai-eigen δ_i, maka

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

dinamakan **vektor-vektor singular kanan** dari matriks A.

Teorema 7.12.1 Misalkan A matrix berukuran $m \times n$ dan $\delta_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah nilai-eigen dari matriks $A'A$ sedangkan $\sigma_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah nilai singular dari A yang bersesuaian dengan vektor singular kanan $\boldsymbol{v}_i$ dari matriks A, maka

1. Untuk semua $\boldsymbol{x}$ di $\mathbb{R}^n$, $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{v}_i \rangle = \delta_i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i \rangle$.

2. Untuk i tidak sama dengan j, $A\boldsymbol{v}_i$ orthogonal dengan $A\boldsymbol{v}_j$.
3. $\langle A\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i\rangle = \sigma_i^2$.
4. Bila $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$, maka $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}\rangle = a_i\delta_i$

Bukti

1. $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{v}_i\rangle = \boldsymbol{x}'(A'A)\boldsymbol{v}_i = \delta_i\boldsymbol{x}'\boldsymbol{v}_i = \delta_i\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i\rangle$
2. $\left\langle A\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_j\right\rangle = \boldsymbol{v}_i'(A'A)\boldsymbol{v}_j = \delta_j\left\langle\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\right\rangle = \delta_j(0) = 0$
3. $\langle A\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i\rangle = \boldsymbol{v}_i'(A'A)\boldsymbol{v}_i = \delta_i\boldsymbol{v}_i'\boldsymbol{v}_i = \sigma_i^2(1) = \sigma_i^2$
4. $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{v}_i\rangle = \delta_i\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i\rangle = \delta_i(a_1\underbrace{\boldsymbol{v}_1'\boldsymbol{v}_i}_{0} + \cdots + a_i\underbrace{\boldsymbol{v}_i'\boldsymbol{v}_i}_{1} + \cdots + a_n\underbrace{\boldsymbol{v}_n'\boldsymbol{v}_i}_{0}) = a_i\delta_i$

□

2 Nilai Singular dan Vektor Singular Kiri

Sebagaimana telah dibahas vektor-vektor singular kanan

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

membentuk suatu basis orthonormal di $\mathbb{R}^n$, maka himpunan

$$\{A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \ldots, A\boldsymbol{v}_n\}$$

membentang image dari dari pemetaan linear linier

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

yang diberikan oleh $L(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$, $\forall\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Selanjutnya bila

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_k > \delta_{k+1} = \cdots = \delta_n = 0,$$

maka dari pembahasan Teorema 7.12.1 didapat :

$$A\boldsymbol{v}_{k+1} = \cdots = A\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}$$

Jadi pembentang orthogonal dari image L adalah

$$A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \ldots, A\boldsymbol{v}_k$$

dan merupakan suatu basis dari image L. Suatu peranan penting dari basis image L sebagai mana diberikan dalam difinisi dan teorema berikut.

Definisi 7.12.2 Misalkan A suatu matriks ukuran $m \times n$ dan

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_k > \delta_{k+1} = \cdots = \delta_n = 0,$$

adalah nilai singular dari A. Juga misalkan bahwa $\boldsymbol{v}_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah vektor-vektor singulir kanan dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen σ_i. Bila

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\ A\boldsymbol{v}_i,\ \ 1 \leq i \leq k$$

dan

$$\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$$

dipilih sedemikian hingga

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$$

suatu basis orthonormal dari $\mathbb{R}^m$, maka

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_m$$

dinamakan **vektor-vektor singular kiri** dari A. $\square$

Teorema 7.12.2 Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ dan

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_k > \delta_{k+1} = \cdots = \delta_n = 0,$$

adalah nilai singular dari A. Juga misalkan bahwa $\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ adalah vektor singular kiri dari A. Bila $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diberikan oleh $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $L_T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diberikan oleh $L(\boldsymbol{y}) = A'\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, maka

1. $\text{rank}(A) = k$.
2. Vektor $\boldsymbol{u}_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ adalah suatu basis orthonormal dari L.

3. Vektor $\boldsymbol{u}_j$ untuk $j = k+1, k+2, \ldots, m$ adalah suatu basis orthonormal dari kernel L_T.

4. Vektor $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ adalah suatu basis orthonormal dari image L_T dan vektor $\boldsymbol{v}_i$ untuk $j = k+1, k+2, \ldots, n$ adalah suatu basis orthonormal dari kernel L

5. Bila $U = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \ldots\ \boldsymbol{u}_m]$, $V = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_m]$ dan matriks Σ berukuran $m \times n$ dengan elemen diagonal $d_{i,i} = \sigma_i,\ i \leq k$ sedangkan elemen yang lainnya sama dengan nol, maka $A = U\Sigma V'$

Bukti Sebagai latihan. □

Contoh 7.12.3 (Dekomposisi Nilai Singular) Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dekomposisikan kebentuk nilai singular sehingga $A = U\Sigma V'$

Jawab Dihitung dulu $A'A$, sehingga didapat nilai-nilai singular dari A dan vektor-vektor singular kanan dari A.

$$A'A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari matriks $A'A$ adalah

$$p(\delta) = \delta^2 - 6\delta + 8 = (\delta - 4)\ (\delta - 2)$$

didapat nilai eigen $\delta_1 = 4$ dan $\delta_1 = 2$. Vektor-eigen yang bersesuaian adalah

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Penormalan vektor-vektor eigen didapat matriks orthogonal V

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor singular kanan dari A adalah

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Nilai singular dari A adalah $\sigma_1 = \sqrt{\delta_1} = \sqrt{4} = 2$ dan $\sigma_2 = \sqrt{\delta_2} = \sqrt{2}$. Didapat matriks

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor-vektor singular kiri didapat sebagai berikut.

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Perluas vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ menjadi $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sehingga vektor vektor ini adalah suatu basis dari $\mathbb{R}^3$. Dalam kasus ini vektor $\boldsymbol{u}_3$ bisa dipilih sebagai

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lakukan proses Gram-Schmidt pada vektor-vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ didapat matris U

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya selidiki bahwa $U\Sigma V' = A$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} U\Sigma V' &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

$\square$

LATIHAN

Lakukan langkah-langkah pembahasan Contoh Dekomposisi Nilai Singular menggunakan SAGE. Perintah dalam sel SAGE sebagai berikut:

```
A=matrix(RDF,[[1,-1],[1,1],[-1,-1]])
U,S,V=A.SVD()
html("Matriks $A=%s$"%latex(A))
print
html("$U=%s$<p>$S=%s$<p>$V=%s$"%(latex(U),latex(S),latex(V)))
print
html("$U\Sigma V'=%s$"%latex(U*S*transpose(V)))
print
html("$A-U\Sigma V'=%s$"%latex(A-U*S*transpose(V)))
```

Hasil yang diberikan adalah:

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -1.54742755068 \times 10^{-16} & -1.0 & -6.41074621127 \times 10^{-17} \\ 0.707106781187 & -4.28259858132 \times 10^{-17} & 0.707106781187 \\ -0.707106781187 & 4.28259858132 \times 10^{-17} & 0.707106781187 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.41421356237 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.707106781187 & -0.707106781187 \\ 0.707106781187 & 0.707106781187 \end{bmatrix}$$

$$U\Sigma V' = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$A - U\Sigma V' = \begin{bmatrix} 1.11022302463 \times 10^{-16} & 0.0 \\ -2.22044604925 \times 10^{-16} & -4.4408920985 \times 10^{-16} \\ 2.22044604925 \times 10^{-16} & 4.4408920985 \times 10^{-16} \end{bmatrix} \qquad \square$$

Pada pembahasan terdahulu mengenai matriks simetri dikenal istilah dekomposisi spektral yaitu:

Bila A matriks simetri dan A dapat didiagonalkan sebagai bentuk $D = P'AP$ yang mana D matriks diagonal dengan elemen diagonal utama adalah $\delta_i, i = 1, 2 \ldots, n$ adalah nilai eigen dari matriks A dan $\boldsymbol{u}_i$ adalah vektor eigen yang bersesuaian.

Bila $P = [\boldsymbol{u_1}\ \boldsymbol{u_2}\ \cdots\ \boldsymbol{u_n}]$, maka A dapat didekomposisi sebagai

$$A = \delta_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1' + \delta_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2' + \cdots + \delta_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n'.$$

Timbul pertanyaan bagaimana bila matriks A tidak simetri atau secara umum matriks A berukuran $m \times n$ apakah A bisa didekomposisi seperti cara dekomposisi spektral. Hal ini bisa dilakukan dengan menggunakan hasil-hasil dekomposisi nilai singular sebagai berikut.

Sebagaimana telah dibahas bila A mempunyai rank sama dengan k , maka A dapat didekomposisi sebagai $A = U\ \Sigma\ V'$, dengan U adalah vektor singular kiri dan V vektor singular kanan dan $\boldsymbol{v}_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah suatu basis orthormal dari $\mathbb{R}^n$, maka untuk $1 \le i \le k$ didapat

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i' \right) \boldsymbol{v}_i &= 0 + \cdots + \sigma_i \boldsymbol{u}_i + \cdots + 0 \\ &= \sigma_i \left(\frac{1}{\sigma_i}\ A\boldsymbol{v}_i \right) = A\boldsymbol{v}_i. \end{aligned}$$

Jadi $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i' = A$. Pada Contoh sebelumnya matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

dan $\text{rank}(A) = k = 2$. Juga $\sigma_1 = 2$ dan $\sigma_1 = \sqrt{2}$, didapat vektor singular kiri

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sedangkan vektor singular kanan adalah

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1' + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2' &= 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

LATIHAN

Lakukan langkah-langkah yang dibahas dalam Contoh ini dengan menggunakan SAGE.

□

3. Nilai Singular Dekomposisi untuk meghitung Psedo-Invers

Sebagaimana telah dibahas sebelumya Psedo-Invers didapat bila matriks persegi $A'A$ tidak mempunyai invers, Psedo-Invers dalam hal ini dapat diperoleh dengan cara proyeksi. Pada pembahasan ini digunakan Nilai Singular Dekomposisi untuk memperoleh matriks Psedo-Invers A sebagai berikut.

Misalkan A berukuran $m \times n$ dan mempunyai rank sama dengan k dan matriks A didekomposisi sebagai $A = U\,\Sigma\,V'$ dengan kolom-kolom U adalah vektor singular kiri, sedangkan kolom-kolom V adalah vektor singular kanan dan matriks Σ mempunyai elemen diagonal sama dengan nilai sigular dari A yaitu σ_i sedangkan elemen yang lainnya sama dengan nol.

Bila matriks Σ^p berukuran $n \times m$ dengan elemen-elemen diagonal $\dfrac{1}{\sigma_i}$ sedangkan elemen yang lainnya sama dengan nol, maka matriks berukuran $n \times m$

$$A^p = V\,\Sigma^p\,U'$$

dinamakan Psedo-Inversdari A. Sebagaimana telah duketahui pada pembahasan sebelumnya, Psedo-Invers dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ yaitu $\boldsymbol{x} = A^p\boldsymbol{b}$.

Sebagai contoh, misalkan diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Selesaikan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ menggunakan A^p.

J**awab** Matriks

$$A'A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik dari matriks $A'A$ adalah:

$$p(\delta) = \delta^2 - 30\,\delta + 68$$

didapat

$$\delta_1 = 15 + \sqrt{157} = 27.52996408614167$$

dan

$$\delta_2 = 15 - \sqrt{157} = 2.470035913858332.$$

Vektor eigen orthonormal yang bersesuaian adalah

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.24708746132252 \\ 0.96899318184247 \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.96899318184247 \\ -0.24708746132252 \end{pmatrix}$$

Nilai singular dari A adalah

$$\sigma_1 = \sqrt{\delta_1} = 5.246900426551058$$

dan

$$\sigma_2 = \sqrt{\delta_2} = 1.571634790229057$$

Matriks V dan Σ^p adalah

$$V = \begin{bmatrix} 0.24708746132252 & 0.96899318184247 \\ 0.96899318184247 & -0.24708746132252 \end{bmatrix}$$

dan

$$\Sigma^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19058871308853 & 0 & 0 \\ 0 & 0.63628013722848 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan vektor $\boldsymbol{u_1}$ dan $\boldsymbol{u_2}$ adalah

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\ A\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.64822165310429 \\ 0.73871665407567 \\ 0.18467916351892 \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\ A\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.76145169803919 \\ -0.62886737519092 \\ -0.15721684379773 \end{bmatrix}.$$

Perluas basis orthogonal $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$ menjadi $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}$ dengan memilih

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2425356 \\ -0.9701425 \end{pmatrix}.$$

Sehingga didapat matriks

$$U = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} 0.64822165310429 & 0.76145169803919 & 0 \\ 0.73871665407567 & -0.62886737519092 & 0.2425356 \\ 0.18467916351892 & -0.15721684379773 & -0.9701425 \end{bmatrix}$$

dan

$$
\begin{aligned}
A^p &= V\,\Sigma^p\,U' \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.35294117647059 & -0.088235294117646 \\ 5.9813265451680317\,10^{-15} & 0.23529411764707 & 0.058823529411767 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

. Sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= A^p\boldsymbol{b} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.35294117647059 & -0.088235294117646 \\ 5.9813265451680324\,10^{-15} & 0.23529411764707 & 0.058823529411767 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 911.764705882348 \\ 1058.823529411844 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

. Hasil yang didapat sama dengan hasil yang telah dibahas pada Contoh sebelumnya.

□

Latihan
Lakukan langkah-langkah yang telah dibahas dalam Contoh menggunakan SAGE.

□

Contoh berikut $A'A$ tidak mempunyai invers. Bila matriks

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},
$$

maka selesaiakan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan menggunakan matriks A^p

Jawab Matriks

$$
A'A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Perhatikan bahwa matriks $A'A$ tidak mempunyai invers, dengan demikian setidaknya ada satu nilai eigen dari $A'A$ sama dengan nol. Polinomial karakteristik dari matriks $A'A$ adalah

$$
p(\delta) = \delta^2 - 4\delta = (\delta - 4)\delta
$$

didapat

$$\delta_1 = 4 \text{ dan } \delta_2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\delta_1} = 2, \frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{2}.$$

Vektor-eigen yang bersesuaian adalah

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Didapat matriks

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ dan } \Sigma^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedangkan vektor

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

dengan demikian vektor $\boldsymbol{u}_2$ dapat dipilih sebagai

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Didapat matriks

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Jadi matriks

$$A^p = V\,\Sigma^P\,U' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian didapat

$$\boldsymbol{x} = A^p\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Bandingkan nilai

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tetapi pada contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix},$$

matriks

$$A'A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$$

mempunyai invers yaitu

$$(A'A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{34} & -\frac{3}{34} \\ -\frac{3}{34} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

General invers dari A diberikan oleh

$$A^{-} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = A^{-}\boldsymbol{b} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15500}{17} \\ \frac{18000}{17} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 911.7647058823529 \\ 1058.823529411765 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bandingkan nilai

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 911.7647058823529 \\ 1058.823529411765 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000.000000000002 \\ 4235.29411764706 \\ 1058.823529411765 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Cek matriks $A^{-}A$ sama dengan identitas:

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{6}{17} & -\frac{3}{34} \\ 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atau dengan menggunakan nilai numerik

$$
\begin{aligned}
A^p A &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.35294117647059 & -0.088235294117646 \\ 5.9813265451680332\,10^{-15} & 0.23529411764707 & 0.058823529411767 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.0 & -5.9119376061289586\,10^{-15} \\ 1.1962653090336066\,10^{-14} & 1.000000000000065 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

7.13 Bentuk Kanonik Jordan

disini dibahas pengertian dari bentuk kanonik Jordan.

Daftar Pustaka

[1] Richard Bronson, "Matrix Operations", *International Edition, Schaum's Outline Series*, (1989).

[2] Paul Dawkins, "Linear Algebra",(`http://tutorial.lamar.edu.aspx`), (2007).

[3] Robert A. Beezer, "A First Course in Linear Algebra",(`http://linear.ups.edu`), (Version 2.22, April 16, 2010).

[4] Zumrotus Sa'diah, "Eksistensi Eigenvalue dan Eigenvektor", *Tugas Akhir S1, Jurusan Matematika FMIPA-ITS*, (2008)

[5] Howard Anton and Chris Rorres,"Elementary Linear Algebra", *Ninth Edition, John Wiley & Sons*, (2005).

[6] Gilbert Strang, "Introduction to Linear Algebra", *Third Edition, Wellesley-Cambridge Press*, (2003).

[7] Ron Larson and David C. Falvo, "Elementary Linear Algebra", *Six Edition, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company*, (2009)

[8] T.S.Blyth and E.F.Robertson,"Basic Linear Algebra", *Second Edition, Springer*, (2002)

[9] Carl D. Meyer, "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra", *SIAM*, (2000)