Aljabar : Sebagai suatu Pondasi Matematika

Versi 2.0.0

12 Pebruari 2016

Subiono

Subiono — Email: subiono2008@matematika.its.ac.id

Alamat: Jurusan Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Sukolilo Surabaya, 60111
Indonesia

Copyright

Kata Pengantar

AlhamdulIllahiRabbilalamin, segala puji hanyalah milikMu ya Allah yang telah memberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia semasa hidupnya untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatMu di hamparan bumi yang dihuni beragam manusia. Sholawat dan Salam kepadaMu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.

Buku ini disusun dengan maksud untuk membantu dan mempermudah mahasiswa dalam mempelajari materi kuliah Aljabar. Isi bahasan dimulai dengan pendahuluan membahas dasar-dasar teori yang digunakan pada hampir seluruhan bahasan berikutnya. Selanjutnya bahasan dibagi dua : yaitu bagian pertama mengenai teori grup yang merupakan bahan materi kuliah Aljabar I dan Kapita Selekta I bidang Aljabar. Bagian kedua adalah Ring dan Lapangan yang merupakan materi kuliah Aljabar II dan Kapita Selekta II bidang Aljabar. Oleh karenanya tidak berlebihan bahwa, selain dari apa yang telah disebutkan, penyusunan buku ini juga dimaksudkan untuk menambah suatu bahan bacaan khususnya bagi para peminat Aljabar.

Dalam buku ini diberikan beberapa konsep pengertian dan sifat dari materi yang disajikan didahului contoh-contoh untuk mempermudah pemahaman pengertian dan sifat yang dibahas. Selain itu juga diberikan beberapa contoh aplikasi yang mungkin.

Topik bahasan disajikan dengan penekanan pada "matematika" tetapi tidaklah menjadikan para pemakai lain akan mengalami kesulitan dalam mempelajari buku ini, karena peletakan penekanan aspek matematika dibuat dengan porsi yang seimbang. Sehingga para peminat matematika tetap dapat menikmati dan menggunakan ilmunya terutama dalam Aljabar, begitu juga untuk para pemakai yang lainnya diharapkan mendapat tambahan wawasan untuk melihat matematika sebagai alat yang dibutuhkan terutama dalam kajian Aljabar untuk menyelesaikan masalah-masalah praktis yang dihadapinya.

Persiapan penulisan materi buku ini membutuhkan waktu yang agak lama, sejak penulis mengajarkan mata kuliah "Aljabar I", "Aljabar II" dan "Kapsel Aljabar" di jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya. Beberapa materi disusun dari pengalaman mengajar tersebut. Selain itu juga dari kumpulan makalah penulis dan hasil-hasil dari pembimbingan skripsi dan tesis mahasiswa.

Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan para pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang dari sempurnah bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus.

Buku ini dapat diperoleh secara gratis oleh siapapun tanpa harus membayar kepada penulis. Hal ini berdasarkan pemikiran penulis untuk kebebasan seseorang mendapatkan suatu bacaan yang tersedia secara bebas dengan maksud "kemanfaatan" dan "kejujuran". Yang dimaksud dengan kemanfaatan adalah bergunanya bacaan ini untuk kemudahan pembaca memperoleh informasi penting yang diperlukannya dan untuk pembelajaran. Sedangkan kejujuran adalah ikatan moral dari pembaca untuk tidak memdistribusi buku ini dengan tujuaan tidak bermanfaat yang hanya menguntungkan dirinya sendiri.

Penulis menulis buku ini berdasarkan pemikiran "kebebasan menulis" (tidak harus menggunakan media cetak penerbit) dengan asas "kemanfaatan" menggunakan media yang tersaji masa kini. Beberapa alat bantu untuk penulisan buku ini juga didapat secara gratis, yaitu perangkat lunak LaTeX untuk Windows yaitu TeXstudio 2.10.2 sebagai salah satu media LaTeX editor. Beberapa gambar yang ada dalam buku ini menggunakan perangkat lunak LaTeXDraw 3.3.2 yang juga didapat secara gratis. Begitu juga beberapa bahan rujukan didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk menyelesaikan beberapa contoh yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak SAGE versi terbaru 6.8 yang juga didapat dari internet secara gratis.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon hanya kepadaMu ya Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari Versi 1.0.1 yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Catatan untuk versi 2.0.0 melengkapi versi 1.1.1 khususnya dalam pembahasan ring dan beberapa bagian lain yang terkait. Sedangkan 1.1.1 adalah merupakan kelengkapan versi 1.0.1. Dimana dalam versi 1.0.1 pembahasan yang telah disajikan hanya sampai pada satu operasi biner. Sedangkan dalam versi 1.1.1 pembahasan dilanjutkan pada dua operasi biner. Semoga dalam versi berikutnya dapat berlanjut untuk melengkapi apa yang telah tersaji dalam perencanaan daftar isi dari buku ini.

Surabaya, 12 Pebruari 2016

Jurusan Matematika * FMIPA-ITS, Surabaya * Matematika

Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan

Dalam bab pendahuluan ini dibahas beberapa gagasan matematika mendasar yang digunakan dalam bab-bab berikutnya. Pembahasan dimulai dari pengertian himpunan dan fungsi. Fungsi (pemetaan) satu-satu (injektif), pemetaan pada (surjektif) dan komposisi fungsi. Kesemuanya adalah konsep-konsep dasar yang sering muncul dan muncul kembali, sering dalam bentuk yang berbeda. Relasi ekivalen pada himpunan dan partisi juga sering digunakan, terutama dalam membangun struktur aljabar baru dari yang lama. Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa dan berbagai sifat utamanya berulang kali memberikan uraian yang mendasar dan konstruksi model untuk konsep aljabar umum. Sehubungan dengan bilangan bulat, induksi matematika adalah metode yang sangat berguna dan menjadi nyaman untuk suatu pembuktian yang penting. Dengan berlatar belakang pengetahuan ini perhitungan untuk menentukan koefisien binomial dan algoritma untuk mendapatkan pembagi persekutuan terbesar akan lebih mudah dilakukan. Himpunan bilangan kompleks dengan operasi sebagaimana biasa dilakukan juga memainkan peran penting. Matriks juga memberikan sejumlah contoh untuk menggambarkan gagasan aljabar baru, dan pengetahuan tentang sifat-sifatnya yang paling dasar akan berguna.

1.1 Himpunan dan Fungsi

Pada bagian ini dikenalkan notasi dasar untuk himpunan dan operasi pada himpunan, juga simbol-simbol untuk beberapa himpunan tertentu yang sangat penting. Selain itu dikenalkan terminologi untuk berbagai jenis pemetaan antara himpunan dan gagasan kardinalitas dari himpunan.

Himpunan mungkin sesuatu dari matematika yang paling fundamental. Secara intuisi, dapat dipikirkan bahwa suatu himpunan adalah sebagai kumpulan dari berbagai hal, dimana kumpulan ini dipandang sebagai suatu entitas tunggal. Himpunan dapat memuat bilangan, titik dalam bidang-xy, fungsi dan lain sebagainya, bahkan himpunan yang lain. Himpunan biasanya dinotasikan oleh huruf besar A, B, C atau huruf kaligrafis

$\mathcal{F}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$.

Definisi 1.1.1 Bila A adalah suatu himpunan dan x adalah suatu entitas di A ditulis $x \in A$. Dalam hal ini dikatakan bahwa x adalah suatu **elemen** dari A. Notasi $x \notin A$ menyatakan x bukan elemen A. ✓

Ada beberapa cara menyajikan himpunan.

1. Mendaftar elemen-elemen himpunan bila hanya sedikit banyaknya elemen dari himpunan. Atau, mendaftar sebagaian dari elemen-elemen dari himpunan dan berharap pembaca dapat petunjuk dari pola elemen yang telah didaftar. Misalnya, contoh-contoh berikut.

   (a) $\{1, 8, \pi, \text{Rabu}\}$

   (b) $\{0, 1, 2, \ldots, 40\}$

   (c) $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 4, 6, \ldots\}$.

2. Menjelaskan kriteria bagi entitas yang termuat dalam himpunan.

   (a) $\{x \mid x \text{ adalah bilangan riil dan } x > -2\}$

   (b) $\{a/b \mid a, b \text{ adalah bilangan bulat dan } b \neq 0\}$

   (c) $\{x \mid P(x)\}$.

Contoh 1.1.1 Beberapa himpunan yang sangat penting dalam aljabar yang memiliki nama dan simbol khusus adalah sebagai berikut:
Himpunan kosong, himpunan tanpa elemen.

$$\emptyset = \{\ \}.$$

Himpunan semua bilangan bulat

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Himpunan semua bilangan rasional

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Himpunan semua bilangan riil

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ adalah bilangan riil}\}.$$

Himpunan semua bilangan kompleks

$$\mathbb{C} = \left\{ x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}.$$

Contoh 1.1.2 Himpunan-himpunan lain yang mempunyai nama dan simbol khusus adalah:
Himpunan bilangan bulat genap (kelipatan dua)

$$2\mathbb{Z} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

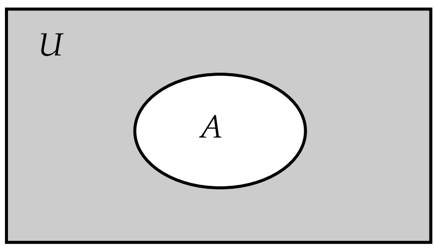
Himpunan bilangan riil positip

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}.$$

Definisi 1.1.2 Diberikan himpunan A, notasi himpunan A^C adalah **komplemen dari** A didefinisikan sebagai himpunan dari semua elemen-elemen di himpunan universal U yang tidak di A, yaitu

$$A^C = \{x \,|\, x \in U \text{ dan } x \notin A\}.$$

Secara diagram Venn himpunan A^C diberikan oleh Gambar 1.1. Diberikan dua him-

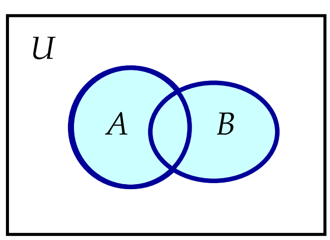


Gambar 1.1: Diagram Venn A^C

punan A dan B, A adalah **himpunan bagian** (subset) dari B ditulis $A \subseteq B$ bila setiap elemen dari A adalah suatu elemen di B. Dua himpunan sama $A = B$, bila dan hanya bila $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. **Gabungan** (union) dari A dan B adalah himpunan

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

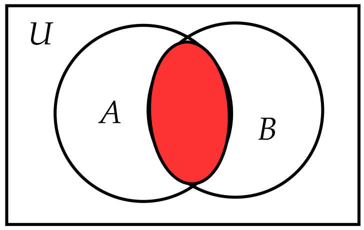
Digram Venn himpunan $A \cup B$ diberikan oleh Gambar 1.2. **Irisan** (intersection) dari A



Gambar 1.2: Diagram Venn $A \cup B$

dan B adalah himpunan

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

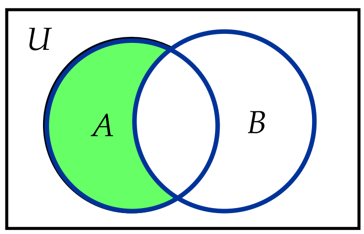


Gambar 1.3: Diagram Venn $A \cap B$

Digram Venn himpunan $A \cap B$ diberikan oleh Gambar 1.3. Himpunan A **dikurangi** B adalah himpunan yang didefinisikan oleh

$$A - B = A \cap B^C = \{x \,|\, x \in A \ \text{ dan } \ x \notin B\}.$$

Digram Venn himpunan $A - B$ diberikan oleh Gambar 1.4. Sedangkan himpunan **beda**

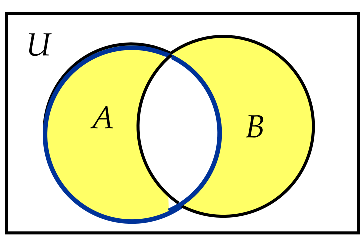


Gambar 1.4: Digram Venn $A - B$

simetrik dari A dan B didefinisikan oleh

$$A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) = \left\{x \,|\, x \in A \cap B^C \text{ atau } x \in A^C \cap B\right\}.$$

Digram Venn himpunan $A \triangle B$ diberikan oleh Gambar 1.5. **Produk Kartesian** dari A dan



Gambar 1.5: Diagram Venn $A \triangle B$

B adalah himpunan

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

yang juga dinamakan himpunan semua pasangan terurut dengan komponen pertama elemen di A dan komponen kedua elemen di B. Bila $A = B$, ditulis A^2 atau $A \times A$. Secara umum bila n adalah suatu bilangan bulat positip, maka n-pasangan terurut ditulis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mempunyai elemen pertama a_1, elemen kedua a_2,..., dan elemen ke-n a_n. Jadi

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

bila dan hanya bila $a_i = b_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Hasil kali dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dan $A^n = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ untuk $A_i = A$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Banyaknya elemen dari A dinamakan **kardinalitas** dari A dan ditulis sebagai $|A|$. Walaupun notasi yang diberikan sama dengan notasi harga mutlak tetapi mempunyai arti yang berbeda. Misalnya $|-5| = 5 = |5|$, tetapi $|\{-5\}| = 1$. Bila himpunan A berhingga, maka kardinalitas dari himpunan A adalah suatu bilangan bulat taknegatif. ✓

Contoh 1.1.3 Bila himpunan bilangan riil dipandang sebagai himpunan universal, maka

$$\mathbb{Q}^C = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ dan } x \notin \mathbb{Q}\}$$

adalah himpunan dari semua bilangan irrasional.

Proposisi 1.1.1 Diberikan himpunan A dan B berhingga, maka

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Bukti

1. Karena $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$, maka

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \triangle B| + |A \cap B| \\ &= (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

2. Misalkan $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, didapat

$$A \times B = (A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\}) \cup \cdots \cup (A \times \{n\}).$$

Terlihat bahwa $(A \times \{i\}) \cap (A \times \{j\}) = \emptyset, \forall i \neq j$. Jadi

$$\begin{aligned} |A \times B| &= |A \times \{1\}| + |A \times \{2\}| + \ldots + |A \times \{n\}| \\ &= \underbrace{|A| + |A| + \ldots + |A|}_{n} = |A| \cdot n. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. ✓

Contoh 1.1.4 Diberikan dua himpunan $\{1,2\}$ dan $\{1,2,3\}$, didapat

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

dan

$$\{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

Terlihat

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} \neq \{1,2,3\} \times \{1,2\}$$

sebab $(1,3) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$, tetapi $(1,3) \notin \{1,2,3\} \times \{1,2\}$ dan

$$|\{1,2\} \times \{1,2,3\}| = 2.3 = 6 = 3.2 = |\{1,2,3\} \times \{1,2\}|.$$

Contoh 1.1.5 Diberikan himpunan berikut

$$\begin{array}{rcl} \{1,2\} \times \{2,3\} \times \{4,5\} & = & \{(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5), \\ & & (2,2,4),(2,2,5)(2,3,4),(2,3,5)\} \end{array}.$$

Didapat $|\{1,2\} \times \{2,3\} \times \{4,5\}| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$

Contoh 1.1.6 Diberikan $\mathbb{P}$ adalah himpunan bilangan bulat positif dan

$$A = \{(a,b) \in \mathbb{P}^2 \,|\, a < b\}.$$

Bila $(x,y) \in A$ berakibat bahwa $x < y$ dan bila $(y,z) \in A$ berakibat bahwa $y < z$. Hal ini menunjukkan bahwa $x < y$ dan $y < z$, akibatnya $x < z$. Jadi $(x,z) \in A$.

Definisi 1.1.3 Diberikan dua himpunan A dan B, suatu **fungsi** atau **pemetan** dari A ke B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap elemen di A dengan tepat hanya satu elemen di B. Dalam hal ini ditulis $\phi : A \to B$ untuk menunjukkan bahwa ϕ adalah suatu fungsi dari A ke B. Suatu pemetaan harus terdefinisi dengan baik, ini berarti bahwa bila ϕ terspesifikasi oleh suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari A dengan suatu elemen di B, aturan harus bermakna hanya tepat satu elemen di B. Bila $\phi : A \to B$ adalah suatu pemetaan dari A ke B, maka pasangan dari elemen $a \in A$ dengan elemen di B ditulis sebagai $\phi(a) = b$ dinamakan **image** dari a terhadap ϕ. Untuk himpunan bagian A' dari A, ditulis

$$\phi(A') = \{\phi(a) \,|\, a \in A'\}$$

yang dinamakan **image/range** dari A' terhadap ϕ. Berkaitan dengan apa yang telah dibahas, himpunan A dinamakan **domain** dari ϕ, sedangkan himpunan B dinamakan **kodomain** dari ϕ . ✓

Contoh 1.1.7 Pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ didefinisikan oleh aturan

$$\phi(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{bila } n \text{ genap} \\ 1 & \text{bila } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

adalah terdefinisi secara baik, tetapi pemetaan $\psi : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ yang didefinisikan oleh aturan

$$\psi(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{bila } n \text{ genap} \\ 1 & \text{bila } n \text{ kelipatan } 3 \end{cases}$$

tidak terdefinisi secara baik, sebab $\psi(6) = \psi(2.\ 3) = 0$ juga $\psi(6) = \psi(3.\ 2) = 1$. Terlihat bahwa pasangan dari $6 \in \mathbb{Z}$ tidak tunggal di $\{0,1\}$. ●

Contoh 1.1.8 Tunjukkan bahwa $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1},\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

adalah suatu fungsi.

Jawab
Pilih sebarang $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, maka x^2+2 dan $x-1$ keduanya adalah bilangan riil. Lagipula, karena $x \neq 1$, maka $x-1$ tidak sama dengan nol. Jadi $(x-1)^{-1}$ ada sebagai bilangan riil. Dengan demikian $(x^2+2)/(x-1) \in \mathbb{R}$. Pilih $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ dan misalkan $x_1 = x_2$. Didapat

$$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2,\ \ x_1 - 1 = x_2 - 1 \ \text{ dan } \ (x_1-1)^{-1} = (x_2-1)^{-1}.$$

Jadi

$$\frac{x_1^2+2}{x_1-1} = \frac{x_2^2+2}{x_2-1},$$

dengan demikian $f(x_1) = f(x_2)$. Jadi f terdefinisi secara baik. ●

Pembahasan berkaitan dengan himpunan dan fungsi dapat dilakukan dalam SAGE dengan menggunakan perintah-perintah sebagai berikut.

```
# Membuat himpunan A dan B
A=Set([1,2])
B=Set([1,2,3])
print"A =",A;print"B =",B
```

```
A = {1, 2}
B = {1, 2, 3}
```

```
# Operasi himpunan
C=A.union(B);D=A.intersection(B)
print"C =",C,", adalah gabungan dari A dan B"
print"D =",D,", adalah irisan dari A dan B"
```

```
C = {1, 2, 3} , adalah gabungan dari A dan B
D = {1, 2} , adalah irisan dari A dan B
```

```
# Himpunan bagian
print"Apakah D subset A ?",D.issubset(A)
print"Apakah D subset B ?",D.issubset(B)
print"Apakah A subset B ?",A.issubset(B)
print"Apakah B subset A ?",B.issubset(A)
```

```
Apakah D subset A ? True
Apakah D subset B ? True
Apakah A subset B ? True
Apakah B subset A ? False
```

```
# A-B, B-A
print"A-B =",A-B;print"B-A =",B-A
```

```
A-B = {}
B-A = {3}
```

```
# Kardinalitas

print"|A| =",A.cardinality()
print"|B| =",B.cardinality()
```

```
|A| = 2
|B| = 3
```

```
# Membuat A x B dan B x A
AxB=Set([(a,b) for a in A for b in B])
BxA=Set([(b,a) for a in A for b in B])
print"A x B =",AxB;print"B x A =",BxA
```

```
A x B = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 1), (2, 1)}
B x A = {(1, 2), (3, 2), (2, 2), (3, 1), (1, 1), (2, 1)}
```

```
# Cek apakah AxB = BxA
AxB==BxA
```

```
False
```

```
# Cek apakah |C|=|A|+|B|-|D|
C.cardinality()==A.cardinality() + B.cardinality()
- D.cardinality()
```

```
True
```

```
# Cek apakah |AxB|=|BxA| dan |AxB|=|A|.|B|
AxB.cardinality()==BxA.cardinality()
AxB.cardinality()==A.cardinality()*B.cardinality()
```

```
True
True
```

```
# Mendefinisikan fungsi phi : Z -> {0,1}
# phi(n)=0 bila n genap
# phi(n)=1 bila n ganjil

def phi(x):
    if  mod(x,2)==0:
        return 0
    else:
        return 1
phi(10);phi(-11)
```

```
    0
    1
```

Contoh 1.1.9 Misalkan pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ diberikan oleh $\phi(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Maka untuk setiap dua bilangan bulat m dan n, bila $\phi(m) = \phi(n)$ berakibat $m = n$. ●

Contoh 1.1.10 Bila pemetaan $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $\chi(n) = n^2,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Maka untuk setiap dua bilangan bulat m dan n, bila $\chi(m) = \chi(n)$ berakibat $m = \pm n$. ●

Definisi 1.1.4 Suatu pemetaan $\phi : A \to B$ dinamakan **satu-satu** bila $a_1 \neq a_2$ di A selalu berakibat $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$. ✓

Contoh 1.1.9 adalah pemetaan satu-satu sedangkan Contoh 1.1.10 bukan.

Contoh 1.1.11 Misalkan pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ diberikan oleh $\phi(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Maka untuk sebarang $m \in 2\mathbb{Z}$ dan karena m genap, maka dapat dipilih $n = \dfrac{m}{2} \in \mathbb{Z}$ sehingga $\phi(n) = 2n = m$. Dalam hal ini $\phi(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$.

Contoh 1.1.12 Misalkan pemetaan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ diberikan oleh $\phi(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Maka untuk sebarang $y \in \mathbb{R}^+$ dan karena $y > 0$, maka dapat dipilih $x = \ln y \in \mathbb{R}$ sehingga $\phi(x) = e^x = e^{\ln y} = y$. Jadi dalam hal ini $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Definisi 1.1.5 Suatu pemetaan $\phi : A \to B$ dinamakan **pada** bila untuk setiap y di B ada suatu $x \in A$ sehingga $\phi(x) = y$. Dalam kasus ini $\phi(A) = B$. Bila pemetaan ϕ adalah satu dan pada dinamakan pemetaan **satu-satu pada** (**bijektif**). ✓

Dalam Contoh 1.1.11 dan 1.1.12 adalah pemetaan pada, sedangkan dalam Contoh 1.1.10 bukan petaan pada.

Definisi 1.1.6 Diberikan dua pemetaan $\phi : A \to B$ dan $\chi : B \to C$. Didefinisikan pemetaan **komposisi** $\chi \circ \phi : A \to C$ oleh

$$\chi \circ \phi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\phi(a)), \ \forall a \in A. \quad ✓$$

Contoh 1.1.13 Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ diberikan oleh $\phi(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ dan misalkan $\chi : 2\mathbb{Z} \to 10\mathbb{Z}$ diberikan oleh $\chi(m) = 5m$, $\forall m \in 2\mathbb{Z}$. Didapat

$$\chi \circ \phi(n) = \chi(\phi(n)) = \chi(2n) = 5 \cdot 2n = 10n.$$

Catatan bahwa, pemetaan ϕ, χ dan $\chi \circ \phi$ adalah pemetaan satu-satu pada.

Contoh 1.1.14 Misalkan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diberikan oleh $\phi(x) = 2x$ dan $\chi(x) = x^2$ untuk semua x di $\mathbb{R}$. Komposisi $\chi \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $\phi \circ \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diberikan oleh $\chi \circ \phi(x) = \chi(\phi(x))$ dan $\phi \circ \chi(x) = \phi(\chi(x))$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Didapat, $\chi(\phi(x)) = \chi(2x) = (2x)^2 = 4x^2$ dan $\phi(\chi(x)) = \phi(x^2) = 2x^2$. Terlihat bahwa $\chi \circ \phi \neq \phi \circ \chi$. Perlu diperhatikan bahwa, walaupun ϕ satu-satu pada tak-satupun dari pemetaan $\chi, \chi \circ \phi$ dan $\phi \circ \chi$ adalah satu-satu pada.

Teorema 1.1.1 Diberikan tiga pemetaan $\phi : A \to B$, $\chi : B \to C$ dan $\psi : C \to D$. Maka

(1) **Assosiatif :** $\psi \circ (\chi \circ \phi) = (\psi \circ \chi) \circ \phi$.

(2) Bila ϕ dan χ keduanya adalah satu-satu, maka $\chi \circ \phi$ satu-satu.

(3) Bila ϕ dan χ keduanya adalah pada, maka $\chi \circ \phi$ pada.

Bukti

(1) Untuk sebarang $x \in A$, didapat

$$\begin{aligned} \psi \circ (\chi \circ \phi)(x) &= \psi((\chi \circ \phi)(x)) \\ &= \psi(\chi(\phi(x))) \\ &= (\psi \circ \chi)(\phi(x)) \\ &= (\psi \circ \chi) \circ \phi(x). \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\psi \circ (\chi \circ \phi) = (\psi \circ \chi) \circ \phi$.

(2) Diberikan sebarang $x, y \in A$ yang memenuhi $\chi \circ \phi(x) = \chi \circ \phi(y)$, ditunjukkan bahwa $x = y$. Didapat $\chi(\phi(x)) = \chi(\phi(y))$. Karena χ satu-satu, maka haruslah $\phi(x) = \phi(y)$. Juga karena ϕ satu-satu, maka haruslah $x = y$. Dengan demikian $\chi \circ \phi$ adalah satu-satu.

(3) Diberikan sebarang $z \in C$, karena χ pada dapat dipilih $y \in B$ yang memenuhi $\chi(y) = z$. Tetapi ϕ adalah pada, maka dapat dipilih $x \in A$ yang memenuhi $\phi(x) = y$. Sehingga didapat $\chi(y) = \chi(\phi(x)) = z$ atau $(\chi \circ \phi)(x) = z$. Jadi bila diberikan sebarang $z \in C$ selalu dapat dipilih $x \in A$ yang memenuhi $(\chi \circ \phi)(x) = z$. Hal ini berarti bahwa $\chi \circ \phi$ adalah pada. ✓

Definisi 1.1.7 Untuk sebarang himpunan $A \neq \emptyset$ didefinisikan suatu pemetaan **identitas** $\rho_0 : A \to A$ oleh $\rho_0(x) = x, \ \forall x \in A$. ✓

Proposisi 1.1.2 Misalkan A adalah sebarang himpunan tak-kosong dan $\rho_0 : A \to A$ adalah pemetaan identitas. Maka

(1) ρ_0 adalah satu-satu pada.

(2) Untuk sebarang himpunan B dan sebarang pemetaan $\phi : A \to B$, didapat $\phi \circ \rho_0 = \phi$.

(3) Untuk sebarang pemetaan $\phi : B \to A$, didapat $\rho_0 \circ \phi = \phi$

Bukti

(1) Diberikan sebarang $y \in A$ (kodomain) dan karena ρ_0 pemetaan identitas, maka dapat dipilih $x \in A$ (domain) yaitu $x = y$ sehingga $\rho_0(x) = x = y$. Jadi ρ_0 adalah pada. Selanjutnya bila $a, b \in A$ (domain) yang memenuhi $\rho_0(a) = \rho_0(b)$. Didapat $a = b$. Jadi ρ_0 adalah satu-satu. Dengan demikian ρ_0 adalah satu-satu pada.

(2) Diberikan sebarang $a \in A$, didapat $\phi \circ \rho_0(a) = \phi(\rho_0(a)) = \phi(a)$. Terlihat bahwa $\phi \circ \rho_0 = \phi$.

(3) Diberikan sebarang $b \in B$, didapat $\rho_0 \circ \phi(b) = \rho_0(\phi(b)) = \phi(b)$. Terlihat bahwa $\rho_0 \circ \phi = \phi$. ✓

Contoh 1.1.15 Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $\phi(n) = 3n, \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya perhatikan bahwa pemetaan $\chi : 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan oleh $\chi(m) = \frac{m}{3}, \ \forall m \in 3\mathbb{Z}$. Maka $\chi \circ \phi(n) = \chi(\phi(n)) = \frac{3n}{3} = n$. Terlihat bahwa $\chi \circ \phi$ adalah pemetaan identitas pada $\mathbb{Z}$. Juga, $\phi \circ \chi(m) = \phi(\chi(m)) = \phi(\frac{m}{3}) = 3\frac{m}{3} = m$. Terlihat bahwa $\phi \circ \chi$ adalah pemetaan identitas.

Definisi 1.1.8 Misalkan $\phi : A \to B$. Maka pemetaan ϕ dikatakan **mempunyai invers** bila ada suatu pemetaan $\phi^{-1} : B \to A$ sedemikian hingga $\phi^{-1} \circ \phi$ adalah pemetaan identitas pada A dan $\phi \circ \phi^{-1}$ adalah pemetaan identitas pada B. Pemetaan ϕ^{-1} dinamakan **invers** dari ϕ.

Teorema 1.1.2 Misalkan $\phi : A \to B$ mempunyai invers. Maka

(1) Ada dengan tunggal invers ϕ^{-1} terhadap ϕ.

(2) Invers dari ϕ^{-1} adalah ϕ, yaitu $(\phi^{-1})^{-1} = \phi$.

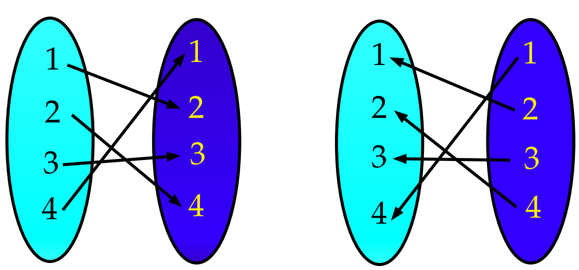
Bukti

(1) Misalkan ada dua pemetaan $\chi : B \to A$ dan $\psi : B \to A$ dengan $\chi \circ \phi = \psi \circ \phi = \rho_0^A$ dan ρ_0^A pemetaan identitas pada A dan $\phi \circ \chi = \phi \circ \psi = \rho_0^B$, ρ_0^B adalah pemetaan identitas pada B. Maka

$$\chi = \chi \circ \rho_0^B = \chi \circ (\phi \circ \psi) = (\chi \circ \phi) \circ \psi = \rho_0^A \circ \psi = \psi.$$

(2) Jelas dari definisi invers.

Contoh 1.1.16 Misalkan $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan oleh $\phi(1) = 2, \phi(2) = 4, \phi(3) = 3, \phi(4) = 1$ atau diberikan oleh sebelah kiri Gambar 1.6. Maka ϕ^{-1} didefinisikan



Gambar 1.6: Diagram Fungsi

oleh $\phi^{-1}(1) = 4, \phi^{-1}(2) = 1, \phi^{-1}(3) = 3, \phi^{-1}(4) = 2$, atau diberikan oleh sebelah kanan Gambar 1.6.

Contoh 1.1.17 Misalkan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq}$, dengan $\mathbb{R}^{\geq} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ adalah himpunan bilangan riil tak-negatif dan $\phi(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Perlu diperhatikan bahwa pemetaan ϕ adalah pada, tetapi tidak satu-satu. Sebab $\phi(-2) = \phi(2) = 2$. Juga pemetaan ϕ tidak mempunyai invers sebab pasangan dari $2 \in \mathbb{R}^{\geq}$ terhadap ϕ^{-1} tidak tunggal, yaitu $\phi^{-1}(2) = -2$ dan $\phi^{-1}(2) = 2$. ●

Contoh 1.1.18 Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $\phi(n) = 5n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Catatan bahwa pemetaan ϕ satu-satu tetapi tidak pada. Sebab $7 \neq 5n$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ dan pemetaan ϕ tidak punya invers sebab $6 \in \mathbb{Z}$ (kodomain) tidak punya kawan di domain $\mathbb{Z}$, yaitu $\phi^{-1}(6)$ tidak terdefinisi. ●

Teorema 1.1.3 Misalkan $\phi : A \to B$ dan $\chi : B \to C$ adalah dua pemetaan. Maka

(1) pemetaan ϕ mempunyai invers bila dan hanya bila ϕ satu-satu pada.

(2) Bila masing-masing ϕ dan χ mempunyai invers, maka $\chi \circ \phi$ mempunyai invers dan $(\chi \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \chi^{-1}$.

Bukti

(1) ($\Rightarrow$) Misalkan $\phi^{-1} : B \to A$ ada. Maka untuk sebarang $a, b \in A$ dan $\phi(a) = \phi(b)$ didapat

$$a = \phi^{-1}(\phi(a)) = \phi^{-1}(\phi(b)) = b.$$

Terlihat bahwa pemetaan ϕ adalah pada. Selanjutnya, diberikan sebarang $b \in B$, maka $\phi(\phi^{-1}(b)) = b$. Jadi dapat dipilih $a = \phi^{-1}(b)$ di A yang memenuhi $\phi(a) = b$. Jadi ϕ adalah pada. Dengan demikian ϕ adalah satu-satu pada.

($\Leftarrow$) Misalkan ϕ adalah satu-satu pada. definisikan pemetaan $\tau : B \to A$ sebagai berikut. Untuk sebarang $b \in B$, $\tau(b)$ adalah elemen $a \in A$ yang memenuhi $\phi(a) = b$ (sebab ϕ adalah pada). Dan, karena ϕ satu-satu, maka hanya ada tepat satu $a \in A$. Jadi τ terdefinisi secara baik. Selanjutnya, dari definisi τ didapat $\phi(\tau(b)) = b$ untuk sebarang $b \in B$, juga $\tau(\phi(a)) = a$. Jadi $\tau = \phi^{-1}$ dengan demikian ϕ punya invers.

(2) Asumsikan bahwa maasing-masing ϕ dan χ mempunyai invers. Maka dari (1) ϕ dan χ adalah satu-satu pada. Dengan menggunakan Teorema 1.1.1 $\chi \circ \phi$ adalah satu-satu pada. Lagi, dengan menggunakan hasil (1) $\chi \circ \phi$ mempunyai invers. Sehingga didapat

$$(\phi^{-1} \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \phi) = \phi^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \chi) \circ \phi = \phi^{-1} \circ \rho_0^B \circ \phi = \phi^{-1} \circ \phi = \rho_0^A.$$

Terlihat bahwa $\phi^{-1} \circ \chi^{-1} = (\chi \circ \phi)^{-1}$. ✓

Definisi 1.1.9 Diberikan dua himpunan A dan B, maka A dan B mempunyai **kardinalitas yang sama**, yaitu $|A| = |B|$ bila dan hanya bila ada suatu pemetaan satu-satu pada $\phi : A \to B$. ✓

Contoh 1.1.19 Dua himpunan berhingga mempunyai kardinalitas sama bila dan hanya bila banyaknya elemen kedua himpunan tersebut sama. Juga, $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}| = |n\mathbb{Z}|$ untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 1$, sebab pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $\phi(x) = nx$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ adalah pemetaan satu-satu pada. ●

Latihan

Latihan 1.1.1 Tentukan apakah pemetaan yang berikut ini pemetaan satu-satu atau bukan dan berikan alasannya.

1. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = 5x + 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $\phi(n) = n^2, \ \forall n \in \mathbb{Z}$.
5. $\phi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$, dengan $\mathbb{Q}^*$ adalah himpunan semua bilangan rasional tak-nol dan $\phi(n/m) = m/n, \ \forall n/m \in \mathbb{Q}^*$.
6. $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dengan $\mathbb{R}^+$ adalah himpunan semua bilangan riil positip dan $\phi(x) = x^4, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
7. $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, dengan $\mathbb{Z}^*$ adalah himpunan semua bilangan bulat tak-nol dan $\phi(m, n) = m/n, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Latihan 1.1.2 Tentukan apakah pemetaan berikut pada atau tidak, jelaskan jawaban saudara.

1. $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = \ln x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = x^2 - 4, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\phi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, ϕ adalah sebarang pemetaan satu-satu.

Latihan 1.1.3 Apakah pemetaan berikut mempunyai invers atau tidak, berikan alasannya.

1. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = |x + 1|, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $\phi(x) = (5x + 3)/2, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Diberikan pemetaan
$$\phi : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$
dengan $\phi(i) = i + 2$ untuk $1 \leq i \leq n - 2$ dan $\phi(n - 1) = 1, \phi(n) = 2$.

Latihan 1.1.4 Diberikan dua pemetaan $\phi : A \to B$ dan $\chi : B \to C$. Tunjukkan bahwa

(a) Bila $\chi \circ \phi$ adalah pada, maka χ harus juga pada.

(b) Bila $\chi \circ \phi$ adalah satu-satu, maka ϕ harus juga satu-satu.

Latihan 1.1.5 Tunjukkan bahwa bila himpunan A adalah berhingga dan $|A| = n$, maka $|A \times A| = n^2$.

Latihan 1.1.6 Tunjukkan bila $|A| = |B|$ dan $|C| = |D|$, maka $|A \times C| = |B \times D|$.

1.2 Relasi Ekivalen dan Partisi

Gagasan relasi ekivalen pada himpunan memainkan peran penting dalam berbagai konstruksi dalam aljabar. Seperti yang akan terlihat di bagian ini. Relasi ekivalen pada himpunan menentukan partisi dari himpunan menjadi potongan-potongan yang tidak tumpang tindih, dan sebaliknya setiap partisi tersebut menentukan relasi ekivalen pada himpunan tersebut.

Contoh 1.2.1 Pada himpunan $\mathbb{Z}$, diberikan relasi $\sim$ didefinisikan oleh kondisi $a \sim b$ bila dan hanya bila $a-b$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Perlu diperhatikan bahwa, relasi $\sim$ mempunyai sifat berikut:

1. Untuk setiap bilangan bulat a, didapat $a - a = 0$, jadi $a - a$ dapat dibagi oleh 5. Dengan demikian $a \sim a$.

2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $a-b = -(b-a)$. Jadi bila $a \sim b$ yang berarti bahwa $a-b$ dapat dibagi 5, maka juga $b - a$ dapat dibagi 5. Dengan demikian $b \sim a$.

3. Untuk $a, b, c \in \mathbb{Z}$, bila $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a - b = 5n$ dan $b - c = 5m$ untuk beberapa $m, n \in \mathbb{Z}$. Didapat

$$a - c = (a - b) + (b - c) = 5n + 5m = 5(n + m),$$

terlihat bahwa $a \sim c$.

Selanjutnya diambil $8 \in \mathbb{Z}$, diselidiki himpunan semua bilangan bulat x yang memenuhi $x \sim 8$, yaitu $[8]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \sim 8\} \subset \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $8 - 3 = 5$. Jadi $8 \sim 3$ dan berdasarkan sifat (3), maka $x \sim 3$. Juga berdasarkan sifat (2), maka $3 \sim 8$. Jadi bila $x \sim 3$, maka $x \sim 8$. Jadi $x \sim 8$ bila dan hanya bila $x \sim 3$ atau bila dan hanya bila $x - 3 = 5k$ atau ekivalen $x = 2 + 5k$ untuk beberapa bilangan bulat k. Dengan demikian $[8]_\sim = 3 + 5\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat yang dapat diungkapkan sebagai jumlah dari 3 dan kelipatan 5. ●

Contoh 1.2.2 Bila $P(\mathbb{Z})$ adalah himpunan dari semua himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ dan relasi pada $P(\mathbb{Z})$ didefinisikan sebagai berikut: diberikan sebarang $S, T \in P(\mathbb{Z})$, $S \sim T$ bila dan hanya $|S| = |T|$. Tetapi $|S| = |T|$, berarti bahwa ada pemetaan $\phi : S \to T$ dengan ϕ adalah satu-satu pada. Selanjutnya dibahas sifat dari relasi $\sim$:

1. Untuk sebarang $S \in P(\mathbb{Z})$, pilih ϕ pemetaan identitas pada S. Sebagaimana telah dibahas pemetan ini adalah satu-satu pada. Jadi $S \sim S$.

2. Untuk sebarang $S, T \in P(\mathbb{Z})$, bila $S \sim T$ dapat dipilih pemetaan satu-satu pada $\phi : S \to T$. Maka dengan menggunakan Teorema 1.1.2 dan 1.1.3 pemetaan invers $\phi^{-1} : T \to S$ adalah satu-satu pada. Jadi $T \sim S$.

3. Untuk sebarang $S, T, U \in P(\mathbb{Z})$, bila $S \sim T$ dan $T \sim U$, maka dapat dipilih pemetaan satu-satu pada $\phi : S \rightarrow T$ dan $\chi : T \rightarrow U$. Dengan menggunakan Teorema 1.1.3 didapat pemetaan komposisi $\chi \circ \phi : S \rightarrow U$ adalah satu-satu pada. Dengan demikian $S \sim U$. ●

Definisi 1.2.1 Suatu **relasi** pada suatu himpunan tak-kosong S adalah himpunan bagian $\mathcal{R} \subset S \times S$. Bila $\mathcal{R}$ adalah suatu relasi pada S penulisan $a\mathcal{R}b$ mempunyai arti $(a, b) \in \mathcal{R}$. Jadi $\mathcal{R}$ adalah suatu **relasi ekivalen** bila tiga kondisi berikut dipenuhi, yaitu untuk semua $a, b, c \in S$

1. **Refleksif** $a\mathcal{R}a$.
2. **Simetri** Bila $a\mathcal{R}b$, maka $b\mathcal{R}a$.
3. **Transitif** Bila $a\mathcal{R}b$ dan $b\mathcal{R}c$, maka $a\mathcal{R}c$.

Bila $\mathcal{R}$ adalah relasi ekivalen pada S, maka untuk sebarang $a \in S$, **klas ekivalen** dari a adalah himpunan $[a]_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in S \,|\, a\mathcal{R}b\}$. ✓

Relasi yang diberikan dalam Contoh 1.2.1 dan 1.2.2 adalah relasi ekivalen.

Contoh 1.2.3 Diberikan $S \neq \emptyset$, relasi sama dengan $=$ didefinisikan oleh himpunan bagian $\{(x, x) \,|\, x \in S\} \subset S \times S$ adalah suatu relasi ekivalen. ●

Berikut ini diberikan beberapa sifat penting dari relasi ekivalen yang sering digunakan dalam pengkonstruksian secara aljabar.

Teorema 1.2.1 Misalkan $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen pada suatu himpunan tak-kosong S dan $a, b \in S$ adalah sebarang elemen di S. Maka

(1) $a \in [a]_\sim$.

(2) Bila $a \in [b]_\sim$, maka $[a]_\sim = [b]_\sim$.

(3) $[a]_\sim = [b]_\sim$ bila dan hanya bila $a \sim b$.

(4) Salah satu $[a]_\sim = [b]_\sim$ atau $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$

Bukti

(1) Dari sifat refleksif, maka $a \sim a$. Jadi $a \in [a]_\sim$.

(2) Bila $a \in [b]_\sim$. Maka dari definisi klas ekivalen didapat $b \sim a$. Dari sifat simetri didapat $a \sim b$. Selanjutnya bila $x \in [a]_\sim$, maka $a \sim x$. Dengan sifat transitif, maka $b \sim x$. Jadi $x \in [b]_\sim$. Terlihat bahwa $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$. Dengan cara yang sama, bila $y \in [b]_\sim$, maka $b \sim y$. Dengan menggunakan sifat transitif didapat $a \sim y$ dan $y \in [a]_\sim$. Jadi $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$. Dengan demikian $[a]_\sim = [b]_\sim$.

(3) ($\Rightarrow$) Misalkan $[a]_\sim = [b]_\sim$. Dari (1) didapat $b \in [b]_\sim$. Jadi $b \in [a]_\sim$, hal ini berarti bahwa $a \sim b$.
($\Leftarrow$) Misalkan $a \sim b$. Maka $b \in [a]_\sim$. Dengan menggunakan hasil (2) didapat $[a]_\sim = [b]_\sim$.

(4) Andaikan bahwa $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$. Hal ini berarti bahwa ada beberapa $c \in [a]_\sim$ dan $c \in [b]_\sim$. Dengan menggunakan hasil (2), maka $[c]_\sim = [a]_\sim$ dan $[c]_\sim = [b]_\sim$. Jadi $[a]_\sim = [b]_\sim$.

Hasil Teorema 1.2.1 bagian (4) menyatakan bahwa dua klas ekivalen, maka kalau tidak sama pasti irisan keduanya kosong dan sebaliknya kalau irisannya tidak kosong pasti keduanya sama. Hal ini berarti bahwa relasi ekivalen adalah suatu partisi yang membagi klas ekivalen berbeda kedalam klas yang saling asing (irisannya kosong). Relasi ekivalen sangat berguna dalam pengkontruksian secara aljabar. Pada contoh berikut, bukannya memulai dengan relasi ekivalen tetapi mempartisi himpunan. Dimulai dengan mempartisi satu himpunan dan menggunakan partisi untuk mendefinisikan relasi ekivalen.

Contoh 1.2.4 Diberikan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, misalkan $[1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x - 1 < 1\}$. Himpuna [1] adalah interval $[1, 2) \subset \mathbb{R}$. Dengan cara yang sama, untuk sebarang bilangan bulat n, misalkan $[n] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x - n < 1\} = [n, n + 1)$. Catatan bahwa, untuk sebarang bilangan bulat $i \neq j$ didapat $[i] \cap [j] = \emptyset$ dan untuk setiap bilangan riil $x \in \mathbb{R}$, $x \in [n]$ dimana n adalah bilangan bulat terbesar sehingga $n \leq x$. Jadi $\mathbb{R}$ dibagi kedalam klas yang saling asing. Bila didefinisikan suatu relasi $\sim$ pada $\mathbb{R}$ oleh $x \sim y$ bila dan hanya bila $x \in [n]$ dan $y \in [n]$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen pada $\mathbb{R}$.

Definisi 1.2.2 Misalkan S adalah himpunan tak-kosong. Suatu **partisi** dari S terdiri dari suatu himpunan koleksi $\mathcal{K} = \{P_i \,|\, P_i \subseteq S\}$ dari himpunan bagian tak-kosong dari S yang memenuhi

(1) $S = \bigcup\limits_i P_i$.

(2) Untuk sebarang P_i dan P_j dalam himpunan koleksi $\mathcal{K}$, maka salah satu yang terjadi $P_i = P_j$ atau $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Himpunan bagian P_i dalam koleksi $\mathcal{K}$ dinamakan **sel** dari partisi.

Sekarang sampai pada Teorema utama yang menghubungkan relasi ekivalen dengan partisi, generalisasi dari apa yang telah dibahas dalam Contoh 1.2.4.

Teorema 1.2.2 Misalkan S adalah himpunan tak-kosong

(1) Diberikan relasi ekivalen $\sim$ pada S, koleksi dari klas ekivalen terhadap $\sim$ adalah suatu partisi.

(2) Diberikan suatu partisi $\{P_i\}$ dari S, ada suatu relasi ekivalen pada S yang mempunyai klas ekivalen adalah tepat merupakan sel dari partisi.

Bukti

(1) Diberikan suatu relasi ekivalen $\sim$ pada S. Dari Teorema 1.2.1 bagian (1) didapat $a \in [a]_\sim$ untuk setiap $a \in S$. Dengan menggunakan Teorema 1.2.1 bagian (4) didapat $S = \bigcup_{a \in S} [a]_\sim$.

(2) Diberikan suatu partisi $\{P_i\}$ didefinisikan suatu relasi $\sim$ oleh: $a \sim b$ bila dan hanya bila $a \in P_i$ dan $b \in P_i$. Dari Definisi 1.2.2 bagian (1) didapat sebarang $a \in S$ berada pada beberapa sel dalam partisi, tentunya a berada pada sel yang sama dengan dirinya sendiri. Jadi $a \sim a$. Bila $a \sim b$, maka a dan b berada pada sel yang sama dalam partisi. Hal ini sama artinya b dan a berada pada sel yang sama dalam partisi. Jadi $b \sim a$. Bila $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka a dan b berada pada sel yang sama P_i juga b dan c berada pada sel yang sama P_j. Karena $b \in P_i \cap P_j$, maka dengan menggunakan Definisi 1.2.2 bagian (2) didapat $P_i = P_j$. Jadi a dan c berada pada sel yang sama, dengan demikian $a \sim c$. Selanjutnya diberikan $a \in S$, misalkan $a \in P_i$. Maka $x \in [a]_\sim$ bila dan hanya bila $a \sim x$ atau bila dan hanya bila a dan x berda pada sel yang sama dalam partisi atau dengan kata lain bila dan hanya bila $x \in P_i$. Jadi $[a]_\sim = P_i$. ✓

Definisi 1.2.3 Misalkan $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen pada S himpunan semua klas ekivalen pada S terhadap $\sim$ dinotasikan oleh $S/\sim$. Khususnya, masing-masing elemen dari $S/\sim$ adalah himpunan bagian dari S. Didefinisikan suatu pemetaan $\phi : S \to S/\sim$ oleh $\phi(x) = [x]_\sim, \forall x \in S$. Pemetaan ϕ dinamakan pemetaan ***kanonik*** dari S ke $S\sim$. ✓

Contoh 1.2.5 Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $\sim$ adalah relasi ekivalen pada S yang diberikan oleh $1 \sim 3, 2 \sim 4$ dan pasangan lain yang beralasi diberikan oleh sifat refleksif dan simetri. Maka ada dua elemen di $S/\sim$ yaitu $\{1, 3\}$ dan $\{2, 4\}$ sehingga didapat $\phi(1) = \phi(3) = \{1, 3\}$ dan $\phi(2) = \phi(4) = \{2, 4\}$.

Latihan

Latihan 1.2.1 Tentukan apakah relasi berikut adalah relasi ekivalen pada himpunan yang diberikan. Bila ya, uraikan klas ekivalennya.

1. Dalam $\mathbb{R}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $|a| = |b|$.
2. Dalam $\mathbb{R}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $a \leq b$.
3. Dalam $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $a - b$ adalah genap.
4. Dalam $\mathbb{R}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $|a - b| \leq 1$.

5. Dalam $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $a = b +$ beberapa kelipatan dari 3.
6. Dalam $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ bila dan hanya bila $x_1 y_2 = x_2 y_1$.
7. Dalam $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ bila dan hanya bila $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.
8. Dalam $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ bila dan hanya bila $3y_1 - 5x_1 = 3y_2 - 5x_2$.

Latihan 1.2.2 Dalam $\mathbb{R}$, diberikan interval $(n, n+2]$ dimana n adalah bilangan bulat genap. Tunjukkan bahwa koleksi dari interval-interval tersebut adalah suatu partisi dari $\mathbb{R}$. Selanjutnya uraikan relasi ekivalen yang ditentukan oleh partisi tersebut.

Latihan 1.2.3 Dalam bidang $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ terangkan mengapa pendefinisian $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ bila dan hanya bila $x_1 y_2 = x_2 y_1$ tidak memberikan relasi ekivalen.

Latihan 1.2.4 Diberikan sebarang bilangan bulat n yang tetap. Didefinisikan relasi pada $\mathbb{Z}$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $a - b$ dapat dibagi oleh n. Tunjukkan relasi tersebut adalah relasi ekivalen pada $\mathbb{Z}$ dan uraikan klas ekivalennya.

Latihan 1.2.5 Misalkan $\phi : S \to T$ adalah sebarang pemetaan dan didefinisikan suatu relasi $\sim$ pada S oleh $a \sim b$ bila dan hanya bila $\phi(a) = \phi(b)$. Tunjukkan bahwa $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen.

1.3 Sifat-sifat dari $\mathbb{Z}$

Pada bagian ini dibahas beberapa sifat dasar bilangan bulat, banyak yang akan menjadi penting kemudian dalam mengidentifikasi contoh berbagai jenis struktur aljabar, dimana $\mathbb{Z}$ akan memainkan peran penting bagi suatu model dasar. Bahasan dimulai dengan sifat relasi urutan biasa pada $\mathbb{Z}$ kemudian beralih ke sifat-sifat yang melibatkan operasi yang sudah dikenal penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Akhirnya, diperkenalkan struktur aljabar baru terkait erat dengan bilangan bulat, yang disebut bilangan bulat mod n untuk setiap bilangan bulat $n > 1$.

Terurut Secara Baik dan Induksi

Elemen-elemen himpunan bilangan bulat positip $\mathbb{N}$ dapat ditulis dalam urutan menaik dengan tanda pertaksamaan berulang, yaitu

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$$

Misalkan $S \subset \mathbb{N}$ dengan $S \neq \emptyset$ dan $n \in \mathbb{N}$. Dari bilangan bulat berikut $1, 2, 3, \ldots, n$ dapat dipilih satu yang merupakan elemen terkecil yang berada di S. Secara intuisi didapat aksiomatik berikut.

Aksiomatik 1 (Prinsip Keterurutan Secara Baik dalam $\mathbb{N}$)
Setiap himpunan bagian $S \subset \mathbb{N}$ dengan $S \neq \emptyset$ mempunyai suatu elemen terkecil di S, yaitu elemen pertama di S setelah elemen-elemennya diurutkan secara menaik. ☑

Sering dalam membuktikan beberapa teorema atau membangun beberapa struktur diinginkan memilih elemen positip terkecil dari himpunan tak-kosong yang diberikan. Prinsip keterurutan secara baik menyatakan bahwa elemen tersebut dijamin ada. Terkait erat dengan prinsip keterurutan secara baik ada prinsip lain yaitu induksi matematika, yang sama pentingnya dalam bukti dan konstruksi. Digunakan prinsip keterutan secara baik untuk membuktikan prinsip dari induksi matematika sebagaimana diberikan berikut.

Teorema 1.3.1 (**Prinsip dari Induksi Matematika**) Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang suatu bilangan bulat positip n sedemikian hingga

(1) $P(1)$ adalah benar.

(2) Bila $P(k)$ adalah benar, maka $P(k+1)$ adalah benar.

Maka $P(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat positip n.

Bukti Dibuktikan melalui kontradiksi. Andaikan ada bilangan bulat positip n yang memenuhi $P(n)$ tidak benar. Maka dari itu ada himpunan semua bilangan bulat positip

$$S = \{n > 0 \,|\, P(n) \text{ tidak benar}\}.$$

Selanjutnya menggunakan prinsip keterutan secara baik, maka S harus mempunyai suatu elemen terkecil misalkan m. Berikutnya dari asumsi (1) m tidak akan sama dengan 1, sebab $P(1)$ benar. Jadi $m-1$ tetap positip. Karena $m-1 < m$ dan m adalah bilangan bulat positip terkecil dengan $P(m)$ tidak benar (sebab $m \in S$) dan $P(m-1)$ adalah benar (sebab $m-1 \notin S$) dan dengan menggunakan asumsi (2), maka $P(m) = P((m-1)+1)$ adalah benar. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa $P(m)$ tidak benar. Dengan demikian haruslah $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positip. ✓

Contoh 1.3.1 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positip n, maka

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Bukti menggunakan prinsip induksi matematika. Untuk $n = 1$ didapat $1 = 1^2$ benar. Misalkan benar untuk $n = k$, didapat

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) = k^2 \text{ benar}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa untuk $n = k+1$ akan didapat

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2.$$

Hal ini dilakukan sebagai berikut

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1)}_{=k^2} + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Terlihat benar bahwa

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2. \qquad \bullet$$

Contoh 1.3.2 Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$, suatu himpunan S dengan $|S| = n$ mempunyai himpunan bagian sebanyak 2^n. Untuk membuktikan ini, $n = 0$ dikeluarkan dulu dari bukti induksi. Untuk $n = 0$ dibuktikan sebagai berikut. Himpunan yang tidak mempunyai anggota adalah himpunan kosong. Jadi $S = \varnothing$ dan banyaknya himpunan bagian adalah S sendiri. Jadi benar bahwa $2^0 = 1$. Selanjutnya untuk $n = 1$, maka $S = \{x\}$ dan himpunan bagian dari S adalah: $\varnothing$ dan S sendiri. Jadi banyaknya himpunan bagian dari S adalah $2^n = 2^1 = 2$. Asumsikan benar bahwa himpunan dengan k elemen mempunyai sebanyak 2^k himpunan bagian. Misalkan S sebarang himpunan dengan $|S| = k+1$ dan a sebarang elemen di S. Selanjutnya misalkan $T = S - \{a\}$. Himpunan T mempunyai elemen sebanyak k. Jadi T memenuhi asumsi yaitu mempunyai sebanyak 2^k himpunan bagian. Himpunan bagian dari S yang tidak memuat a adalah T mempunyai 2^k himpunan bagian. Jadi S mempunyai sebanyak $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ himpunan bagian. $\bullet$

Contoh 1.3.3 Untuk sebarang bilangan riil x, y dan sebarang bilangan bulat $n \geq 1$ didapat

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n).$$

Sebagai langkah dasar induksi $n = 1$ didapat $x^2 - y^2(x-y)(x+y)$ adalah jelas benar. Untuk langkah induksi berikutnya, asumsikan bahwa benar

$$x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}\right).$$

Maka didapat

$$\begin{aligned}
(x-y)\left(x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1} + y^k\right) &= (x-y)\left[x(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}) + y^k\right] \\
&= x\,\underbrace{(x-y)\left(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}\right)}_{=x^k-y^k} + (x-y)y^k \\
&= x\left(x^k - y^k\right) + (x-y)y^k \\
&= x^{k+1} - y^{k+1}.
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x-y)\left(x^k + x^{k-1}y + \cdots + xy^{k-1} + y^k\right),$$

sebagaimana yang diinginkan. $\bullet$

Teorema 1.3.2 Prinsip Induksi (Versi Modifikasi) Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan yang bergantung pada bilangan bulat positip n yang memenuhi

(1) $P(1)$ adalah benar.

(2) Bila $P(k)$ benar untuk semua k dengan $1 \leq k < m$, maka $P(m)$ adalah benar.

Maka $P(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat positip n.

Bukti Misalkan bahwa $Q(n)$ adalah pernyataan bahwa $P(k)$ benar untuk semua k dimana $1 \leq k \leq n$. Ditunjukkan dengan menggunakan prinsip induksi matematika (Teorema 1.3.1) bahwa $Q(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positip n. Karena $Q(n)$ berakibat $P(n)$, maka hal ini berakibat $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positip n. Sebagai langkah dasar, $Q(1)$ adalah pernyataan $P(1)$, adalah benar dari asumsi (1). Untuk langkah induksi berikutnya, asumsikan bahwa $Q(m)$ benar dan dibuktikan bahwa $Q(m+1)$ benar. Disini $Q(m+1)$ adalah pernyataan $P(k)$ benar untuk semua k dimana $1 \leq k \leq m+1$. Untuk $1 \leq k \leq m$, $P(k)$ mengikuti $Q(m)$. Sedangkan untuk $k = m+1$ dengan menggunakan asumsi (2) $P(m+1)$ adalah benar. ✓

Dalam Teorema 1.3.1 pernyataan (1) dan (2) dapat diganti sebagai berikut. Diasumsikan untuk beberapa bilangan bulat positip n_0:

(1') $P(n_0)$ adalah benar.

(2') Bila $P(k)$ adalah benar untuk semua k, dengan $n_0 \leq k < m$, maka $P(m)$ adalah benar.

Maka $P(n)$ benar untuk semua $n \geq n_0$.

Contoh 1.3.4 Misalkan bahwa $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$2n + 1 \leq 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pernyataan $P(1)$ dan $P(2)$ adalah salah sebab

$$2(1) + 1 \nleq 2^1 \quad \text{dan} \quad 2(2) + 1 \nleq 2^2.$$

Apapun itu, $P(3)$ adalah benar sebab

$$2(3) + 1 = 7 \leq 2^3 = 8.$$

Misalkan bahwa $P(k)$ adalah benar untuk semua $k \geq 3$, didapat

$$2k + 1 \leq 2^k \quad (\text{bila } k \geq 3)$$

Hal ini berakibat bahwa

$$2(k+1) + 1 = 2k + 3 = 2k + 1 + 2 \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1} \quad (k \geq 3).$$

Terlihat bahwa $P(k+1)$ adalah benar. Akibatnya $P(n)$ adalah benar untuk $n \geq 3$. Atau pernyataan

$$2n + 1 \leq 2^n$$

berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \geq 3$.

Contoh 1.3.5 Diberikan dua bilangan riil x dan y, dengan mengalikan bentuk $(x+y)$ berulang kedalam bentuk pangkat didapat:
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
Hal ini menjadi rumit setelah beberapa saat untuk menghitung semua pangkat dari $(x+y)$. ●

Untuk menyelesaikan masalah tersebut diberikan teorema berikut.

Teorema 1.3.3 (**Binomial**) Diberikan sebarang dua bilangan riil x dan y, maka untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$ didapat

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n,$$

dimana **koefisien binomial** diberikan oleh

$$\binom{n}{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

untuk $0 \leq k \leq n$.

Bukti Untuk $n = 1$, benar bahwa $x + y = x^1 + y^1$. Asumsikan pernyataan benar untuk k. Didapat

$$\begin{gathered}(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = \\ (x+y)\left[x^k + \tbinom{k}{1}x^{k-1}y + \tbinom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \tbinom{k}{k-2}x^2y^{k-2} + \tbinom{k}{k-1}xy^{k-1} + y^k\right] = \\ x^{k+1} + \tbinom{k}{1}x^ky + \tbinom{k}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \tbinom{k}{k-2}x^3y^{k-2} + \tbinom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + xy^k + \\ x^ky + \tbinom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \tbinom{k}{2}x^{k-2}y^3 + \cdots + \tbinom{k}{k-2}x^2y^{k-1} + \tbinom{k}{k-1}xy^k + y^{k+1} = \\ x^{k+1} + [\tbinom{k}{1} + 1]x^ky + [\tbinom{k}{2} + \tbinom{k}{1}]x^{k-1}y^2 + \cdots + [\tbinom{k}{r} + \tbinom{k}{r-1}]x^{k-r+1}y^r + \cdots + y^{k+1}.\end{gathered}$$

Untuk melengkapi bukti bahwa

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^ky + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k+1}{k}xy^k + y^{k+1}$$

cukup dibuktikan **Identitas Pascal**

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \binom{k+1}{r}$$

sebagaimana berikut.

$$\begin{aligned}\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1} &= \frac{k!}{r!(k-r)!}+\frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!}\\ &= \frac{k!(k-r+1)+rk!}{r!(k-r+1)!}\\ &= \frac{(k+1)!}{(k-r+1)!}\\ &= \binom{k+1}{r}.\end{aligned}$$

Lengkap sudah bukti. ✓

Contoh 1.3.6 (**Segitiga Pascal**)
Identitas Pascal yang telah dibuktikan mendasari konstruksi dari **Segitiga Pascal** yang sangat dikenal:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & \text{baris ke}-0\\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \text{baris ke}-1\\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \text{baris ke}-2\\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \text{baris ke}-3\\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \text{baris ke}-4\\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \text{baris ke}-5\\
\\
1 & k & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{k}{k-3} & \binom{k}{k-1} & k & 1 & & \text{baris ke}-k
\end{array}$$

Algorithma Pembagian

Kita semua sudah akrab sejak Sekolah Dasar dengan proses pembagian, yaitu diberikan bilangan bulat a selalu dapat direpresentasikan sebagai jumlah dari suatu kelipatan bilangan bulat lain yang diberikan yaitu $b \geq 1$ ditambah suatu sisa yang lebih kecil dari b. Hal ini akan terlihat pada teorema berikut yang dijamin oleh prinsip keterutan secara baik.

Contoh 1.3.7 Berikut ini penyajian hasil dari proses pembagian dari beberapa pasang bilangan bulat.
Untuk 84 dan 60 didapat $84 = 1 \cdot 60 + 24$.
Untuk 924 dan 105 didapat $924 = 8 \cdot 105 + 84$.
Untuk -10 dan 3 didapat $-10 = -4 \cdot 3 + 2$.
Masing-masing kasus bilangan yang pertama merupakan kelipatan dari bilangan yang kedua tambah suatu bilangan bulat yang lebih kecil dari bilangan yang kedua. ●

Teorema 1.3.4 (**Algorithma Pembagian**) Misalkan a adalah sebarang bilangan bulat dan b juga sebarang bilangan bulat tetapi $b \geq 1$. Maka ada dengan tunggal bilangan bulat q dan r yang memenuhi

(1) $a = qb + r$

(2) $0 \leq r < b$.

Bukti Misalkan $P = \{a - kb \,|\, k \in \mathbb{Z}$ dan $a - kb \geq 0\}$. Bila $a \geq 0$, maka $a \in P$ (sebab $a = a - 0 \cdot b$). Bila $a < 0$, maka $a - 2a \cdot b > 0$. Jadi $a - 2a \cdot b \in P$, dengan demikian $P \neq \emptyset$. Gunakan aksiomatik keterurutan secara baik dari bilangan bulat positip didapat: Ada $r \in P$ dengan r adalah elemen terkecil. Karena $r \in P$, maka $r = a - qb$ untuk beberapa $q \in \mathbb{Z}$ atau $a = qb + r$ (memenuhi (1)) dan $r \geq 0$. Tinggal menunjukkan bahwa $r < b$. Andaikan $r \nless b$ yang berarti $r \geq b$, didapat

$$0 \leq r - b = (a - qb) - b = a - \underbrace{(q+1)}_{k} b \in P,$$

tetapi $(r - b) < r$, ini menunjukkan bahwa ada bilangan bulat positip yang lebih kecil dari r berada di P. Hal ini bertentangan bahwa r adalah elemen terkecil di P. Jadi haruslah $r < b$. Dengan demikian (2) dipenuhi, yaitu r memenuhi $0 \leq r < b$. Tinggal menunjukkan bahwa q dan r tunggal. Misalkan q_1 dan r_1 adalah bilangan bulat yang memenuhi $a = q_1 b + r_1$. Didapat

$$a = qb + r = q_1 b + r_1,$$

dimana $0 \leq r < b$ dan $0 \leq r_1 < b$. Maka $r_1 - r = qb - q_1 b = b(q - q_1)$, sebagai akibat

$$|r_1 - r| = |b(q - q_1)| = |b|\,|q - q_1| = b|q - q_1|. \tag{1.1}$$

Tambahkan dua pertidaksamaan $-b < -r \leq 0$ dan $0 \leq r_1 < b$, didapat

$$-b < r_1 - r < b, \quad \text{quad} \quad |r_1 - r| < b.$$

Berdasarkan Persamaan 1.1, maka $b|q - q_1| < b$. Sehingga didapat

$$0 \leq |q - q_1| < 1.$$

Karena $|q - q_1|$ adalah bilangan bulat positip taknegatip dan memenuhi $0 \leq |q - q_1| < 1$, maka haruslah $q - q_1 = 0$ atau $q = q_1$. Dengan demikian didapat $\cancel{q_1 b} + r_1 = \cancel{qb} + r$, yaitu $r_1 = r$. Jadi terbukti bahwa q dan r adalah tunggal.

Bilanga q dalam Teorema 1.3.4 dinamakan **hasil bagi** sedangkan r dinamakan **sisa** pada pembagian a dibagi oleh b.

Kesimpulan 1.3.1 Bila $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $b \neq 0$, maka ada tunggal bilangan bulat q dan r yang memenuhi
$$a = qr + b, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Bukti Mengikuti bukti Teorema 1.3.4, cukup dibuktikan untuk kasus b adalah negatif. Maka $|b| > 0$ atau $|b| \geq 1$. Dengan demikian menurut Teorema 1.3.4 ada dengan tunggal bilangan bulat q_1 dan r yang memenuhi

$$a = q_1|b| + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Karena $|b| = -b$, maka bisa diplih $q = -q_1$, sehingga didapat

$$a = q_1|b| = (-q)(-b) + r = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Definisi 1.3.1 Diberikan dua bilangan bulat a dan b, dengan $a \neq 0$ dikatakan bahwa a adalah **pembagi** dari b ditulis $a \mid b$, bila $b = ac$ untuk beberapa bilangan bulat c. Bila a tidak membagi b, maka ditulis $a \nmid b$. Catatan bahwa dibolehkan bahwa $a \leq 0$ dalam definisi ini.

Beberapa akibat langsung dari Definisi 1.3.1 diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 1.3.5 Diberikan $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Maka

1. $a|0, 1|a, a|a$,
2. $a|\pm 1$ bila dan hanya bila $a = \pm 1$,
3. bila $a|b$, maka $ac|bc$,
4. bila $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$,
5. $a|b$ dan $b|a$ bila dan hanya bila $a = \pm b$,
6. bila $c|a$ dan $c|b$, maka $c|(ax + by)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.

Bukti Sebagai latihan.

Definisi 1.3.2 Diberikan dua bilangan bulat a dan b, suatu bilangan bulat d yang memenuhi kondisi $d \mid a$ dan $d \mid b$ dinamakan suatu **pembagi persekutuan** dari a dan b.

Contoh 1.3.8 Bilangan bulat 252 dan 180 mempunyai pembagi persekutuan positip: $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ dan 36. Tidak ada bilangan bulat positip yang lebih besar dari 36 yang merupakan pembagi persekutuan dari 252 dan 180.

Pada pembahasan berikutnya akan sering tertarik untuk mencari pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat.

Definisi 1.3.3 Diberikan dua bilangan bulat a dan b keduanya taknol, **pembagi persekutuan terbesar** dari a dan b adalah suatu bilangan bulat $d \geq 1$ yang memenuhi

(1) $d\,|\,a$ dan $d\,|\,b$.

(2) Untuk sebarang bilangan bulat c, bila $c\,|\,a$ dan $c\,|\,b$, maka $c\,|\,d$.

Dalam hal ini ditulis $d = \text{fpb}(a, b)$. ✓

Secara ringkas, fpb(a, b) adalah bilangan bulat terbesar di dalam himpunan dari semua pembagi persekutuan terbesar dari a dan b.

Suatu pertanyaan yang wajar adalah apakah bilangan bulat a dan b bisa mempunyai pembagi-pembagi persekutuan terbesar yang berbeda. Untuk menjawab pertanyaan ini, misalkan ada dua bilangan bulat positip d dan d_1 yang merupakan fpb(a, b). Maka berdasarkan Definisi 1.3.3 bagian (2) didapat $d\,|\,d_1$ juga $d_1\,|\,d$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 1.3.5 bagian (5), maka $d = \pm d_1$. Karena d dan d_1 keduanya adalah bilangan bulat positip, maka $d = d_1$. Jadi bila fpb(a, b) ada, maka keberadaannya adalah tunggal.

Algorithma pembagian beserta aplikasi yang lain dari prinsip keterurutan secara baik, menjamin keujudan dari fpb(a, b), sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 1.3.6 Misalkan a dan b adalah bilangan bulat keduanya taknol. Maka

(1) $d = \text{fpb}(a, b)$ ada (exist).

(2) Ada bilangan bulat u dan v yang memenuhi $d = ua + vb$.

Bukti Misalkan $S = \{xa + yb\,|\,x, y \in \mathbb{Z} \text{ dan } xa + yb \geq 1\}$. Karena S sebab $aa + bb \in S$. Dengan menggunakan prinsip keterurutan secara baik S mempunyai elemen terkecil d. Karena $d \in S$ didapat $d = sa + tb$ untuk beberapa $ts, t \in \mathbb{Z}$ dan $d \geq 1$. Bila k adalah suatu pembagi persekutuan dari a dan b, maka $a = uk$ dan $b = vk$ untuk beberapa $u, v \in \mathbb{Z}$. Didapat $d = sa + tb = (su + tv)k$, yaitu k membagi d. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $d = \text{fpb}(a, b)$, hanya diperlukan d pembagi persekutuan dari a dan b. Gunakan algoritma pembagian didapat $a = qd + r$ dengan $0 \leq r = a - qd = a - q(sa + tb) = (1 - qs)a + (-qt)b < d$. Karena d elemen terkecil di S, maka tidak akan $r \geq 1$. Jadi haruslah $r = 0$. dengan demikian $a = qd$ atau d adalah pembagi dari a. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa d juga pembagi dari b. Dengan demikian sudah terbukti bahwa $d = \text{fpb}(a, b)$. ✓

Teorema 1.3.6 bagian (1) menjamin keujudan dari fpb(a, b), sedangkan pada bagian (2) menyatakan bahwa fpb(a, b) dapat diungkapkan sebagai suatu **kombinasi linier** dari a dan b yaitu $ua + vb$. Mungkin pada awal yang terlihat saat ini kurang menarik, namun nanti pada kenyataannya ternyata **sangat berguna**.

Contoh 1.3.9 Apa yang diberikan dalam contoh ini menggambarkan bagaimana menghitung faktor persekutuan terbesar untuk kasus sederhana. Faktor persekutan terbesar dari 84 dan 60 didapat dengan berulang kali menerapkan algoritma pembagian, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 84 &= 1 \cdot 60 + 24 \\ 60 &= 2 \cdot 24 + 12 \\ 24 &= 2 \cdot 12 + 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan ke-3 terlihat bahwa $12 \mid 12$ dan $12 \mid 24$. Sehingga berakibat pada persamaan ke-2 yaitu $12|60$. Dan karena $12|24$ dan $12|60$, maka persamaan ke-1 berakibat $12|84$. Jadi 12 adalah pembagi persekutuan dari 84 dan 60. Bila selain 12, d' juga pembagi persekutuan dari 84 dan 60, maka dari persamaan pertama $d' \mid 60$ dan $d' \mid 24$. Sehingga dari persamaan kedua berakibat $d' \mid 24$ dan $d' \mid 12$. Jadi $12 = \text{fpb}(86, 60)$.

Proposisi 1.3.1 (**Algorithma Euclide**) Untuk sebarang pasangan bilngan bulat a dan $b \geq 1$ dapat dilakukan penghitungan $\text{fpb}(a, b)$ dengan melakukan algoritma pembagian secara berulang sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} a = q_1 b + r_1 & \text{dimana } 0 \leq r_1 < b \\ b = q_2 r_1 + r_2 & \text{dimana } 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = q_3 r_2 + r_3 & \text{dimana } 0 \leq r_3 < r_2, \\ \vdots & \end{array}$$

berhenti ketika diperoleh sisa pembagian sama dengan nol:

$$\begin{array}{ll} r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} & \text{dimana } 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & \text{dimana } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0. & \end{array}$$

Sisa pembagian terakhir taknol $r_n = \text{fpb}(a, b)$. Metoda perhitungan $\text{fpb}(a, b)$ ini dinamakan **Algorithma Euclide**.

Bukti Hasil akhir sisa pembagian adalah nol, dengan menggunakan prinsip keterutan secara baik berakibat bahwa himpunan semua sisa yang positip harus mempunyai suatu elemen terkecil. Karena barisan sisa pembagian positip $r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ adalah barisan turun, maka sisa pembagian positip terkecil adalah sisa pembagian terakhir, yang mana sisa pembagian berikutnya adalah nol. Dalam hal ini r_n adalah sisa pembagian positip yang terakhir, maka

$$\begin{aligned} \text{fpb}(a, b) = \text{fpb}(b, r_1) = \text{fpb}(r_1, r_2) = \cdots = \text{fpb}(r_{i-1}, r_i) = \cdots &= \text{fpb}(r_{n-2}, r_{n-1}) \\ &= \text{fpb}(r_{n-1}, r_n) \\ &= r_n. \end{aligned}$$

Contoh 1.3.10 Hitung fpb(924, 105). Perhitungan dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 924 &= 8 \cdot 105 + 84 \\ 105 &= 1 \cdot 84 + 21 \\ 84 &= 4 \cdot 21 + 0. \end{aligned}$$

Jadi fpb(924, 105) = 21. Dari persamaan kedua didapat 21 = 105 − 84. Dari persamaan yang pertama didapat 84 = 924 − 8 · 105. Gabungkan hasil pertama dengan kedua didapat

$$21 = 105 - (924 - 8 \cdot 105) = \boxed{-1} \cdot 924 + \boxed{9} \cdot 105.$$

Terihat bahwa fpb adalah sebagai suatu kombinasi linier $\boxed{u} \cdot 924 + \boxed{v} \cdot 105$ dimana $u = -1$ dan $v = 9$.

Catatan, bilangan bulat u dan v yang memenuhi fpb$(a, b) = ua + vb$ adalah tidak tunggal. Misalnya, bila $a = 90$ dan $b = 252$, maka

$$\text{fpb}(90, 252) = 18 = (3)90 + (-1)252.$$

dan

$$\text{fpb}(90, 252) = 18 = (3 + 252)90 + (-1 - 90)252 = (255)90 + (-91)252.$$

Teorema Dasar Aritmatika

Konsekuensi lain yang penting dari algoritma pembagian dan prinsip keterutan secara adalah setiap bilangan bulat $n > 1$ dapat ditulis sebagai produk dari bilangan prima, yaitu bilangan bulat yang tidak dapat ditulis sebagai produk dengan cara taktrivial.

Contoh 1.3.11 Misalkan dihitung fpb(385, 48) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 385 &= 8 \cdot 48 + 1 \\ 48 &= 48 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa fpb(385, 48) = 1, dengan kata lain bilangan bulat positip yang terbesar dan hanya satu bilangan ini yaitu 1 yang bisa membagi 385 dan 48.

Definisi 1.3.4 Dua bilangan bulat a dan b dikatakan **prima relatif** bila fpb$(a, b) = 1$ dengan kata lain pembagi persekutuan positip dari a dan b hanya bilangan bulat 1. Suatu bilangan bulat $p > 1$ dinamakan **prima** bila pembagi positipnya adalah 1 dan dirinya sendiri. ✓

Proposisi berikut sebagai akibat dari Teorema 1.3.6 bagian (2).

Proposisi 1.3.2 Misalkan a dan b adalah prima relatif dan c adalah suatu bilangan bulat. Maka

(1) Sebarang pembagi persekutuan dari a dan bc adalah suatu pembagi persekutuan dari a dan c.

(2) Bila a membagi bc, maka a membagi c.

(3) Bila a dan c adalah prima relatif, maka a dan bc prima relatif.

Bukti Misalkan fpb$(a,b) = 1$ dan misalkan $d|a$ dan $d|bc$. Maka, dengan menggunakan Teorema 1.3.6 didapat $1 = sa + tb$ untuk beberapa bilangan bulat s dan t, juga $a = dx$ dan $b = dy$ untuk beberapa bilangan bulat x dan y. Dengan demikian didapat

$$c = c \cdot 1 = c(sa + tb) = acs + bct = dxcs + dyt = d(xcs + yt),$$

terlihat bahwa $d|c$ sebagaimana dibutuhkan untuk membuktikan (1). Misalkan bahwa $a|bc$, maka $bc = ad'$ untuk beberapa bilangan bulat d' dan

$$c = c \cdot 1 = c(sa + tb) = acs + bct = acs + ad't = a(cs + d't),$$

terlihat bahwa $a|c$ sebagaimana diharapkan bukti bagian (2). Dari (1), d adalah pembagi persekutuan dari a dan bc dan juga pembagi persekutuan dari a dan c. Bila a dan b adalah prima relatif, maka fpb$(a,c) = 1 = d$. Hal ini berakibat juga fpb$(a,bc) = 1$. Jadi a dan bc adalah prima relatif. ✓

Sebagai akibat langsung adalah kesimpulan penting berikut.

Kesimpulan 1.3.2 (**Lemma Euclide**) Misalkan b dan c adalah bilangan bulat. Bila p adalah prima dan $p|bc$, maka $p|b$ atau $p|c$.

Bukti Jika $p|b$, maka tidak ada yang perlu dibuktikan. Jika tidak $p|b$, maka fpb$(p,b) = 1$. Hal ini berakibat bahwa $1 = xp + yb$ untuk beberapa bilangan bulat x dan y. Dari $1 = xp + yb$ didapat $c = xpc + ybc$. Jelas bahwa $p|xpc$ dan $p|ybc$ (hipotisis bahwa $p|bc$). Jadi $p|c$. ✓

Contoh 1.3.12 Adalah sangat penting dalam Lemma Euclid bahwa p adalah prima. Misalkan sebagai mana diketahui bahwa 6 membagi $3 \cdot 4 = 12$ tetapi $6 \nmid 3$ dan $6 \nmid 4$. ●

Untuk membuktikan Teorema Fundamental Aritmatika dibutuhkan Lemma Euclide dalam suatu bentuk yang lebih umum, sebagaimana kesimpulan berikut.

Kesimpulan 1.3.3 Misalkan $b_1, b_2, \ldots, b_r$ adalah bilangan bulat. Bila p adalah prima dan $p|b_1, b_2, \ldots, b_r$, maka $p|b_i$ untuk beberapa i, dengan $1 \leq i \leq r$.

Bukti Digunakan induksi matematika pada r. Untuk $r = 1$, jelas dipenuhi. Kasus $r = 2$ adalah Lemma Euclide. Selanjutnya misalkan pernyataan benar untuk $r = k$ dan $p \,|\, (b_1, b_2, \ldots, b_k)b_{k+1}$. Gunakan Kesimpulan 1.3.2 (Lemma Euclide), didapat salah satu dari $p \,|\, b_{k+1}$ hal ini sebagaimana diinginkan atau $p \,|\, b_1, b_2, \ldots, b_k$, dengan menggunakan hipotesis induksi $p|b_i$ untuk beberapa i, dengan $1 \leq i \leq k$. ✓

Teorema 1.3.7 (Fundamental Aritmatika) Misalkan n adalah suatu bilangan bulat dengan $n > 1$. Maka

(1) n adalah salah satu dari prima atau suatu produk dari prima.

(2) Faktorisasi dari n dalam suatu produk dari prima adalah tunggal, kecuali untuk urutan primanya. Yaitu, bila

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ dan } n = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

yang mana p_i dan q_j adalah prima, maka $r = s$ dan, bila perlu dengan melakukan pengurutan kembali didapat $p_i = q_i$ untuk semua i.

Bukti Untuk membuktikan (1) dan (2) digunakan induksi matematika pernyataan benar untuk $n \geq 2$.

(1) Untuk $n = 2$, pernyataan (1) dipenuhi, sebab 2 adalah prima. Untuk membuktikan (1) dipenuhi untuk n, asumsikan bahwa (1) benar untuk sebarang bilangan bulat k dengan $2 \leq k < n$. Bila n adalah prima adalah sebagaimana diinginkan. Bila n bukan prima, pilih bilangan bulat u dan v dengan $1 < u, v < n$ yang memenuhi $uv = n$. Dengan hipotesis induksi masing-masing u dan v salah satu dari prima atau bisa dituliskan sebagai produk dari prima. Didapat, $n = uv$ dapat dituliskan sebagai produk dari prima.

(2) Untuk $n = 2$, pernyataan (2) jelas dipenuhi, sebab 2 adalah prima yang tidak bisa dituliskan sebagai produk prima yang lainnya yang lebih besar dari 2. Jadi untuk membuktikan n memenuhi pernyataan (2) diasumsikan (2) dipenuhi untuk sebarang k dimana $2 \leq k < n$. Misalkan

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s.$$

Terlihat bahwa $p_1 | n$, maka $p_1 | q_1 q_2 \cdots q_s$. Dengan menggunakan Kesimpulan 1.3.3 didapat $p_1 \mid q_i$ untuk beberapa i dengan $1 \leq i \leq s$. Bila diperlukan, dilakukan pengurutan kembali pada q_i sehingga q_j ini menjadi q_1. Dengan demikian didapat $p_1 | q_1$. Karena q_1 prima haruslah $p_1 = q_1$. Selanjutnya misalkan $k = n/p_1 = n/q_1 < n$, didapat

$$k = p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Lakukan lagi proses hipotesis induksi secara berulang. Dengan demikian didapat banyaknya bilangan prima pada masing-masing faktor harus sama, yaitu $r - 1 = s - 1$, akibatnya $r = s$. Jadi $p_i, 2 \leq i \leq r$ dan $q_j, 2 \leq j \leq r$ harus sama kecuali hanya pada urutannya. ✓

Terema Fundamental Aritmatika yang baru saja dibuktikan berakibat bahwa diberikan sebarang bilangan bulat $n > 1$, maka n dapat ditulis sebagai produk

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

dimana p_i adalah bilangan prima berbeda untuk masing-masing i dan, p_i ini dan pangkat-pangkatnya a_i adalah tunggal. Bila bilangan-bilangan bulat dituliskan dalam cara tersebut, maka mudah untuk memperoleh pembagi persekutuan terbesaranya, sebagaimana diberikan oleh contoh berikut.

Contoh 1.3.13 Sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 1.3.10, $\text{fpb}(924, 105) = 21$. Tetapi $924, 105$ dan 21 dapat difaktorkan kedalam bentuk pangkat dari bilangan prima sebagai berikut:

$$924 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \qquad 105 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \qquad 21 = 3^1 \cdot 7^1.$$

Sekedar untuk membandingkan, ditulis lagi

$$924 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \qquad 105 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$
$$21 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0.$$

Terlihat bahwa yang mana saja pangkat pada bilangan prima dalam faktorisasi 21 lebih kecil dari pangkat pada bilangan prima yang sama dalam faktorisasi dari 924 dan 105. Sebaliknya, bila diambil pangkat-pangkat yang lebih besar, maka didapat bilangan

$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 4620.$$

Sebagaiman telah diketahui bahwa 21 adalah pembagi persekutuan terbesar dari 924 dan 105, sebaliknya 4620 adalah kelipatan persekutuan terkecil dari 924 dan 105.

Definisi 1.3.5 Diberikan dua bilangan bulat n dan m keduanya taknol, **kelipatan persekutuan terkecil** dari n dan m adalah bilangan bulat $l \geq 1$ yang memenuhi

(1) $n|l$ dan $m|l$.

(2) Untuk sebarang bilangan bulat k, bila $n|k$ dan $m|k$, maka $l|k$.

Dalam hal ini ditulis $l = \text{kpk}(n, m)$. ✓

Proposisi 1.3.3 Diberikan

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot p_k^{a_k} \text{ dan } m = p_1^{b_1} p_2^{b^2} \cdots p_k^{b^k},$$

dimana p_i bilangan prima berbeda dan $a_i, b_i \geq 0$, maka

(1) $\text{fpb}(n, m) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$, dimana $c_i = \min\{a_i, b_i\}$,

(2) $\text{kpk}(n, m) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$, dimana $d_i = \max\{a_i, b_i\}$,

(3) $\text{kpk}(n, m) \cdot \text{fpb}(n, m) = nm$.

Bukti Sebagai latihan. ✓

Bilangan Bulat modulo n

Untuk mengakhiri bagian ini dibahas kembali topik relasi ekivalen. Yaitu relasi ekivalen yang khusus pada $\mathbb{Z}$ yang mana sifat-sifat $\mathbb{Z}$ ini telah dibahas sebelumnya.

Definisi 1.3.6 Misalkan $n > 0$ adalah sebarang bilangan bulat tetapi tetap. Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b adalah **kongruen mod** n ditulis

$$a \equiv b \mod n$$

bila $n|(a-b)$. ✓

Proposisi 1.3.4

(1) Relasi kongruen $\mod n$ adalah suatu relasi ekivalen pada $\mathbb{Z}$

(2) Relasi ekivalen tersebut mempunyai tepat sebanyak n klas ekivalen yaitu

$$n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbb{Z}.$$

(3) Bila $a \equiv b \mod n$ dan $c \equiv d \mod n$, maka

$$a + c \equiv b + d \mod n \qquad ac \equiv bd \mod n.$$

(4) Bila a dan n prima relatif, maka

$$ab \equiv ac \mod n \text{ berakibat } b \equiv c \mod n.$$

Bukti

(1) Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$ didapat $a \equiv a \mod n$ sebab $n|0 = (a-a)$. Selanjutnya, bila $a \equiv b \mod n$, maka $n|(a-b) = -(b-a)$. Jadi $b \equiv a \mod n$. Berikutnya, bila $a \equiv b \mod n$ dan $b \equiv c \mod n$, maka $n|(a-b)$ dan $n|(b-c)$. Jadi $n|((a-b)+(b-c)) = (a-c)$. Terlihat bahwa $n|(a-c)$ atau $a \equiv c \mod n$.

(2) Untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}$, misalkan $[a]_n$ adalah klas ekivalen dari $a \in \mathbb{Z}$. Dengan menggunakan algoritma pembagian didapat $a = qn + r$ untuk beberapa $q, r \in \mathbb{Z}$ dengan $0 \leq r < n$. Terlihat bahwa $a \equiv r \mod n$. Jadi $[a]_n = [r]_n$. Jadi hanya ada n klas ekivalen yaitu:

$$0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbb{Z}.$$

Semuanya berbeda, sebab untuk r dan s dengan $0 \leq r, s < n$ didapat $n|(r-s)$ bila dan hanya bila $r = s$.

(3) Bila $a \equiv b \mod n$ dan $c \equiv d \mod n$, maka $n|(a-b)$ dan $n|(c-d)$. Didapat

$$n|((a-b)+(c-d)) = (a+c)-(b+d).$$

Terlihat bahwa $a+b \equiv b+d \mod n$. Juga

$$n|(c-b) \Rightarrow n|(ac-bd).$$

Terlihat bahwa $ac \equiv bd \mod n$.

(4) Bila a dan n prima relatif dan $ab \equiv ac \mod n$, maka

$$n|(ab-ac) = a(b-c),$$

berdasarkan Proposisi 1.3.2 bagian (2), maka $n|(b-c)$. Jadi $b \equiv c \mod n$. ✓

Contoh 1.3.14 Diberikan himpunan klas kongruen mod 5, yaitu

$$\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]\}.$$

Proposisi 1.3.4 menjamin bahwa bila $[r_1]_5 = [r_2]_5$ dan $[s_1]_5 = [s_2]_5$, maka $[r_1+s_1] = [r_2+s_2]$. Dengan demikian bahwa dapat didefinisikan operasi tambah oleh $[r]_5 + [s]_5 = [r+s]_5$. Dengan cara yang sama didapat $[r_1s_1]_5 = [r_2s_2]_5$. Dengan demikian dapat didefinisikan operasi perkalian oleh $[r]_5[s]_5 = [rs]_5$. Hasil operasi tambah dan perkalian pada $\mathbb{Z}_5$ diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1: Penjumlahan mod 5

$+$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[1]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$
$[2]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$
$[3]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[4]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$

Tabel 2: Perkalian mod 5

$\times$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$
$[1]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[0]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[0]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[0]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Definisi 1.3.7 Untuk sebarang $n > 0$, misalkan

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, [2]_n, \ldots, [n-1]_n\}$$

adalah himpunan klas kongruen mod n. Sebagaimana pada contoh sebelumnya, Proposisi 1.3.4 menjamin bahwa operasi **penjumlahan** dan **perkalian** mod n

$$[r]_n + [s]_n = [r+s]_n \text{ dan } [r]_n[s]_n = [rs]_n$$

adalah terdefinisi secara baik di $\mathbb{Z}_n$, karena bila $[r_1]_n = [r_2]_n$ dan $[s_1]_n = [s_2]_n$ di $\mathbb{Z}_n$, maka

$$[r_1]_n + [s_1]_n = [r_1+s_1]_n = [r_2+s_2]_n = [r_2]_n + [s_2]_n$$

dan

$$[r_1]_n[s_1]_n = [r_1s_1]_n = [r_2s_2]_n = [r_2]_n[s_2]_n.$$

Himpunan $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi tersebut dinamakan **bilangan bulat mod** n. ✓

Proposisi berikut kumpulan beberapa sifat dasar dari tambah dan perkalian dalam bilangan bulat modulo n.

Proposisi 1.3.5 Untuk setiap $[r]_n, [s]_n$ dan $[t]_n$ di $\mathbb{Z}_n$ didapat

(1) Komutatif

$$[r]_n + [s]_n = [s]_n + [r]_n \qquad [r]_n[s]_n = [s]_n[r]_n.$$

(2) Assosiatif

$$[r]_n + ([s]_n + [t]_n) = ([r]_n + [s]_n) + [t]_n \qquad [r]_n([s]_n[t]_n) = ([r]_n[s]_n)[t]_n.$$

(3) Distributif

$$[r]_n([s]_n + [t]_n) = [r]_n[s]_n + [r]_n[t]_n.$$

(4) Identitas

$$[0]_n + [r]_n = [r]_n = [r]_n + [0]_n \qquad [1]_n[r]_n = [r]_n[1]_n.$$

Bukti

(1) Komutatif

$$[r]_n + [s]_n = [r+s]_n = [s+r]_n = [s]_n + [r]_n,$$
$$[r]_n[s]_n = [rs]_n = [sr]_n = [s]_n[r]_n.$$

(2) Assosiatif

$$\begin{aligned} [r]_n + ([s]_n + [t]_n) &= [r]_n + ([s+t]_n) \\ &= [r + (s+t)]_n = [(r+s)+t]_n \\ &= ([r+s]_n) + [s]_n \\ &= ([r]_n + [s]_n) + [t]_n, \end{aligned}$$

$$[r]_n([s]_n[t]_n) = [r]_n([st]_n) = [r(st)]_n = [(rs)t]_n = ([rs]_n)[t]_n = ([r]_n[s]_n)[t]_n.$$

(3) Distributif

$$\begin{aligned} [r]_n([s]_n + [t]_n) &= [r]_n([s+t]_n) \\ &= [r(s+t)]_n \\ &= [rs+rt]_n \\ &= [rs]_n + [rt]_n \\ &= [r]_n[s]_n + [r]_n[t]_n. \end{aligned}$$

(4) Identitas

$$\begin{aligned} [0]_n + [r]_n &= [0+r]_n \\ &= [r]_n \\ &= [r+0]_n \\ &= [r]_n + [0]_n \end{aligned}$$

$$[1]_n[r]_n = [1 \cdot r]_n = [r]_n = [r \cdot 1]_n = [r]_n[1]_n. \quad ✓$$

Contoh 1.3.15 Diberikan $\mathbb{Z}_{10} = \{[0]_{10}, [1]_{10}, \ldots, [9]_{10}\}$, misalkan himpunan bagian

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(10) &= \{[n]_{10} \in \mathbb{Z}_{10} \,|\, \text{kpk}(n, 10) = 1\} \\ &= \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\} \end{aligned}$$

Tabel hasil perkalian mod 10 untuk $\mathbb{U}_{10}$ diberikan sebagai berikut:

Tabel 3 Perkalian dalam $\mathbb{U}(10)$

$\times$	$[1]_{10}$	$[3]_{10}$	$[7]_{10}$	$[9]_{10}$
$[1]_{10}$	$[1]_{10}$	$[3]_{10}$	$[7]_{10}$	$[9]_{9}$
$[3]_{10}$	$[3]_{10}$	$[9]_{10}$	$[1]_{10}$	$[7]_{10}$
$[7]_{10}$	$[7]_{10}$	$[1]_{10}$	$[9]_{10}$	$[3]_{10}$
$[9]_{10}$	$[9]_{10}$	$[7]_{10}$	$[3]_{10}$	$[1]_{10}$

Hasil penghitungan Tabel 3, memperlihatkan bahwa bila $[r]_{10}, [s]_{10} \in \mathbb{U}(10)$, maka $[r]_{10}[s]_{10} \in \mathbb{U}(10)$. Alasan ini bisa dilihat pada proposisi berikutnya. Juga, didapat bahwa untuk sebarang $[r]_{10} \in \mathbb{U}(10)$ ada suatu $[s]_{10} \in \mathbb{U}(10)$ sedemikian hingga $[r]_{10}[s]_{10} = [1]_{10}$. Alasannya adalah bila $\text{fpb}(r, 10) = 1$, maka menurut Teorema 1.3.6 didapat $rs + 10t = 1$ untuk beberapa bilangan bulat s dan t. Hal ini berarti bahwa $rs \equiv 1 \mod 10$ atau $[rs]_{10} = [r]_{10}[s]_{10} = [1]_{10}$.

Definisi 1.3.8 Diberikan $\mathbb{Z}_n$ dan

$$\mathbb{U}(n) = \{[u]_n \in \mathbb{Z}_n \,|\, \text{fpb}(u, n) = 1\} \subset \mathbb{Z}_n.$$

Elemen-elemen di $\mathbb{U}(n)$ dinamakan **unit mod n**.

Proposisi 1.3.6 Untuk sebarang $[r]_n, [s]_n \in \mathbb{U}(n)$ didapat $[r]_n[s]_n \in \mathbb{U}(n)$.

Bukti Bila $[r]_n, [s]_n \in \mathbb{U}(10)$, maka $\text{fpb}(n, s) = \text{kpk}(n, r) = 1$. Dengan menggunakan Proposisi 1.3.2 bagian (3) didapat $\text{fpb}(n, rs) = 1$. Dengan demikian $[rs]_n \in \mathbb{U}(10)$ atau $[r]_n[s]_n \in \mathbb{U}(10)$.

Proposisi 1.3.7 Untuk sebarang $[r]_n \in \mathbb{U}(n)$ ada suatu $[s]_n \in \mathbb{U}(n)$ yang memenuhi

$$[r]_n[s]_n = [1]_n.$$

Bukti Bila $[r]_n \in \mathbb{U}(n)$, maka $\text{fpb}(n, r) = 1$. Dengan menggunakan Teorema 1.3.6 didapat $rs + nt = 1$ untuk beberapa bilangan bulat s dan t. Tetapi hal ini berakibat bahwa $rs \equiv 1 \mod n$ atau $[rs]_n = [1]_n$. Tetapi sebagaimana telah diketahui $[rs]_n = [r]_n[s]_n$, dengan demikian didapat $[r]_n[s]_n = [1]_n$.

Latihan

Latihan 1.3.1 Dengan menggunakan induksi matematika pada n buktikan pernyataan berikut.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2 \quad$ untuk $\quad n \geq 1.$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \quad$ untuk $\quad n \geq 1.$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 \quad$ untuk $\quad n \geq 1.$
4. Bila $0 \leq x \leq y$, maka $x^n \leq y^n \quad$ untuk $\quad n \geq 0.$
5. $n < 2^n \quad$ untuk $\quad n \geq 0.$

Latihan 1.3.2 **Barisan Fibonacci** : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ didefinisikan oleh

$$F_1 = F_2 + 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ \text{ untuk } \ n \geq 1.$$

1. Tunjukkan bahwa $(F_{n+1})^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$.
2. Tunjukkan bahwa $F_{n+1}F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n$.
3. Tunjukkan bahwa $F_n < 2^n$ untuk $n \geq 1$.

Latihan 1.3.3 Bila $a, r \in \mathbb{R}$ dan $r \neq 1$, tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1$ memenuhi

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a(1 - r^{n+1})/(1 - r).$$

Latihan 1.3.4 Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang bilangan bulat positip dan n_0 adalah sebarang bilangan bulat positip. Asumsikan

(1) $P(n_0)$ adalah benar.

(2) Bila $P(k)$ benar untuk semua k dengan $n_0 \leq k < m$, maka $P(m)$ benar.

Dengan menggunakan prinsip keterurutan secara baik, tunjukkan bahwa $P(n)$ adalah benar untuk semua $n \geq n_0$.

Latihan 1.3.5 Tunjukkan bahwa tiga pernyataan prinsip berikut adalah saling ekivalen satu dengan yang lainnya.

(a) Prinsip keterurutan secara baik.

(b) Prinsip induksi matematika.

(c) Prinsip modifikasi induksi matematika.

Latihan 1.3.6 Tunjukkan bahwa untuk $0 \geq r \leq n$, maka

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Latihan 1.3.7 Misalkan p adalah bilangan prima dan

$$(1+a)^p = 1 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_{p-1} a^{p-1} + a^p,$$

dengan $a \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $p|c_i$ untuk semua i, dengan $1 \leq i \leq p-1$.

Latihan 1.3.8 Dalam Contoh 1.3.7, bila $p = 11$, maka dapatkan $c_1, c_{10}, c_2, c_9, c_4, c_6$.

Latihan 1.3.9 Gunakan Algoritma Euclide untuk menghitung kpk$(52, 135)$ dan tulis hasilnya sebagai kombinasi linier dari 52 dan 135.

Latihan 1.3.10 Misalkan a dan b adalah prima relatif. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi $n = xa + yb$.

Latihan 1.3.11 Tunjukkan bahwa $a = a'd$ dan $b = b'd$, dimana $d = \text{kpk}(a, b)$, maka kpk$(a', b') = 1$.

Latihan 1.3.12 Tunjukkan bahwa kpk$(a, b) = ab$ bila dan hanya bila fpb$(a, b) = 1$.

Latihan 1.3.13 Dapatkan fpb$(9750, 59400)$ dan kpk$(9750, 59400)$.

Latihan 1.3.14 Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat $n^3 \equiv n \mod 6$.

Latihan 1.3.15 Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n bila tidak didapat $n \equiv 0 \mod 5$, maka didapat $n^4 \equiv 1 \mod 5$.

Latihan 1.3.16 Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n, didapat $n^5 \equiv n \mod 5$.

Latihan 1.3.17 Tunjukkan bahwa n adalah bilangan prima bila dan hanya bila dalam $\mathbb{Z}_n$, $[r]_n[s]_n = [0]_n$ selalu berakibat $[r]_0 = [0]_n$ atau $[s]_n = [0]_n$.

Latihan 1.3.18 Tunjukkan bahwa bila fpb$(n, r) = 1$, maka ada suatu bilangan bulat s yang memenuhi fpb$(n, s) = 1$ dan $rs \equiv 1 \mod n$.

Latihan 1.3.19 Bila fpb$(m, n) = 1$, tunjukkan bahwa untuk sebarang pasangan dua bilangan bulat a dan b ada suatu bilangan bulat x yang memenuhi $x \equiv a \mod m$ dan $x \equiv b \mod n$.

Latihan 1.3.20 (**Teorema Sisa Pembagian China**)

(a) Bila $m_1, m_2, \ldots, m_s$ adalah bilangan bulat yang lebih besar 1 sedemikian hingga sebarang dua dari bilangan tersebut adalah prima relatif, dan bila $a_1, a_2, \ldots, a_s$ adalah sebarang bilangan bulat, tunjukkan bahwa ada suatu bilangan bulat x yang memenuhi $x \equiv a_i \mod m_i$ untuk semua i, dengan $1 \leq i \leq s$. (Gunakan Latihan 1.3.19).

(b) Tunjukkan bahwa bila x dan x' keduanya memenuhi kongruen dalam bagian (a), maka $x \equiv x' \mod M$ dimana $M = m_1 m_2 \cdots m_s$.

1.4 Bilangan Kompleks

Pemahaman mengenai bilangan kompleks akan merupakan suatu yang esensial. Sebagaimana akan terlihat pada bahasan berikut. Dibutuhkan bilangan kompleks untuk mendapatkan semua penyelesaian persamaan polinomial. Ketika diberikan persamaan $x^2 - 2 = 0$, atau $x^2 = 2$ penyelesaiannya adalah $\sqrt{2}$ dan $-\sqrt{2}$. Ini benar, sebab $(\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2}) = 2$. Selanjutnya diberikan persamaan $x^2 + 1 = 0$ atau $x^2 = -1$ dengan cara yang sama penyeaiannya adalah $\sqrt{-1}$ dan $-\sqrt{-1}$. Sebab $(\sqrt{-1})2 = -1$ dan $(-\sqrt{-1})^2 = -1$. Bila $\sqrt{-1}$ dianggap suatu bilangan, dan ditulis $i = \sqrt{-1}$. Didapat $i^2 = -1$ dan $-i^2 = -1$. Dengan demikian dapat dikombinasikan i dengan bilangan yang lain misalnya $2i, i/3, -1 + i$ dan $(1 + \sqrt{2}i)/2$. Berikut ini diberikan pernyataan dari apa yang baru saja dibahas.

Definisi 1.4.1 Himpunan dari **bilangan kompleks** dinotasikan oleh $\mathbb{C}$, didifinikan sebagai

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i^2 = -1\}.$$

Bila $z = a + bi$ adalah bilangan kompleks, maka a dinamakan **bagian riil** dari z dan b dinamakan **bagian imajiner** dari z.

Setiap bilangan riil a adalah bilangan kompleks dengan bagian imajinernya adalah nol, jadi $a = a + 0 \cdot i$. Dengan demikian didapat

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Contoh 1.4.1 Bagian riil dari $4i$ adalah 0 sedangkan bagian imajinernya adalah 4. Bagian riil dari $(1 + \sqrt{2}i)/2$ adalah $1/2$ sedangkan bagian imajinernya adalah $\sqrt{2}/2$.

Contoh 1.4.2 Memperlakukan $a+bi$ sebagai bilangan, sehingga dapat dilakukan operasi penjumlahan dan perkalian. Asumsikan dengan hukum-hukum yang biasa berlaku pada operasi tersebut dan ingat $i^2 = -1$, maka didapat

$$\begin{aligned}(4 + 2i) - (1 - 3i) &= (4 - 1) + (2 - (-3))i = 3 + 5i \\ (4 + 2i)(1 - 3i) &= 4 - 12i + 2i - 6i^2 = 10 - 10i.\end{aligned}$$

definisi berikut adalah pernytaan yang lebih tepat.

Definisi 1.4.2 Diberikan dua bilangan kompleks $z = a + bi$ dan $w = c + di$, diddefinisikan tambah dan perkalian dari z dan w oleh

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C} \\ zw &= (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Tentunya disini, operasi pada a, b, c dan d adalah operasi sebagaimana biasa dilakukan pada bilangan riil. ✓

Bila digunakan operasi yang telah didefinisikan tersebut pada bilangan riil, maka bilangan kompleks dengan bagian imajiner nol, $z = a + 0 \cdot i$ dan $w = c + 0 \cdot i$ didapat $z + w = a + c$ dan $zw = ac$. Tambah dan perkalian bilangan kompleks adalah sama seperti tambah dan perkalian pada bilangan riil. Dengan kata lain, operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan kompleks adalah perluasan dari operasi yang berkaitan pada bilangan riil. Pengurangan dapat dilakukan dalam cara yang sama:

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{C}.$$

Catatan bahwa, $z - w = 0 = 0 + 0 \cdot i$ bila dan hanya bila $a - c = 0$ dan $b - d = 0$ atau bila dan hanya bila $a = c$ dan $b = d$ yang berarti bahwa $z = w$. Selanjutnya dilakukan pembagian pada $\mathbb{C}$ sebagaimana sesuai yang dilakukan pada pembagian di $\mathbb{R}$. Ingat bahwa untuk sebarang pasangan bilangan riil $a, b \neq 0$ pembagian a/b dapat dilihat sebagai perkalian dari $a \cdot 1/b$. Dengan begitu dibutuhkan dulu $1/w$ dengan w adalah bilangan kompleks taknol.

Contoh 1.4.3 Apakah $w = 1/(1+2i)$ adalah suatu bilangan kmpleks? Untuk menghitung sebagai suatu bilangan kompleks harus dapat dituliskan dalam bentuk $a + bi$. Hal ini dapat dilakukan sebagai berikut:

$$w = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{(1+2i)} \cdot \frac{1-2i}{(1-2i)} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i,$$

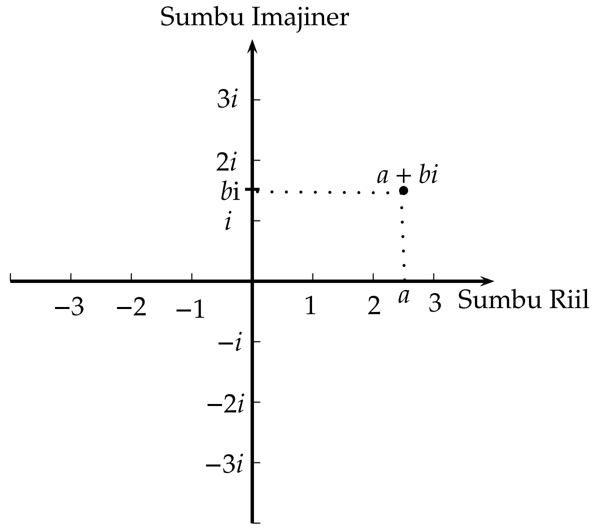
karena $1/5$ dan $-2/5$ adalah bilangan riil, maka w adalah bilangan kompleks. ●

Contoh yang baru dibahas, mengisyaratkan bagaimana kasus pembagian yang lain dilakukan.

Contoh 1.4.4 Misalkan dihitung $w = (3 - 2i)/(5 + 3i)$.

$$w = \frac{3-2i}{5+3i} = \frac{3-2i}{(5+3i)} \cdot \frac{5-3i}{(5-3i)} = \frac{9-19i}{34} = \frac{9}{34} - \frac{9}{34}i. \quad ●$$

Dalam dua contoh terakhir, telah dihitung $(1+2i)(1-2i) = 1^2+2^2$ dan $(5+3i)(5-3i) = 5^2+3^2$. Ungkapan $a^2 + b^2$ mempunyai arti geometris sebagai mana diberikan pada bahasan berikut.



Gambar 1.7: Bidang kompleks $\mathbb{C}$

Definisi 1.4.3 Seperti halnya bilangan riil dapat disajikan sebagai suatu titik pada suatu garis, jadi suatu bilangan kompleks dapat disajikan sebagai titik pada suatu bidang yang dinamakan **bidang kompleks**. Bilangan kompleks $z = a + bi$ disajikan sebagai titik dengan koordinat (a, b) sebgai mana diberikan dalam Gambar 1.7. Dalam hal ini sumbu-x dinamakan **sumbu riil** dan sumbu-y dinamakan **sumbu imajiner**. ✓

Suatu hal yang berkaitan dengan representasi geometri dari definisi yang telah dibahas adalah: pada bilangan riil, misalkan -2, maka nilai mutlaknya adalah $|-2| = 2$. Ini mempunyai arti bahwa jarak titik -2 dari pusat 0 pada garis riil adalah 2. Diperluas pengertian ini pada nilai mutlak $|a + bi|$ adalah jarak dari titik (a, b) dari titik pusat $(0, 0)$ dalam bidang kompleks.

Definisi 1.4.4 Untuk sebarang bilangan kompleks $z = a + bi$, nilai mutlak dari z didifinisikan oleh

$$|z| = |a + bi| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Perlu diperhatikan bahwa, nilai mutlak ini adalah bilangan riil taknegatif. ✓

Gunakan definisi ini pada suatu bilangan riil $a = a + 0 \cdot i$ didapat $\sqrt{a^2}$ yang sama dengan nilai mutlak sebagaimana biasanya, yaitu sama dengan a bila $a \geq 0$ dan $-a$ bila $a < 0$.

Contoh 1.4.5 Dari definisi, $|i| = |(1+i)/\sqrt{2}| = |(-1+\sqrt{3}i)/2| = 1$. Titik $(0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ dan $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ semuanya terletak pada lingkaran satuan di bidang kompleks.

Definisi 1.4.5 Untuk sebarang bilangan kompleks $z = a + bi$ didefinisikan **kompleks konjuget** atau singkatnya **konjuget** dari z oleh

$$\bar{z} = \overline{a + bi} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi.$$ ✓

Gunakan definisi ini pada bilangan riil $a = a + 0 \cdot i$ didapat $a - 0 \cdot i = a$. Jadi sebarang bilangan riil mempunyai konjuget dirinya sendiri.

Proposisi 1.4.1

(1) Bila $z = a + bi$ sebarang bilangan kompleks, maka

$$z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2.$$

(2) Bila $w = c + di$ sebarang bilangan kompleks, maka

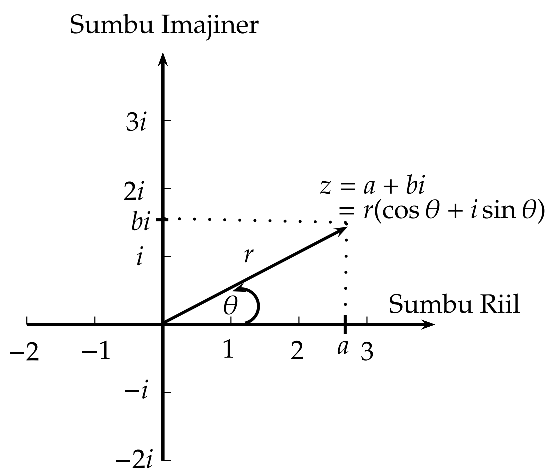
$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}.$$

Bukti

(1) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$

(2) $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \dfrac{(c - di)}{(c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - sd}{c^2 + d^2} i.$

Berikutnya digunakan koordinat kutub (polar) dari titik dalam bidang untuk menyajikan bilangan kompleks untuk memfasilitasi penghitungan dalam menyelesaikan persamaan polinomial. Gambar garis dari tititik asal $(0, 0)$ ke titik (a, b) yang merepresen-



Gambar 1.8: Koordinat Polar dari $\mathbb{C}$

tasikan bilangan kompleks $z = a + bi$ sebagaimana diberikan dalam Gambar 1.8.

Bila r adalah panjang segmen garis tersebut, maka didapat $r^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ dan $r = |z|$. Misalkan bahwa θ adalah sudut dari sumbu riil positip ke garis, maka didapat

$$a = r\cos\theta \quad \text{dan} \quad b = r\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta + i\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Definisi 1.4.6 Misalkan z adalah suatu bilangan kompleks. maka representasi $z = a + bi$ dinamakan **representasi Cartesian** dari z, sedangkan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dinamakan **representasi kutub** dari z. ✓

Catatan, r adalah selalu bilangan riil taknegatif. Jadi, representasi dari -2 adalah $2(\cos\pi + i\sin\pi)$

Contoh 1.4.6 Representasi kutub dari beberapa bilangan kompleks sebagaimana berikut:

$$\begin{array}{ll} i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) & -i = 1(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = 1(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) & 1 + i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}). \end{array}$$

Penulisan bilangan kompleks dalam bentuk kutub memberikan kemudahan dalam berbagai penghitungan, sebagaimana terlihat pada beberapa proposisi berikut.

Proposisi 1.4.2 Diberikan dua bilangan kompleks dalam representasi kutub $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Bukti

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_1)). \end{aligned}$$ ✓

Kesimpulan 1.4.1 Diberikan suatu bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Bukti Gunakan Proposisi 1.4.2 didapat

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)) \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta). \end{aligned}$$ ✓

Kesimpulan 1.4.2 (**Formula De Moivre**) Diberikan sebarang bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka untuk bilangan positip n didapat

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Bukti Digunakan induksi matematika, untuk $n = 1$ jelas. Selanjutnya, misalkan benar untuk k dengan $1 < k < n$, maka

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\, r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{k+1}(\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{(gunakan Proposisi 1.4.2)} \\ &= r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta). \end{aligned}$$

Terlihat bahwa untuk $n = k + 1$ benar bahwa

$$z^{k+1} = r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta),$$

dengan demikian untuk bilangan bulat $n > 0$ benar bahwa

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Contoh 1.4.7 Diberikan $z = 1 - \sqrt{3}i$, untuk menghitung z^8, lakukan hal berikut:

1. Jadikan z kedalam bentuk kutub. Didapat $r^2 = |z|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ atau $r = 2$. Jadi z dapat ditulis sebagai $z = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ dan dicari sudut θ dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ yang memenuhi $\cos\theta = \frac{1}{2}$ dan $\sin\theta = -\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}$, didapat $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ dan $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

2. Gunakan formula De Moivre, didapat

$$\begin{aligned} z^8 &= 2^8\left(\cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3}\right) \\ &= 256\left(\cos(12\pi + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(12\pi + \frac{4\pi}{3})\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 256\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -126 - 128\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Contoh 1.4.8 Hitung $\sqrt{i}$. Misalkan $z = \sqrt{i}$ didapat $z^2 = i$. Ubah z kedalam bentuk kutub $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, didapat

$$\begin{aligned} r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = z^2 &= i \\ &= 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Jadi $r^2 = 1$ atau $r = 1$ dan $2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, atau $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$ untuk beberapa bilangan bulat k. Tetapi diinginkan $0 \leq \theta \leq 2\pi$, dengan demikian $k = 0, 1$. Sehingga didapat $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ dan $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$. Jadi nilai dari $z^2 = i$ yang memenuhi adalah

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

dan

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Contoh 1.4.9 Dapatkan penyelesaian dari $z^3 + 8i = 0$. Dalam hal ini dicari bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ yang memenuhi

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Didapat $r^3 = 8$ atau $r = 2$ dan $3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ atau $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k$, dengan $k = 0, 1, 2$. Dengan demikian nilai-nilai θ adalah $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Jadi nilai z yang memenuhi adalah

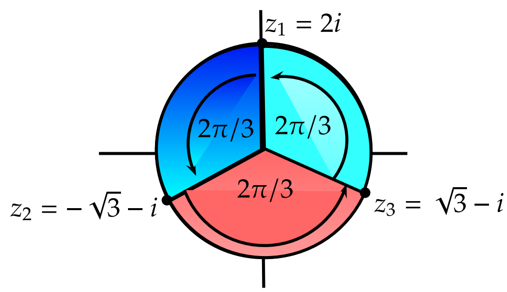
$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2(0 + i) = 2i,$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 2(0 + i) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} - i$$

dan

$$z_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 2(0 + i) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i$$

Gambar 1.9 menyatakan bahwa tiga penyelesaian dari $z^3 + 8i = 0$ terletak pada lingkaran



Gambar 1.9: Penyelesaian dari $z^3 + 8i = 0$

jari-jari 2 dengan pusat $(0, 0)$.

Latihan

Latihan 1.4.1 Pada latihan berikut ungkapkan bilangan kompleks dalam bentuk $a + bi$, dimana $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $(2 + 3i) + (7 - 5i)$	2. $3i - (4 - 2i)$	3. $(4 - i) - (2 - 3i)$
4. i^7	4. i^{12}	6. i^{17}
7. i^{32}	8. i^{38}	9. $(-i)^5$
10. $(3 + 2i)(2 + 5i)$	11. $(5 - 2i)(3 + 4i)$	12. $(1 + i)^9$
13. $(1 + i)/i$	14. $(2 + i)/(1 - i)$	15.$i/(1 + 3i)$

Latihan 1.4.2 Hitung $|2 - 3i|, |1 + i|, |\sqrt{2} - \sqrt{3}i|$.

Latihan 1.4.3 Ungkapkan bilangan kompleks berikut dalam bentuk kutub $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

1. $1 - i$ 2. $-1 - i$ 3. $-1 + \sqrt{3}i$.

Latihan 1.4.4 Dapatkan semua penyelesaian dari persamaan berikut.

1. $z^3 = 1$ 2. $z^4 = 1$ 3. $z^4 = -1$
4. $z^3 = -8$ 5. $z^3 = -i$ 6. $z^3 = -125i$.

Latihan 1.4.5 Dengan menggunakan ekspasi deret dari $e^x, \cos x$ dan $\sin x$ tunjukkan **formula Euler** $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Latihan 1.4.6 Dengan menggunakan formula Euler pada latihan sebelumnya, tunjukkan formula De Moivre.

1.5 Matriks

Untuk mengakhiri bab pendahuluan ini ditinjau ulang bahasan matriks. Beberapa macam pengertian matriks memberikan suatu hal yang penting sebagaimana diperlukan pada bahasan bab berikutnya.

Contoh 1.5.1 Suatu matriks berukuran 2×2 adalah susunan persegi dari empat bilangan bulat, misalnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Suatu matriks berukuran 2×3 adalah susunan persegi panjang dengan dua baris dan tiga kolom dari enam bilangan bulat, misalnya.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dua matriks yang mempunyai bentuk sama dapat dilakukan operasi penjumlahan. Operasi penjumlahan dilakukan pada elemen-elemen yang seletak. Jadi

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+2 \\ 3+0 & 4+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$C + D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1+1 & 0+(-1) \\ 0+(-1) & 3+0 & 7+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Dua matriks yang tidak mempunyai bentuk yang sama tidak dapat ditambahkan satu dengan yang lainnya.

Definisi 1.5.1 Suatu matriks A berukuran $n \times m$ adalah susunan dari elemen-elemen dalam n baris dan m kolom. Ditulis $A = \{a_{i,j}\}$, dimana $a_{i,j}$ adalah elemen dalam baris ke-i kolom ke-j dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$.

Definisi 1.5.2 Notasi $M_{n\times m}(R)$ adalah himpunan semua matriks ukuran $n \times m$ dengan elemen-elemen di R. Bila $n = m$, Notasi $M_{n\times n}(R)$ ditulis sebagai $M(n, R)$. Himpunan R bisa $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ atau sebarang Z_p dengan p bilanga prima.

Definisi 1.5.3 Misalkan $A = \{a_{i,j}\} \in M_{n\times m}(R)$ dan $B = \{b_{i,j}\} \in M_{n\times m}(R)$. **Jumlah** dari A dan B adalah $A + B = \{a_{i,j} + b_{i,j}\}$ dengan kata lain adalah matriks $\{c_{i,j}\} \in M_{n\times m}(R)$, dimana $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ untuk semua i dan j, dimana $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq\leq m$. **Produk** dari suatu elemen $t \in R$ dengan suatu matriks $A = \{a_{i,j}\}$ didefinisikan oleh matriks $tA = \{ta_{i,j}\}$.

Perkalian dari dua matriks didifiniskan sebagai berikut.

Definisi 1.5.4 Misalkan $A = \{a_{i,j}\} \in M_{n\times m}(R)$ dan $B = \{b_{j,k}\} \in M_{m\times r}(R)$. **Perkalian** dari A dan B adalah matriks berukuran $n \times r$ yang diberikan oleh matriks $AB = \{c_{i,k}\} \in M_{n\times r}(R)$ dimana

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \cdots + a_{i,m}b_{m,k},$$

untuk semua i dan k dengan $1 \leq n$ dan $1 \leq k \leq r$.

Contoh 1.5.2 Diberikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Elemen baris ke-1 kolom ke-2 dan baris ke-2 kolom ke-1 matriks perkalian AB diberikan sebagai berikut

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \boxed{33} \\ \boxed{43} & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \,.\, 1) + (2 \,.\, 7) + (3 \,.\, 6) = 33$$
$$(5 \,.\, 2) + (3 \,.\, 3) + (4 \,.\, 6) = 43$$

Dengan melakukan hal yang serupa didapat

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 33 \\ 39 & 50 \end{bmatrix}$$

dan perkalian matriks BA diberikan oleh

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 38 & 27 & 37 \\ 35 & 28 & 39 \end{bmatrix}$$

terlihat bahwa $AB \neq BA$.

Contoh 1.5.3 Dalam $M(n, R)$ dimana R bisa sebarang dari $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ atau $\mathbb{Z}_p$, didapat suatu **matriks identitas** I_n dengan elemen diagonal $a_{i,i} = 1$ untuk semua i dimana $1 \leq i \leq n$ dan semua elemen yang lainnya sama dengan nol yaitu $a_{i,j} = 0$ bila $i \neq j$. Misalnya, matriks identitas

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mudah diselidiki bahwa diberikan sebarang matriks 3×3 yaitu $A = \{a_{i,j}\}$, maka $AI_3 = A = I_3A$.

Contoh 1.5.4 Diberikan dua matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Didapat

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Terlihat bahwa $AB = I_2 = BA$.

Definisi 1.5.5 Suatu matriks $A \in M(n, R)$ **mempunyai invers** bila ada suatu matriks $A^{-1} \in M(n, R)$ yang memenuhi $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Matriks A^{-1} dinamakan **invers** dari A. ✓

Untuk menentukan matriks invers, perlu diberikan suatu pengertian dari apa yang dinamkan determinan dari suatu matriks. Pembahasan masalah ini hanya dibatasi untuk matriks yang berukuran 2×2.

Definisi 1.5.6 Diberikan matriks suatu matriks $A \in M(2, R)$ oleh

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

determinan dari matriks A didefinisikan sebagai $\det(A) = ad - bc \in R$. ✓

Contoh berikut menjelaskan sifat penting hubungan determinan dari dua matriks.

Contoh 1.5.5 Diberikan dua matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Maka $\det(A) = (3)(2) - (1)(4) = 2$ dan $\det(B) = (4)(2) - (5)(1) = 3$. Selanjutnya dihitung

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

Didapat $\det(AB) = (13)(24) - (17)(18) = 312 - 306 = 6$. Terlihat bahwa $\det(AB) = 6 = (2)(3) = \det(A)\det(B)$.

Apa yang baru saja dibahas dalam contoh secara lebih general diberikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 1.5.1 Untuk sebarang matriks $A, B \in M(2, R)$ didapat $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bukti Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}.$$

Didapat

$$\det(A)\det(B) = (ad - bc)(a'd' - b'c') = (ada'd' + bcb'c') - (bca'd' + adb'c').$$

Selanjutnya dihitung perkalian

$$AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}.$$

Didapat

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(a'c + dc') \\ &= (aa'dd' + bc'cb') + (\cancel{aa'cb'} + \cancel{bc'dd'}) - (\cancel{ab'a'c} + \cancel{bd'dc'}) - (ab'dc' + bd'a'c) \\ &= (ada'd' + bcb'c') - (bca'd' + adb'c') \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

definisi determinan dan bukti sifat perkalian determinan dapat diperluas untuk matriks berukuran $n \times n$ yang mana dapat dijumpai pada buku aljabar linier. Selanjutnya kembali pada matriks berukuran 2×2 apa syaratnya suatu matriks ukuran 2×2 mempunyai invers? Pertanyaan ini dijawab oleh proposisi berikut.

Proposisi 1.5.2 Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mempunyai invers bila dan hanya bila $\det(A) \neq 0$, dan bila $\det(A) \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bukti Bila $\det(A) = 0$, maka dengan proposisi sebelumnya $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0$, sedangkan $\det(I_2) = 1$. Jadi $AB \neq I_2$ untuk sebarang matriks B. Dengan demikian A tidak mempunyai invers. Bila $\det(A) \neq 0$, maka didapat

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Terlihat A mempunyai invers sebagaimana diberikan oleh A^{-1}. ✓

Latihan

Latihan 1.5.1 Hitung hasil operasi matriks berikut.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ di $M_{3\times 2}(\mathbb{Z})$
2. $\begin{bmatrix} i & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ i & 1 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
3. $\begin{bmatrix} 1-i & 3+i \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3i & 1-i \\ i & 2i \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
4. $\begin{bmatrix} i & 2i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ i & 1 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
5. $i\begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 1+i & i \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
6. $2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{Z}_5)$
7. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{Z}_5)$
8. $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
9. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^5$ di $M(2, \mathbb{C})$
10. $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}^4$ di $M(2, \mathbb{C})$. ✓

Latihan 1.5.2 Hitung determinan matriks berikut.

1. $\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 2i & -i \end{bmatrix}$ di $\mathbb{C}$
2. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{Z}_7$
3. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{Z}_7$
4. $\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{Z}_{11}$. ✓

Latihan 1.5.3 Tentukan matriks berikut punya invers atau tidak.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{Q})$
2. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 3\cos\theta \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
3. $\begin{bmatrix} i & i \\ i & -i \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{C})$
4. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ di $M(2, \mathbb{Z}_5)$. ✓

Latihan 1.5.4 Tunjukkan bahwa bila $A, B \in M(2, \mathbb{C})$ mempunyai invers, maka AB juga punya invers.

Latihan 1.5.5 Dapatkan semua matriks yang punya invers di $M(2, \mathbb{Z}_2)$.

Latihan 1.5.6 Dapatkan semua matriks A di $M(2, \mathbb{Z}_3)$ dimana $\det(A) = 1$.

Bagian I

Teori Grup

Bab 2

Grup

Sekarang siap untuk memulai kajian tentang aljabar abstrak. Kata "aljabar" berasal dari judul buku "Hisab al-jabr w'al-muqabala" ditulis oleh Abu Ja'far Muhammad bin Musa Al-Khawarizmi (790-840). Kata al-jabr sendiri berasal dari akar berbentuk unit dan mengacu pada salah satu metode penyelesaian persamaan kuadrat yang dijelaskan dalam buku tersebut. Buku ini dapat dianggap sebagai risalah pertama pada aljabar.

Pembahasan dalam bab ini dimulai dengan konsep grup. Beberapa sumber memberikan kontribusi terhadap munculnya konsep grup abstrak. Pertama, memahami sifat mendalam yang berbeda dari bilangan bulat adalah salah satu yang paling mengasyikan bagi matematikawan kuno. Selanjutnya, mencari solusi untuk persamaan polinomial selama berabad-abad adalah sumber penting lain dari masalah matematika. Akhirnya, kajian tentang transformasi objek geometris memunculkan ide-ide baru dalam pengembangan matematika di zaman modern. Ketiga disiplin matematika ***teori bilangan, teori persamaan aljabar***, dan ***teori transformasi geometris*** semuanya berkontribusi untuk pengembangan matematika dimasa kini, yaitu disebut konsep grup abstrak, atau sederhananya disebut grup.

Kata grup pertama kali diperkenalkan sebagai suatu istilah teknis dalam matematika untuk menyajikan suatu grup permutasi oleh matematikawan Prancis terkenal Galois yang mempunyai nama lengkap Évariste Galois. Galois berumur tidak panjang. Dia lahir di Bourg-la-Reine pada tanggal 25 Oktober 1811 dan meninggal 31 Mei 1832 kerena suatu perkelahian. Walaupun berumur tidak panjang, hasil kerjanya menempatkan pondasi yang mendasar yaitu teori Galois adalah suatu cabang utama dari aljabar abstrak dan subfield dari keterkaitan Galois.

Dalam bab ini akan terlihat bagaimana gagasan grup muncul dalam beberapa situasi yang benar-benar berbeda dan kemudian bagaimana mempelajarinya untuk bekerja dengan grup abstrak. Dalam bab pertama ini konstruksi grup dijadikan sebagai contoh dasar yang digunakan di seluruh bab-bab berikutnya.

2.1 Contoh-contoh dan Konsep Dasar

Pada awal bahasan ini diberikan beberapa contoh yang membantu untuk memahami konsep baru yang dikenalkan pada bab ini.

Contoh 2.1.1 Dapatkan semua akar dari persamaan $f(x) = x^3 - 1$ di $\mathbb{C}$. Perlu diperhatikan bahwa $f(x)$ dapat difaktorkan menjadi

$$f(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Bila digunakan formula untuk persamaan kuadrat didapat $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ dan $\omega^2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$ adalah dua akar kompleks dari $x^2 + x + 1$. Jadi akar-akar dari $f(x)$ adalah $\{1, \omega, \omega^2\}$. Catatan bahwa, karena $f(\omega) = 0$, didapat $\omega^3 = 1$ dan $\omega^4 = \omega$. Bila digunakan perkalian bilangan kompleks sebagaimana biasanya, maka didapat tabel perkalian yang diberikan oleh Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Perkalian dalam $\{1, \omega, \omega^2\}$

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

Contoh 2.1.2 Dapatkan semua akar dari $f(x) = x^4 - 1$ di $\mathbb{C}$. Catatan bahwa, $f(x)$ bisa difaktorkan sebagai

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

Jadi empat akar dari $f(x)$ adalah $\{1, -1, i, -i\}$. Bila digunakan perkalian bilangan kompleks sebagaimana biasa, didapat tabel perkalian yang disajikan oleh Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Perkalian dalam $\{1, i, -1, -i\}$

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Contoh 2.1.3 Untuk $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$, bila operasi penjumlahan diberlakukan di $\mathbb{Z}_3$, didapat Tabel 2.3.

Tabel 2.3: Penjumlahan dalam Z_3

$+$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

●

Contoh 2.1.4 Untuk $Z_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ bila dalam Z_4 diberlakukan operasi penjumlahan sebagaimana biasa didapat Tabel 2.4.

Tabel 2.4: Penjumlahan dalam $\mathbb{Z}_4$

$+$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[0]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[1]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$
$[2]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$
$[3]_4$	$[3]_4$	$[0]_4$	$[1]_4$	$[2]_4$

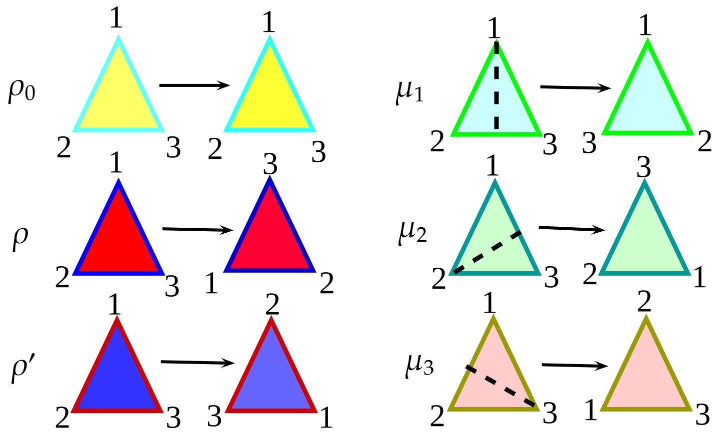
●

Bila dari contoh-contoh yang telah dibahas dan diperhatikan bahwa Tabel 2.1 dan Tabel 2.3 mempunyai kesamaan pola atau struktur, kecuali bahwa nama-nama elemennya yang berbeda. Hal yang sama juga terjadi pada Tabel 2.2 dan Tabel 2.4. Contoh-contoh yang dibahas ini adalah struktur dari apa yang dinamakan grup. Sebelum diberikan definisi secara formal dari konsep grup, diberikan beberapa contoh lagi yang berbeda.

Contoh 2.1.5 Diberikan segitiga sama sisi. Dibahas semua simetri dari segitiga sama sisi atau gerakan dari segitiga yang mempertahankan bentuk. Ada ada enam macam: identitas ρ_0 adalah menyatakan segitiga tetap pada posisi semula; ρ menyatakan rotasi $120°$ terhadap pusat segitiga berlawanan arah jarum jam; ρ' rotasi $240°$ terhadap pusat segitiga berlawanan arah jarum jam. Tiga pencerminan terhadap garis tengah: μ_1, μ_2 dan μ_3

Hal ini akan lebih memudahkan bila titik sudut segitiga dilabeli sebagaimana diberikan oleh Gambar 2.1. Misalkan S_3 adalah himpunan dari enam simetri yaitu

$$S_3 = \{\rho_0, \rho, \rho', \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$$



Gambar 2.1: Semua Simetri dari Δ

Elemen-elemen S_3 adalah fungsi pada $\{1, 2, 3\}$, misalnya $\rho(1) = 2, \rho(2) = 3, \rho(3) = 1$ dan $\mu_1(1) = 1, \mu_1(2) = 3, \mu_1(3) = 2$.

Selanjutnya bila di S_3 diberlakukan operasi komposisi fungsi, misalnya ρ' adalah hasil melakukan 2 kali ρ yaitu $\rho' = \rho\rho = \rho^2$. Makna $\mu_1\mu_2$ adalah komposisi fungsi yaitu $\mu_1(\mu_2(x)),\ \forall x \in \{1, 2, 3\}$. Jadi

$$\mu_1(\mu_2(1)) = \mu_1(3) = 2, \mu_1(\mu_2(2)) = \mu_1(2) = 3, \mu_1(\mu_2(3)) = \mu_1(1) = 1,$$

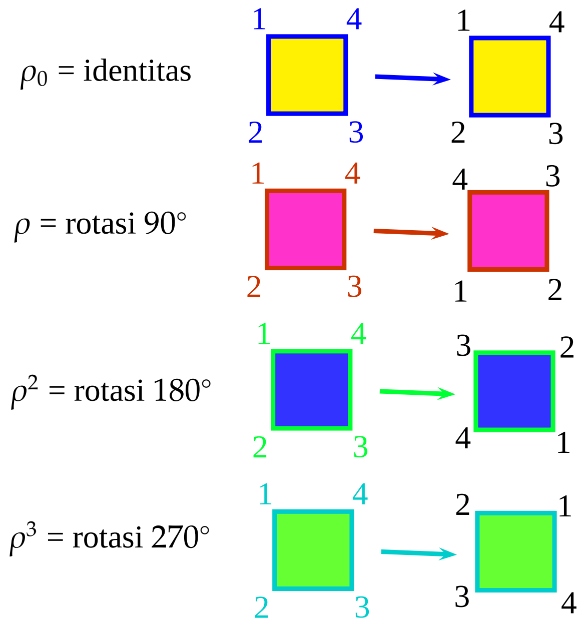
Terlihat bahwa $\mu_1\mu_2 = \rho$. Selain itu juga didapat

$$\mu_2(\mu_1(1)) = \mu_2(1) = 3, \mu_2(\mu_1(2)) = \mu_2(3) = 1, \mu_2(\mu_1(3)) = \mu_2(2) = 2,$$

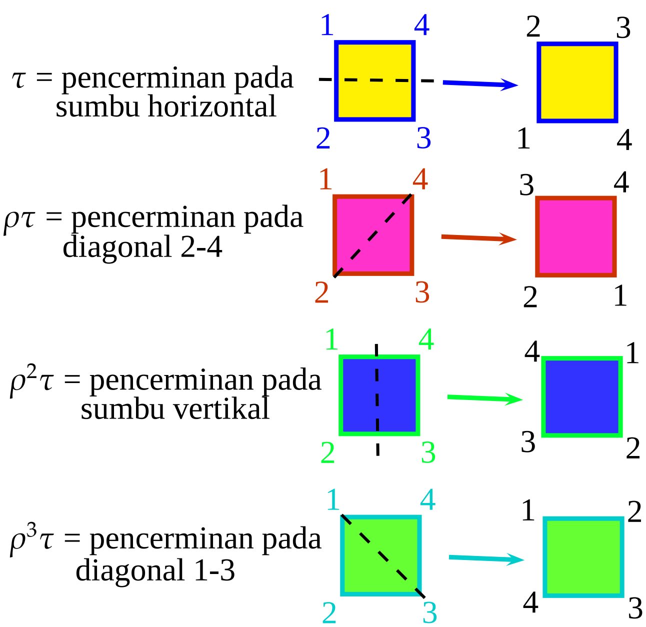
Terlihat bahwa $\mu_2\mu_1 = \rho'$ dan $\mu_1\mu_2 \neq \mu_2\mu_1$. ●

Contoh 2.1.6 Diberikan masalah yang serupa sebelumnya simetri dari persegi. Ada sebanyak 4(2) = 8 simetri. Empat adalah rotasi yang diberikan oleh Gambar 2.2.
Empat rotasi dari persegi yang diberikan oleh Gambar 2.2 adalah rotasi persegi masing-masing dirotasi $0°, 90°, 180°$ dan $270°$ terhadap pusat benda berlawanan arah dengan jarum jam. Perlu diperhatikan bahwa ρ adalah rotasi benda pada pusat berlawanan dengan arah jarum jam sebesar $90°$ dan ρ adalah fungsi pada $\{1, 2, 3, 4\}$ dengan $\rho(1) = 2, \rho(2) = 3, \rho(3) = 4$ dan $\rho(4) = 1$. Dengan demikian rotasi sebesar dua kali $90°$ yaitu $180°$ adalah komposisi ρ^2. Dengan demikian didapat $\rho^2(1) = \rho(\rho(1)) = \rho(2) = 3, \rho^2(2) = \rho(\rho(2)) = \rho(3) = 4, \rho^2(3) = \rho(\rho(3)) = \rho(4) = 1$ dan $\rho^2(4) = \rho(\rho(4)) = \rho(1) = 2$. Semetri yang lain dari persegi adalah empat pencerminan yang diberikan oleh Gambar 2.3.
Sama halnya pada rotasi, pencerminan juga fungsi pada $\{1, 2, 3, 4\}$. Jadi pencerminan pada sumbu horizontal τ diberikan oleh $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$ dan $\tau(3) = 4, \tau(4) = 3$. Sedangkan pencerminan pada diagonal 2-4 dalam hal ini diberikan oleh komposisi fungsi $\rho\tau$, dengan demikian didapat $\rho\tau(1) = \rho(\tau(1)) = \rho(2) = 3, \rho\tau(2) = \rho(\tau(2)) = \rho(1) = 2, \rho\tau(3) = \rho(\tau(3)) = \rho(4) = 1$ dan $\rho\tau(4) = \rho(\tau(4)) = \rho(3) = 4$. Himpunan fungsi-fungsi pada persegi yang dibahas tersebut dinotasikan oleh D_4. Jadi

$$D_4 = \{\rho_0, \rho, \rho_2, \rho^3, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau\}. \qquad ●$$



Gambar 2.2: Simetri Rotasi □



Gambar 2.3: Pencerminan dari □

Semua contoh-contoh yang telah dibahas adalah berkaitan dengan suatu himpunan dan operasi pada himpunan tersebut dengan sifat-sifat yang tertentu sebagaimana didefinisikan berikut.

Definisi 2.1.1 Suatu himpunan tak-kosong G bersama dengan suatu operasi $*$ pada G dinamakan **grup** terhadap operasi $*$ bila memenuhi **aksiomatik grup**:

(1) Teretutup Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.

(2) Assosiatif Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(3) Identitas Ada suatu elemen $e \in G$ sedemikian hingga untuk semua $a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$. Elemen e dinamakan elemen **identitas** di G.

(4) Invers Untuk setiap $a \in G$ ada elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan **invers** dari elemen a. ✓

Catatan bahwa, operasi $*$ pada G yang memenuhi (1), juga dinyatakan sebagai fungsi yang diberikan oleh

$$* : G \times G \to G, \text{ dengan } * (a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a * b, \ \forall (a, b) \in G \times G.$$

Penghapusan kurung, dikarenakan operasi biner $*$ adalah assosiatif, maka penulisan

$$(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d = (a * (b * c)) * d$$

ditulis $a * b * c * d$. Misalkan $n > 3$ dan $g, h \in G$ dengan

$$g = (g_1 \cdots g_i)(g_{i+1} \cdots g_n), \quad h = (g_1 \cdots g_j)(g_{j+1} \cdots g_n)$$

Tanpa mengurangi generalitas, misalkan $i \leq j$ untuk $i = j$ jelas $g = h$. Jadi, misalkan $i < j$, maka kurung dapat disusun sebagai berikut

$$\begin{aligned} g &= (g_1 \cdots g_i)((g_{i+1} \cdots g_j)(g_{j+1} \cdots g_n)) \\ h &= ((g_1 \cdots g_i)(g_{i+1} \cdots g_j))(g_{j+1} \cdots g_n) \end{aligned}$$

Misalkan $A = (g_1 \cdots g_i), B = (g_{i+1} \cdots g_j)$ dan $C = (g_{j+1} \cdots g_n)$, didapat

$$g = A(BC) = (AB)C = h.$$

Kondisi aksiomatik grup dipenuhi oleh semua Contoh 2.1.1 sampai Contoh 2.1.6.

Definisi 2.1.2 Suatu grup G dengan operasi $*$ dinamakan grup **Abelian** atau **komutatif** bila untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$. ✓

Himpunan tak-kosong H dan suatu operasi $*$ pada H ditulis sebagai $\langle H, * \rangle$. Contoh 2.1.1 sampai Contoh 2.1.4 adalah contoh grup Abelian sedangkan Contoh 2.1.5 dan Contoh 2.1.6 bukan grup Abelian.

Contoh 2.1.7 Diberikan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup Abelian, dengan elemen identitas $0 \in \mathbb{Z}$ dan untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ elemen $-a$ adalah invers a.

Contoh 2.1.8 Diberikan $\langle 2\mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup Abelian, sebab sebarang dua bilangan bulat genap bila ditambahkan hasilnya juga genap. Lebih general $\langle n\mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup Abelian untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Contoh 2.1.9 Tiga contoh berikut ini $\langle \mathbb{Q},+\rangle$, $\langle \mathbb{R},+\rangle$ dan $\langle \mathbb{C},+\rangle$ adalah grup komutatif. ●

Contoh 2.1.10 Himpunan bilangan rasional dengan operasi perkalian $\langle Q,\cdot\rangle$ bukan grup. Walaupun sebagian aksiomatik grup dipenuhi, termasuk semua elemen taknol $a \in Q$ punya iners $1/a$. Elemen 0 tidak punya invers terhadap perkalian. ●

Contoh 2.1.10 menunjukan bahwa $\langle \mathbb{Q},.\rangle$ bukan grup tetapi pada Contoh 2.1.9, $\langle \mathbb{Q},+\rangle$ adalah grup. Hal ini mengisyaratkan bahwa suatu grup ditentukan oleh operasi binernya.

Contoh 2.1.11 Misalkan himpunan $Q^* = Q - \{0\}$, maka $\langle Q^*,\cdot\rangle$ adalah grup komutatif. Dengan cara yang sama himpunan $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, maka $\langle R^*,\cdot\rangle$ adalah grup komutatif.Himpunan $\mathbb{Z}$, walaupun tampa elemen nol terhadap operasi perkalian bukan grup. Untuk setiap bilangan bulat $a \neq \pm 1$ tidak mempunyai invers di $\mathbb{Z}$. ●

Contoh 2.1.12 Himpunan $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$ dengan operasi penjumlahan adalah grup komutatif. Setiap $a \in \mathbb{Z}_n$ mempunyai invers $n - a$. ●

Contoh 2.1.13 Diberikan himpunan $\mathbb{U}(n) = \{a \in \mathbb{Z}_n \,|\, \mathrm{fpb}(a,n) = 1\}$ dengan operasi perkalian adalah grup komutatif. Lihat Teorema 1.3.6, Proposisi 1.3.6 dan Proposisi 1.3.7. ●

Contoh 2.1.14 Pada contoh himpunan semua akar dari polinomial $x^4 - 1$ terhadap perkalian adalah membentuk grup. Faktanya hal ini berlaku untuk himpunan semua akar dari $x^n - 1$, yaitu $\{1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}\}$ dimana $\omega = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. ●

Contoh 2.1.15 Himpunan $z \in \mathbb{C}$ merupakan lingkaran dengan jari-jari satu diberikan oleh

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \{\cos\theta + i\sin\theta \,|\, \theta \in \mathbb{R}\},$$

adalah grup terhadap operasi perkalian bilangan kompleks sebab: Untuk setiap $z_1, z_2 \in S^1$, maka $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ dan $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$, didapat

$$z_1z_2 = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \in S^1.$$

Terlihat bahwa S^1 tertutup terhadap operasi perkalian. Sifat assosiatif sebagai berikut: Untuk $z_j = \cos\theta_j + i\sin\theta_j \in S^1$ dengan $j = 1,2,3$ didapat

$$\begin{aligned}
(z_1z_2)z_3 &= ((\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2))(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\\
&= (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\\
&= \cos((\theta_1+\theta_2)+\theta_3) + i\sin((\theta_1+\theta_2)+\theta_3)\\
&= \cos(\theta_1+(\theta_2+\theta_3)) + i\sin(\theta_1+(\theta_2+\theta_3))\\
&= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos(\theta_2+\theta_3) + i\sin(\theta_2+\theta_3))\\
&= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)((\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3))\\
&= z_1(z_2z_3).
\end{aligned}$$

Terlihat dalam S^1 berlaku sifat assosiatif. Sifat elemen netral: $e = 1 = 1 + i\,0 = \cos 0 + i \sin 0 \in S^1$ dan untuk sebarang $z = \cos\theta + i\sin\theta \in S^1$ didapat

$$ez = 1(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos 0 + i\sin 0)(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = z$$

dan

$$z\,e = (\cos\theta + i\sin\theta)\,1 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 0 + i\sin 0) = \cos\theta + i\sin\theta = z.$$

Terlihat bahwa e memenuhi kondisi elemen netral dari S^1. Sifat invers, diberikan sebarang $z = \cos\theta + i\sin\theta \in S^1$ dapat dipilih $z^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \in S^1$ yang memenuhi

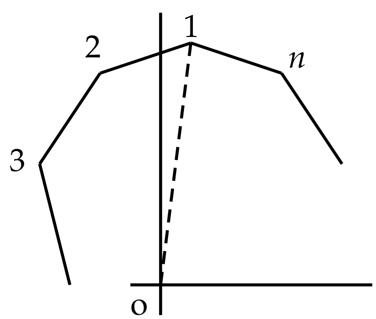
$$z\,z^{-1} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e$$

dan

$$z^{-1}\,z = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = e.$$

Terlihat bahwa setiap elemen $z = (\cos\theta + i\sin\theta) \in S^1$ mempunyai invers yang diberikan oleh $z^{-1} = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \in S^1$.

Contoh 2.1.16 Pada Contoh 2.1.6 dibahas grup D_4 yaitu grup simetri dari persegi. Dengan cara yang sama dapat dikonstruksi grup simetri untuk segi-n beraturan yang dinamakan **grup dihedral** D_n. Misalkan untuk $n \geq 3$, segi-n beraturan pada bidang-x, y



Gambar 2.4: Segi-n beraturan

dengan pusat di O sebagaimana diberikan oleh Gambar 2.4. Maka bisa diperoleh $2n$ elemen dari D_n sebagai berikut: Misalkan ρ adalah rotasi pada pusat O berlawanan arah jarum jam sebesar $2\pi/n$ radian dan τ adalah pencerminan terhadap sumbu yang melalui pusat O dan titik sudut 1. Maka

$$D_n = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \ldots, \rho^{n-1}\tau\},$$

dimana ρ_0 adalah identitas dan $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$.

Pada tiga contoh berikut ini dibahas himpunan matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di R, dalam hal ini R dapat berupa $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ atau $\mathbb{Z}_n$.

Contoh 2.1.17 Misalkan $M(2, R)$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di R. Maka $M(2, R)$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan matriks. ●

Contoh 2.1.18 Sebagaimana telah dibahas pada Proposisi 1.5.2 suatu matriks A mempunyai invers bila dan hanya bila $\det(A) \neq 0$. Perlu diperhatikan bahwa, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Jadi bila A dan B punya invers, maka AB juga punya invers. Misalkan, $GL(2, R)$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan determinan taknol. Maka $GL(2, R)$ adalah suatu grup terhadap perkalian matriks. matriks identitas dan invers diberikan oleh

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & c \end{bmatrix}.$$

Secara umum perkalian matriks tidak komutatif. Jadi $GL(2, R)$ bukan grup komutatif dan dinamakan **grup linier umum**. ●

Contoh 2.1.19 Grup Linier Spesial, $SL(2, R)$ adalah himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di R dan $\det(A) = \pm 1$. Grup ini bukan grup komutatif. ●

Dua contoh berikut berkaitan dengan grup berhingga.

Contoh 2.1.20 Grup Empat Klein V yang dapat direpresentasikan oleh empat matriks di $SL(2, R)$, yaitu

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bila digunakan tabel hasil perkalian matriks di grup V, maka akan diperoleh suatu pola yang tidak sama pada Contoh 2.1.2 dan 2.1.4. ●

Contoh 2.1.21 Grup Quaternion Q_8 dapat direpresentasikan oelh delapan matriks di $SL(2, \mathbb{C})$, $Q_8 = \{\pm I, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$, dimana

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ dan $\mathbf{jk} = -\mathbf{k}$, maka Q_8 bukan grup komutatif. ✓

Terdapat tidak banyak sifat-sifat dasar grup yang sudah dapat dilihat dari beberapa contoh yang telah dibahas. Misalnya dalam beberapa kasus terlihat bahwa elemen identitas tunggal dan setiap elemen selalu mempunyai elemen invers tunggal. Hal ini bisa dilihat dalam tabel grup pada Contoh 2.1.1 sampai 2.1.4. Untuk pembahasan berikutnya bila dibahas grup abstrak G penulisan $a * b$ ditulis ab dan $\langle G, * \rangle$ cukup ditulis grup G.

Proposisi 2.1.1 Untuk sebarang grup G

(1) Elemen identitas dari G tunggal.

(2) Untuk setiap $a \in G$ invers a^{-1} adalah tunggal.

(3) Untuk sebarang $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(4) Untuk sebarang $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(5) Untuk sebarang $a, b \in G$ persamaan $ax = b$ dan $ya = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

(6) Untuk sebarang $a, bc \in G$ berlaku bila $ac = bc$, maka $a = b$ dan bila $ca = cb$, maka $a = b$. Atau dengan kata lain berlaku hukum kanselasi kanan dan kiri.

Bukti

(1) Misalkan e dan e' adalah elemen identitas di G. Didapat $ee' = e'$ (sebab e elemen identitas di G). Juga $ee' = e$ (sebab e' elemen identitas di G). Terlihat bahwa $e' = e$.

(2) Bila a' dan a'' adalah invers dari $a \in G$, maka

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''.$$

(3) Dari $aa^{-1} = e$ dan $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = e$, terlihat bahwa inversnya a^{-1} adalah a dan juga $(a^{-1})^{-1}$. Berdasarkan (2) elemen invers adalah tunggal, jadi $a = (a^{-1})^{-1}$.

(4) Dari $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$ dengan cara yang sama didapat $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$. Terlihat bahawa inversnya (ab) adalah $b^{-1}a^{-1}$, tetapi juga inversnya (ab) adalah $(ab)^{-1}$. Kerena invers adalah tunggal, maka $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$.

(5) Untuk $a, b \in G$, persamaan $ax = b$ berakibat $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$. Karena $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = ex = x$, didapat $x = a^{-1}b$. Juga, karena a^{-1} adalah tunggal, maka x tunggal. Dengan cara yang sama $ya = b$ berakibat $y = ba^{-1}$ dan y tunggal sebab a^{-1} tunggal.

(6) Dari $ac = bc$ berakibat bahwa $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$. Gunankan hukum assosiatif didapat $a = c$. Juga dengan cara yang sama $ca = cb$ berakibat $a = c$.

Untuk bilangan bulat positip n, penulisan $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{sebanyak } n}$ ditulis a^n dan $\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{\text{sebanyak } n}$ ditulis a^{-n}, sedangkan $a^0 \stackrel{\text{def}}{=} e$. Bila operasi pada grup adalah penjumlahan a^n ditulis na untuk $n \in \mathbb{Z}$.

Contoh 2.1.22 Dalam grup $\mathbb{U} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ terhadap perkalian mod 9, didapat

$$2 \cdot 5 = 1,\ 4 \cdot 7 = 1 \text{ dan } 8 \cdot 8 = 1.$$

Terlihat bahwa $5 = 2^{-1}, 7 = 4^{-1}$ dan $8 = 8^{-1}$. Juga, $8^{-1} = (2 \cdot 4)^{-1} = 4^{-1} \cdot 2^{-1} = 7 \cdot 5 = 8$. ●

Contoh 2.1.23 Dalam grupsimetri dari segitiga, S_3 Contoh 2.1.5, didapat $\rho\mu_1 = \mu_3, \mu_1^{-1} = \mu_1, \rho_{-1} = \rho^2, \mu_3^{-1} = \mu_3$ dan $(\rho\mu_1)^{-1} = \mu_3^{-1} = \mu_3 = \mu_1\rho^2 = \mu_1^{-1}\rho^{-1}$.

Contoh berikut membahas bagaimana mengkonstruksi grup abstrak dengan menggunakan suatu tabel grup.

Contoh 2.1.24 Diberikan grup abstrak G dengan tiga elemen. Ada berapa banyak tabel grup yang mungkin terjadi? Misalkan grup $G = \{e, a, b\}$ dengan $e \neq a \neq b$ dan e adalah elemen identitas dari G. Karena G adalah grup, maka berlaku aksiomatik tertutup, jadi $ab, ba, aa, bb \in G$. Bila $ab = a$, maka $b = e$. Jadi $ab \neq a$. Bila $ab = b$ maka $a = e$. Juga didapat $ab \neq b$. Jadi haruslah $ab = e$, dengan cara yang sama didapat $ba = e$. Selanjutnya, bila $aa = e$, maka $aa = ab$. Dengan hukum kanselasi didapat $a = b$ (tidak mungkin). Jadi $aa \neq e$. Bila $aa = a$, maka $a = e$ (tidak mungkin). Jadi haruslah $aa = b$. dengan cara yang sama didapat $bb = a$. Dengan demikian tabel grup yang mungkin diberikan oleh Tabel 2.5.

Tabel 2.5: Grup abstrak G, dengan $|G| = 3$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tabel grup dari sebarang grup dengan elemen sebanyak tiga harus mempunyai bentuk Tabel 2.5 walaupun elemen-elemenya berbeda. Hal ini bisa dibandingkan dengan tabel dalam Contoh 2.1.1 dan 2.1.3.

Definisi 2.1.3 Banyaknya elemen dari grup G dinamakan **order** G dan dinotasikan oleh $|G|$. Grup G **berhingga** bila $|G|$ berhingga. ✓

Jadi $\mathbb{Z}$ dan $n\mathbb{Z}$ adalah grup dengan order tak-berhingga, sedangkan $|\mathbb{U}(12)| = 4, |S_3| = 6, |D_4| = 8, |V| = 4, |Q_8| = 8$ dan $|\mathbb{Z}_n| = n$ adalah grup dengan order berhingga.

Contoh 2.1.25 **Fungsi-ϕ Euler** $\phi(n)$ untuk bilangan bulat $n \geq 2$ didefinisikan sebagai banyaknya semua bilangan positip s dengan $1 \leq s \leq n$ dan fpb$(s, n) = 1$. Jadi, untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 2$ didapat $|\mathbb{U}(n)| = \phi(n)$ dan utuk bilangan prima p didapat $|\mathbb{U}(p)| = p - 1 = \phi(p)$.

Latihan

Latihan 2.1.1 Tunjukan himpunan G dengan operasi yang diberikan memenuhi aksiomatik dari definisi grup.

1. $G = 2\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan.
2. $G = \mathbb{Z}_5$ dengan operasi penjumlahan mod 5.
3. $G = \mathbb{U}(10)$ dengan operasi perkalian mod 10.
4. $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ dengan operasi perkalian bilangan kompleks.
5. $G = GL(2, \mathbb{Q})$ dengan operasi perkalian matriks. ✓

Latihan 2.1.2 Buat tabel grup untuk grup yang diberikan berikut dan tentukan komutatif atau tidak.

1. $G = S_3$ (lihat Contoh 2.1.5).
2. $G = D_4$ (lihat Contoh 2.1.6).
3. $G = V$ (lihat Contoh 2.1.20).
4. $G = Q_8$ (lihat Contoh 2.1.21). ✓

Latihan 2.1.3 Tunjukkan bahwa $GL(2, Q)$ tidak komutatif. ✓

Latihan 2.1.4 Tunjukkan bahwa bila G adalah grup komutatif, maka untuk semua $a, b \in G$ dan untuk semua bilangan bulat n, $(ab)^n = a^n b^n$. ✓

Latihan 2.1.5 Dalam S_3 dapatkan elemen-elemen a, b sedemikian hingga $(ab)^2 \neq a^2b^2$. ✓

Latihan 2.1.6 Dalam S_3 dapatkan semua elemen a sedemikian hingga $a^2 = \rho_0 =$ identitas dan semua elemen b sedemikian hingga $b^3 = \rho_0$. ✓

Latihan 2.1.7 Dapatkan invers masing-masing elemen dari $\mathbb{U}(10)$ dan $\mathbb{U}(15)$. ✓

Latihan 2.1.8 Misalkan G adalah grup perkalian dari akar-akar polinomial $x^n - 1$. Bila $a \in G$, maka tentukan a^{-1} (lihat Contoh 2.1.14). ✓

Latihan 2.1.9 Dalam D_4 dapatkan invers dari ρ, τ dan $\rho\tau$ (lihat Contoh 2.1.6). ✓

Latihan 2.1.10 Dalam grup Klein-4, tunjukkan bahwa setiap elemen mempunyai invers dirinya sendiri. ✓

Latihan 2.1.11 Tunjukkan bahwa bila setiap elemen dari suatu grup G mempunyai invers dirinya sendiri, maka G adalah komutatif. ✓

Latihan 2.1.12 Meniru Contoh 2.1.24, konstruksi semua tabel grup yang mungkin untuk suatu grup G dengan order4. ✓

Latihan 2.1.13 Konstruksi semua tabel grup yang mungkin untuk suatu grup G berorder 5. (Petunjuk: pertama tunjukkan bahwa untuk sebarang $a \in G$, $a \neq e$, didapat $a^k \neq e$ untuk semua bilangan bulat $1 \leq k < 5$).

Latihan 2.1.14 Berapakah order dari grup $GL(2, \mathbb{Z}_2)$?

Latihan 2.1.15 Tunjukkan bahwa bila G adalah grup berhingga berorder genap, maka G mempunyai suatu elemen $a \neq e$ yang memenuhi $a^2 = e$.

Latihan 2.1.16 Dalam dihedral grup D_n $n \geq 3$, tunjukkan bahwa $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$ (lihat Contoh 2.1.16).

Latihan 2.1.17 Tunjukkan bahwa, suatu grup berhingga adalah komutatif bila dan hanya bila mempunyai grup tabel adalah suatu **matriks simetri**, yaitu matriks $\{a_{i,j}\}$ dimana $a_{i,j} = a_{j,i}$ untuk semua i dan j.

Latihan 2.1.18 Misalkan G adalah suatu grup, $a \in G$ dan m, n bilangan bulat prima relatif. Tunjukkan bahwa bila $a^m = e$, maka ada suatu elemen $b \in G$ yang memenuhi $a = b^n$.

Latihan 2.1.19 Misalkan G adalah grup berhingga komutatif sedemikian hingga untuk semua $a \in G$, $a \neq e$ didapat $a^2 = e$. Bila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah semua elemen dari G yang berbeda, maka hitung $a_1 a_2 \cdots a_n$.

Latihan 2.1.20 Tunjukkan bahwa semua elemen taknol di $\mathbb{Z}_p$ dengan p bilangan prima membentuk suatu grup terhadap perkalian mod p.

Latihan 2.1.21 (**Teorema Wilson**) Buktikan bahwa bila p prima, maka $(p-1)! \equiv -1$ mod p.

2.2 Subgrup

Dalam beberapa contoh yang dibahas pada bagian sebelumnya, himpunan elemen-elemen dari grup adalah suatu himpunan bagian dari suatu grup yang lain dengan operasi yang sama.

Contoh 2.2.1 Himpunan bilangan genap $2\mathbb{Z}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$, dan keduanya adalah grup terhadap operasi penjumlahan.

Contoh 2.2.2 Himpunan akar-akar polinomial $x^4 - 1$, yaitu $\{\pm 1, \pm i\}$ adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan kompleks taknol $\mathbb{C}^*$, keduanya adalah grup terhadap perkalian bilangan kompleks.

Contoh 2.2.3 Diberikan grup

$$\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$$

dan himpunan bagian

$$H = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\} \subset \mathbb{Z}_8.$$

Maka H juga grup dengan operasi penjumlahan mod 8. Tabel grup sebagaimana diberikan oleh Tabel 2.6.

Tabel 2.6: Grup H

$+$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$
$[0]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$
$[2]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$
$[4]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$
$[6]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$

Himpunan bagian dari suatu grup G yang merupakan grup terhadap oprasi yang sama seperti di G memainkan suatu peranan penting untuk identifikasi grup-grup yang berbeda.

Definisi 2.2.1 Suatu himpunan bagian tak-kosong H dari suatu grup G adalah suatu **subgrup** dari G bila H terhadap operasi yang sama di G adalah grup. Dalam hal ini ditulis $H \leq G$, bila $H \subseteq G$ dan ditulis $H < G$, bila $H \subset G$. ✓

Contoh 2.2.4 $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan.

Contoh 2.2.5 $\mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$ terhadap operasi perkalian.

Contoh 2.2.6 Untuk sebarang grup G dengan elemen identitas e, $\{e\}$ adalah subgrup dari G dinamakan **trivial subgrup** dan G sendiri adalah subgrup dari G dinamakan **subgrup tak-sejati**. Sebarang subgrup selain $\{e\}$ dan G sendiri dinamakan **subgrup sejati tak-trivial**.

Contoh 2.2.7 Himpunan $\{\pm 1\} < \{\pm 1, \pm i\}$ terhadap operasi perkalian.

Contoh 2.2.8 Himpunan $\{\rho_0, \rho, \rho^2\} < S$ terhadap operasi komposisi fungsi.

Untuk membuktikan bahwa suatu himpunan bagian H dari suatu grup G membentuk suatu grup, dibuktikan bahwa empat aksiomatik grup dipenuhi. Hal ini akan merumitkan dalam berbagai kasus, oleh karena itu untuk memudahkannya dibuktikan teorema berikut.

Teorema 2.2.1 (Test Subgrup) Suatu himpunan bagian tak-kosong H dari suatu grup G adalah subgrup dari G bila dan hanya bila kondisi berikut dipenuhi:

$$ab^{-1} \in H, \text{ untuk setiap } a, b \in H. \tag{2.1}$$

atau

$$a^{-1}b \in H, \text{ untuk setiap } a, b \in H. \tag{2.2}$$

Bukti ($\Rightarrow$) Asumsikan H adalah suatu subgrup dari G dan ambil sebarang $a, b \in H$. Karena H subgrup setiap elemen di H mempunyai invers, jadi $b^{-1} \in H$. Lagi, karena H subgrup, maka H tertutup terhadap operasi yang berlaku, jadi $ab^{-1} \in H$. ($\Leftarrow$) Misalkan kondisi (2.1) dipenuhi. Didapat, karena H tak-kosong, maka ada $a, b = a \in H$ dan gunakan kondisi (2.1) didapat $e = aa^{-1} = ab^{-1} \in H$ Jadi H memuat elemen identitas. Selanjutnya untuk setiap $b \in H$ dan karena $a = e \in H$, gunakan lagi kondisi (2.1) didapat $b^{-1} = eb^{-1} = ab^{-1} \in H$. Terlihat bahwa setiap elemen di H punya invers. Berikutnya, untuk setiap $a, b \in H$ dan karena $b^{-1} \in H$, maka untuk $a, b^{-1} \in H$ gunakan kondisi (2.1) didapat $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. Jadi H memenuhi kondisi tertutup. Operasi pada H adalah assosiatif, sebab sifat ini diwarisi dari sifat grup G. Sejalan dengan yang telah dilakukan, ($\Rightarrow$) asumsikan H adalah suatu subgrup dari G dan ambil sebarang $a, b \in H$. Karena H subgrup setiap elemen di H mempunyai invers, jadi $a^{-1} \in H$. Lagi, karena H subgrup, maka H tertutup terhadap operasi yang berlaku, jadi $a^{-1}b \in H$. ($\Leftarrow$) Misalkan kondisi (2.2) dipenuhi. Didapat, karena H tak-kosong, maka ada $b = a, b \in H$ dan gunakan kondisi (2.2) didapat $e = b^{-1}b = a^{-1}b \in H$. Jadi H memmuat elemen identitas. Selanjutnya untuk setiap $a \in H$ dan karena $b = e \in H$, gunakan lagi kondisi (2.2) didapat $a^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}b \in H$. Terlihat bahwa setiap elemen di H punya invers. Berikutnya, untuk setiap $a, b \in H$ dan karena $a^{-1} \in H$, maka untuk $a^{-1}, b \in H$ gunakan kondisi (2.2) didapat $ab = (a^{-1})^{-1}b \in H$. Jadi H memenuhi kondisi tertutup. Juga, operasi pada H adalah assosiatif, sebab sifat ini diwarisi dari sifat grup G. ✓

Catatan bahwa, bila operasi pada grup adalah penjumlahan, maka kondisi (2.1) ditulis sebagai

$$a - b \in H, \text{ untuk setiap } a, b \in H.$$

Contoh 2.2.9 Untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 0$, $n\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan. Sebab, bila $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a = nr$ untuk beberapa bilangan bulat r dan $b = ns$ untuk beberapa bilangan bulat s. Didapat, $a - b = nr - ns = n\underbrace{(r - s)}_{\in\mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$.

Contoh 2.2.10 Himpunan bilangan bulat ganjil H bukan suatu subgrup dari grup $\mathbb{Z}$ terhadap perkalian. Sebab, $1, 5 \in H$, tetapi $-4 = 1 - 5 \notin H$.

Alternatif lain untuk test subgrup teorema berikut dapat digunakan.

Teorema 2.2.2 Suatu himpunan bagian tak-kosong H dari suatu grup G adalah subgrup bila dan hanya bila pernyataan berikut dipenuhi:

(1) (Tertutup) $ab \in H$, untuk setiap $a, b \in H$.

(2) (Invers) Untuk setiap $b \in H$, $b^{-1} \in H$.

Bukti ($\Rightarrow$) Bila H subgrup, maka kondisi tertutup dan invers dipenuhi sebab semua aksiomatik grup dipenuhi oleh H. ($\Leftarrow$) Asumsikan kondisi tertutup dan invers dipenuhi di H. Misalkan $a, b \in H$, didapat $b^{-1} \in H$. Jadi $ab^{-1} \in H$ (menggunakan kondisi tertutup). Selanjutnya digunakan Teorema TeoriSubgrup, didapat bahwa H adalah subgrup dari grup G. ✓

Contoh 2.2.11 Himpunan $SL(2, \mathbb{Q})$ adalah subgrup dari grup $GL(2, \mathbb{Q})$. Bila $A \in SL(2, \mathbb{Q})$, maka $\det(A) = 1$, jadi $\det(A^{-1}) = \pm 1/\det(A) = 1/\pm 1 = \pm 1$. Jadi $A^{-1} \in Sl(2, \mathbb{Q})$. Selanjutnya bila $A, B \in SL(2, \mathbb{Q})$, maka $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \pm 1 \cdot \pm 1 = \pm 1$, jadi $AB \in SL(2, \mathbb{Q})$. Dengan menggunakan Teorema 2.2.2 didapat $SL(2, \mathbb{Q})$ adalah subgrup dari $GL(2, \mathbb{Q})$. ●

Teorema 2.2.3 Misalkan G adalah suatu grup dan $H \subset G$ dengan H berhingga. Maka H adalah subgrup dari G bila dan hanya bila memenuhi (Tertutup) $ab \in H$ untuk sebarang $a, b \in H$.

Bukti Menggunakan Teorema 2.2.2 hanya butuh menunjukkan sifat tertutup berakibat kondisi invers dipenuhi. Jadi asumsikan kondisi tertutup dipenuhi dan misalkan sebarang $a \in H$. Bila $a = e$, maka $a^{-1} = e^{-1} = e = a \in H$. Bila $e \neq e$, perhatikan pangkat berikut $a = a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots$. Kondisi tertutup berakibat $a^i \in H$ untuk semua i. Karena H berhingga, ada beberapa pangkat-pangkat tersebut yang sama. Oleh karena itu ada beberapa i dan j dengan $i < j$ dan $a^i = a^j$ atau $a^{(i-j)} = a^i(a^j)^{-1} = a^i a^{-j} = e$. Jadi $aa^{(i-j-1)} = e$. Terlihat $a^{-1} = a^{(i-j-1)} \in H$. Dengan demikian kondisi invers dipenuhi. ✓

Definisi 2.2.2 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Didefinisikan himpunan

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Bila operasi dalam grup adalah penjumlahan, maka

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{na \,|\, n \in Z\}.$$ ✓

Proposisi 2.2.1 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Maka $\langle a \rangle$ adalah suatu subgrup dari G, yang dinamakan **subgrup siklik dibangun oleh** a.

Bukti Misalkan $x, y \in \langle a \rangle$, maka $x = a^m, y = a^n$ untuk beberapa $m, n \in \mathbb{Z}$. Didapat $xy^{-1} = x^m(a^n)^{-1} = a^{m-n}$. Karena $m - n \in \mathbb{Z}$, maka $xy^{-1} \in \langle a \rangle$. Jadi $\langle a \rangle$ adalah subgrup dari grup G. ✓

Contoh 2.2.12 Dalam $\mathbb{Z}$ subgrup yang dibangun oleh 3 adalah $\langle 3\rangle = 3\mathbb{Z}$.

Contoh 2.2.13 Dalam C^* subgrup yang dibangun oleh i adalah $\langle i\rangle = \{i, i^2, i^3, i^4\} = \{i, -1, -i, 1\}$.

Contoh 2.2.14 Dalam S_3 subgrup yang dibangun oleh ρ adalah $\langle rho\rangle = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$.

Contoh 2.2.15 Dalam D_4, $\langle \rho\rangle = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ dan $\langle \tau\rangle = \{\rho_0, \tau\}$.

Contoh 2.2.16 Semua subgrup dari $\mathbb{Z}6$ adalah:
$\{0\}$, subgrup trivial.
$\{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\} = \mathbb{Z}_6$, subgrup taksejati.
$\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\} = \langle [2]_6\rangle = \langle [4]_6\rangle$
$\{[0]_3, [3]_6\} = \langle [3]_6\rangle$.
Catatan bahwa, bila H adalah suatu subgrup dan $5 \in H$, maka $-5 = 1 \in H$ dan bila $2, 3 \in H$, maka $3 - 2 = 1 \in H$. Dalam hal yang demikian $H = \mathbb{Z}_6$. Jadi semua subgrup dari $\mathbb{Z}_6$ telah dibuat.

Pengertian berikut yang dikenalkan adalah penting sekali untuk kajian grup.

Definisi 2.2.3 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. **Order** elemen a ditulis $|a|$ adalah bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $a^n = e$ atau takberhingga bila n tidak ada. Bila operasi pada grup adalah penjumlahan $a^n = e$ ditulis $na = e$.

Contoh 2.2.17 Dalam S_3, $|\mu_1| = 2, |\rho| = 3$.

Contoh 2.2.18 Dalam $\mathbb{Z}_6$, $|[0]_6| = 1, |[1]_6| = |[5]_6| = 6, |[2]_6| = |[4]_6| = 3, |[3]_6| = 2$.

Contoh 2.2.19 Dalam $\mathbb{Z}$, $|0| = 1$ dan $|n|$ takhingga untuk semua $n \neq 0$.

Contoh 2.2.20 Dalam $\mathbb{C}^*$, $|i| = 4$.

Sebelum mengakhiri bagian ini, dikenalkan subgrup yang sangat penting dari suatu grup G.

Definisi 2.2.4 Misalkan G sebarang grup. Maka **senter** dari G ditulis $Z(G)$, ada himpunan bagian dari G yang elemen-elemennya komutatif dengan semua elemen G, dengan kata lain

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid xy = yx, \text{ untuk semua } y \in G\}.$$

Catatan bahwa, $ey = y = ye$ untuk semua $y \in G$. Jadi $e \in Z(G)$ dengan demikian $Z(G) \neq \varnothing$.

Teorema 2.2.4 Senter $Z(G)$ dari suatu grup G adalah subgrup dari G.

Bukti Cukup dibuktikan memenuhi tertutup dan invers. Misalkan $a, b \in Z(G)$, maka $ax = xa$ untuk semua $x \in G$ dan $bx = xb$ untuk semua $x \in G$. Didapat

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab).$$

Terlihat bahwa $ab \in Z(G)$. Selanjutnya diberikan sebarang $a \in Z(G)$, maka $ay = ya$ untuk semua $y \in G$. Didapat $a^{-1}y = a^{-1}(y^{-1})^{-1} = (y^{-1}a)^{-1} = (ay^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}a^{-1} = ya^{-1}$. Terlihat bahwa $a^{-1} \in Z(G)$. ✓

Catatan bahwa, bila G grup komutatif, maka $Z(G) = G$.

Contoh 2.2.21 Misalkan dicari senter dari grup takkomutatif D_4 (Contoh 2.1.6),

$$D_4 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau\}.$$

Didapat $\tau\rho = \rho^3\tau$, jadi $\rho \notin Z(D_4)$ dan $\rho^3 \notin Z(D_4)$. Dilain pihak, didapat

$$\tau\rho^2 = (\tau\rho)\rho = (\rho^3\tau)\rho = \rho^3(\tau\rho) = \rho^3(\rho^3\tau) = (\rho^3\rho^3)\tau = \rho^2\tau.$$

Maka, mudah ditunjukkan bahwa ρ^2 komutatif dengan semua elemen dari D_4. Jadi $\rho^2 \in Z(D_4)$. Selanjutnya, didapat

$$\begin{aligned}
(\rho\tau)\rho = \rho(\rho^3\tau) = \tau &\neq \rho^2\tau = \rho(\rho\tau)\\
(\rho^2\tau)\rho = \rho^2(\rho^3\tau) = \rho\tau &\neq \rho^3\tau = \rho(\rho^2\tau)\\
(\rho^3\tau)\rho = \rho^3(\rho^3\tau) = \rho^2\tau &\neq \tau = \rho(\rho^3\tau).
\end{aligned}$$

Jadi $Z(D_4) = \{\rho_0, \rho^2\}$. ●

Subgrup penting lainnya diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.2.5 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Maka **sentralisir** dari $a \in G$ dinotasikan oleh $C_G(a)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$C_G(a) = \{x \in G \,|\, ax = xa\}.$$

Catatan bahwa, untuk sebarang $a \in G$ didapat $Z(G) \subseteq C_G(a)$. Hal ini berarti bahwa senter dari G termuat dalam sentralisir sebarang elemen. ✓

Untuk grup yang sudah jelas, penulisan $C_G(a)$ cukup ditulis $C(a)$.

Contoh 2.2.22 Misalkan dicari sentralisir dari ρ dalam S_3. Jelas $\rho_0, \rho, \rho^2 \in C(\rho)$. Juga $\rho\mu_1 \neq \mu_1\rho$. Dapat dihitung pula $\rho\mu_2 = \mu_1$ sedangkan $\mu_2\rho = \mu_3$. jadi $\rho\mu_2 \neq \mu_2\rho$. Juga, $\rho\mu_3 = \mu_2$ dan $\mu_3\rho = \mu_1$. Jadi $\mu_3\rho \neq \rho\mu^3$. Dengan demikian $C(\rho) = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$. ●

Latihan

Latihan 2.2.1 Dapatkan order elemen dari grup yang berikut ini.

1. $2 \in \mathbb{Z}_3$
2. $4 \in \mathbb{Z}_{10}$
3. $\mu_2 \in S_3$
4. $\rho \in D_4$
5. $\rho^2\tau \in D_4$
6. $(-1 + \sqrt{3}i)/2 \in \mathbb{C}^*$
7. $\mathbf{j} \in Q_8$
8. $-i \in \mathbb{C}^*$
9. $(-1 - \sqrt{3}i)/2 \in \mathbb{C}^*$
10. $\cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7) \in \mathbb{C}^*$.

Latihan 2.2.2 Dapatkan setidaknya dua subgrup sejati taktrivial dari grup berikut.

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{C}^*$
4. $\mathbb{Z}_8$
5. S_3
6. D_4
7. $8\mathbb{Z}$
8. $GL(2, \mathbb{Q})$
9. Q_8.

Latihan 2.2.3 Misalkan G adalah suatu grup. Tunjukkan bahwa $\langle a \rangle = \left\langle a^{-1} \right\rangle$ dan $|a| = |a^{-1}|$.

Latihan 2.2.4 Misalkan $G = \{a + b\sqrt{2}i \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan.

Latihan 2.2.5 Misalkan $G = \{n + mi \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$. Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan.

Latihan 2.2.6 Misalkan $G = \{\cos(2k\pi/7) + i\sin(2k\pi/7), \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathbb{C}^*$ terhadap operasi perkalian. Berapakah $|G|$?

Latihan 2.2.7 Misalkan $G = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$. Tentukan apakah G subgrup dari $\mathbb{C}^*$ atau bukan subgrup terhadap operasi perkalian.

Latihan 2.2.8 Untuk $\theta \in \mathbb{R}$, misalkan $A(\theta) \in SL(2, \mathbb{R})$ adalah matriks representasi dari suatu rotasi θ radian:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(a) Tunjukkan bahwa $H = \{A(\theta) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ adalah suatu subgrup dari $SL(2, \mathbb{R})$.

(b) Dapatkan invers dari $A(2\pi/3)$.

(c) Dapatkan order dari $A(2\pi/3)$.

Latihan 2.2.9 Dalam $SL(2, \mathbb{Z}_{10})$, misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitung A^3 dan A^{11}.

(b) Dapatkan order dari A.

Latihan 2.2.10 Dalam $Sl(3,\mathbb{R})$, untuk sebarang $a,b \in \mathbb{R}$, misalkan

$$D(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tunjukkan bahwa $H = \{D(a,b,c) \,|\, ab, c \in \mathbb{R}\}$ adalah subgrup dari $SL(3,\mathbb{R})$.

Latihan 2.2.11 Tunjukkan bahwa dalam suatu grup komutatif G, himpunan yang semua elemen-elemennya mempunyai order berhingga di G adalah subgrup dari G.

Latihan 2.2.12 Tunjukkan bahwa bila H dan K adalah subgrup dari G, maka $H \cap K$ adalah subgrup dari G.

Latihan 2.2.13 Tunjukkan bahwa bila G adalah suatu grup dan $a,b \in G$, maka $|aba^{-1}| = |b|$.

Latihan 2.2.14 Tunjukkan bahwa bila G adalah suatu grup dan $a,b \in G$, maka $|ab| = |ba|$.

Latihan 2.2.15 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Tunjukkan bahwa sentralisir dari a, $C_G(a)$ adalah subgrup dari G.

Latihan 2.2.16 Dapatkan sentralisir $C(\mu_1)$ di S_3.

Latihan 2.2.17 Dapatkan sentralisir $C(\rho^2)$ di D_4.

Latihan 2.2.18 *Misalkan bahwa G adalah suatu grup dan $a \in G$. Tunjukkan bahwa $C(a) = G$ bila dan hanya bila $a \in Z(G)$.*

Latihan 2.2.19 Dapatkan senter $Z(S_3)$ dari grup S_3.

Latihan 2.2.20 Diberikan grup G dan $H \subset G$ dengan $H \neq \emptyset$. Tunjukkan bahwa H adalah subgrup dari G bila dan hanya bila berlaku

$$a^{-1}b \in H, \text{ untuk setiap } a,b \in H.$$

2.3 Grup Siklik

Pada bagian ini dibahas kajian dari grup khusus yang dinamakan *grup siklik*. Dalam pembahasan sebelumnya sudah dikenalkan pengertian subgrup siklik $\langle a\rangle$ dari suatu grup G yang dibangun oleh suatu elemen a.

Contoh 2.3.1 Sudah diperlihatkan bahwa dalam $\mathbb{Z}_6$ subgrup yang dibangun oleh $[1]_6$ adalah $\mathbb{Z}_6$ sendiri, juga dibangun oleh $[5]_6$. Jadi $\mathbb{Z}_6 = \langle [1]_6\rangle = \langle [5]_6\rangle$. ●

Contoh 2.3.2 Dalam $\mathbb{Z}$, subgrup yang dibangun oleh 1 dan -1 adalah $\mathbb{Z}$ sendiri, jadi $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle = \langle -1\rangle$. ●

Contoh 2.3.3 Dalam $G = \{1, i, -1, -i\}$, subgrup yang dibangun oleh i dan $-i$ adalah G sendiri. Jadi $G = \langle i\rangle = \langle -i\rangle$. ●

Contoh-contoh yang baru saja dibahas adalah grup siklik. Berikut ini secara formal diberikan pengertian grup siklik.

Definisi 2.3.1 Suatu grup G dinamakan **siklik** bila ada suatu elemen $a \in G$ sedemikian hingga $G = \langle a\rangle = \{a^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Dalam hal ini elemen a dinamakan suatu **generator** dari G. ✓

Bila operasi pada grup adalah penjumlahan kondisi $G = \{a^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ ditulis $G = \{na \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Ketika menghitung $\langle a\rangle$ untuk suatu elemen a di G, dihitung berturut-turut pangkat dari a. Sedangkan bila operasi pada grup adalah penjumlahan, maka dihitung berturut-turut kelipatan dari a. Bila semua hasil hitungan memberikan semua elemen-elemen dari G, maka G dibangun oleh a.

Contoh 2.3.4 Untuk sebarng $n > 1$, $\mathbb{Z}_n = \langle [1]_n\rangle = \langle [n-1]_n\rangle$ adalah grup siklik berorder n. ●

Contoh 2.3.5 Diberikan $\mathbb{Z}_{[1]_{10}} = \langle [1]_{10}\rangle = \langle [3]_{10}\rangle = \langle [1]_7\rangle = \langle [9]_{10}\rangle$, terlihat bahwa semua generator dari $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}$ dan $[9]_{10}$. Akan diperlihat menghitung kelipatan dari $[3]_{10}$ secara berturutan sebagai berikut. Dimulai dari $1 \cdot [3]_{10} = [3]_{10}$ dan berikutnya $2 \cdot [3]_{10} = [6]_{10}$, $3 \cdot [3]_{10} = [9]_{10}$, $4 \cdot [3]_{10} = [12]_{10} = [2]_{10}$, $5 \cdot [3]_{10} = [15]_{10} = [5]_{10}$, $6 \cdot [3]_{10} = [18]_{10} = [8]_{10}$, $7 \cdot [3]_{10} = [21]_{10} = [1]_{10}$, $8 \cdot [3]_{10} = [24]_{10} = [4]_{10}$, $9 \cdot [3]_{10} = [27]_{10} = [7]_{10}$, $10 \cdot [3]_{10} = [30]_{10} = [0]_{10}$. Terlihat penghitungan kelipatan dari $[3]_{10}$ secara berturut-turut menghasilkan semua elemen-elemen di $\mathbb{Z}_{10}$, jadi $[3]_{10}$ adalah generator dari $\mathbb{Z}_{10}$. Perlakuan yang serupa akan memberikan hasil yang sama bila dilakukan pada elemen $[1]_{10}, [7]_{10}$ dan $[9]_{10}$. ●

Contoh 2.3.6 Juga, $\mathbb{U}(10) = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\} = \{[3]_{10}^0, [3]_{10}^1, [3]_{10}^2, [3]_{10}^3\} = \langle [3]_{10}\rangle$. ●

Berikut ini diberikan grup yang tidak siklik.

Contoh 2.3.7 Dalam S_3, $\langle\rho\rangle = \langle\rho^2\rangle = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$ dan $\langle\mu_i\rangle = \{\rho_0, \mu_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Jadi tak ada elemen dari S_3 yang membangun S_3 sebagai grup. Dengan demikian S_3 bukan grup siklik. ●

Contoh 2.3.8 Grup $2\mathbb{Z} = \langle 2\rangle$, secara umum, untuk setiap $n \geq 1$ didapat $n\mathbb{Z} = \langle n\rangle$. Semua grup ini adalah grup siklik takberhingga. ●

Contoh 2.3.9 Grup $\mathbb{Z}_{10} \neq \langle[2]_{10}\rangle = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$. Penghitungan kelipatan dari $[2]_{10}$ secara berturutan sampai 5 kali menghasilkan semua elemen di $\langle[2]_{10}\rangle$. Bila hal ini dilanjutkan didapat

$$6[2]_{10} = [2]_{10},\ 7[2]_{10} = [4]_{10},\ 8[2]_{10} = [6]_{10},\ 9[10]_{10} = [8]_{10}.\ 10[2]_{10} = [0]_{10}.$$

Terlihat menghasilkan pola yang berulang lagi. ●

Teorema berikut menjelaskan bahwa pengulangan bentuk dalam contoh yang baru saja dibahas terjadi secara umum.

Teorema 2.3.1 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$. Maka untuk semua $i, j \in \mathbb{Z}$ didapat

(1) Bila a mempunyai order takhingga, maka $a^i = a^j$ bila dan hanya bila $i = j$.

(2) Bila a mempunyai order berhingga, maka $a^i = a^j$ bila dan hanya bila n membagi $i - j$.

Bukti

(1) Misalkan a mempunyai order takhingga. Bila $i = j$, maka jelas $a^i = a^j$. Sebaliknya, bila $a^i = a^j$, maka $a^{i-j} = a^i a^{-j} = e$. Tetapi karena a mempunyai order takhingga, maka $a^n = e$ bila dan hanya bila $n = 0$. Sehingga didapat $i - j = 0$ atau $i = j$.

(2) Misalkan $|a| = n$. Bila n membagi $i - j$, maka $i - j = nk$ untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$ atau $i = nk + j$ untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$. Didapat

$$a^i = a^{nk+j} = a^{nk}a^j = (a^n)^k a^j = e^k a^j = ea^j = a^j.$$

Sebaliknya, bila $a^i = a^j$ atau ekivalen $a^{i-j} = e$. Dengan menggunakan algoritma pembagian bilangan bulat didapat $i - j = qn + r$, dimana $0 \leq r < n$. Jadi

$$e = a^{i-j} = a^{qn+r} = a^{qn}a^r = (a^n)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r.$$

Karena $0 \leq r < n$ dan n adalah order dari a, maka n adalah bilangan positip terkecil yang memenuhi $a^n = e$. Jadi haruslah $r = 0$. Dengan demikian didapat $i - j = qn$ atau n membagi $i - j$. ✓

Kesimpulan 2.3.1 Misal G adalah suatu grup dan $a \in G$ dengan $|a| = n$. Maka untuk sebarang $k \in \mathbb{Z}$, $a^k = e$ bila dan hanya bila n membagi k.

Bukti Gunakan Teorema 2.3.1 bagian (2) didapat n membagi k. ✓

Kesimpulan 2.3.2 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$ dengan $|a| = n$. Maka $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$.

Bukti Misalkan $|a| = n$ dan
$$\langle a \rangle = \{a^m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}.$$
Dengan menggunakan algoritma pembagian bilangan bulat $m = qn + r$ untuk beberapa $q \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq r < n$. Sehingga didapat
$$\begin{aligned}
\langle a \rangle &= \{a^m \,|\, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a^{qn+r} \,|\, 0 \leq r < n\} \\
&= \{(a^{qn})a^r \,|\, 0 \leq r < n\} \\
&= \{(a^n)^q a^r \,|\, 0 \leq r < n\} \\
&= \{e^q a^r = ea^r \,|\, 0 \leq r < n\} \\
&= \{a^r \,|\, 0 \leq r < n\} \\
&= \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Kesimpulan 2.3.3 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$ mempunyai order berhingga. Maka $|\langle a \rangle| = |a|$.

Bukti Misalkan $|a| = n$. Dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.2 didapat
$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$
Jelas bahwa $|\langle a \rangle| = n$. Jadi $|\langle a \rangle| = |a|$.

Contoh 2.3.10 Diberikan G grup siklik dengan $|G| =$. Jadi
$$G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}.$$
Didapat
$$(a^4)^2 = a^8 = a^{6+2} = a^6a^2 = ea^2 = a^2 \neq e,$$
sedangkan
$$(a^4)^3 = a^{12} = a^{6+6} = a^6a^6 = e \cdot e = e.$$
Jadi $|a^4| = 3$.

Teorema berikut sangat penting menjadikan mudah untuk mendapatkan order elemen dari suatu grup siklik.

Teorema 2.3.2 Misalkan $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = |a| = n$. Maka untuk sebarang elemen $a^k \in G$ didapat $|a^k| = n/\text{fpb}(n, k)$.

Bukti Dari Kesimpulan 2.3.1 didapat $(a^k)^m = a^{km} = e$ bila dan hanya bila n membagi

km atau km kelipatan dari n juga kelipatan dari k. Jadi bila order $|a^k|$ adalah bilangan bulat positip terkecil m sedemikian hingga km kelipatan dari n dan k atau ekivalen km adalah bilangan bulat positip terkecil yang merupakan kelipatan dari n dan k, yaitu $km = \text{kpk}(n,k)$. Dengan menggunakan Proposisi 1.3.3 bagian (3) didapat $\cancel{k}m = \cancel{k}n/\text{fpb}(n,k)$ atau $m = n/\text{fpb}(n,k)$. Jadi $|a^k| = n/\text{fpb}(n,k)$.

Contoh 2.3.11 Dalam suatu grup siklik $G = \langle a \rangle$ dengan $|G| = 210$, maka

$$|a^{80}| = 210/\text{fpb}(210, 80) = 210/10 = 21.$$

Contoh 2.3.12 Dalam $\mathbb{Z}_{105}$, maka $|[84]_{105}| = 105/\text{fpb}(105, 84) = 105/21 = 5$.

Teori yang baru dibahas tidak hanya untuk menyederhanakan penghitungan order sebarang elemen dari suatu grup siklik sebagaimana pembahasan contoh sebelumnya, tetapi juga untuk mendapatkan generator dari grup sebagaimana diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 2.3.13 Diberikan grup $\mathbb{Z}_{12}$. Untuk mendapatkan order semua elemen dari $\mathbb{Z}_{12}$, atau mendapatkan semua $[s]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ yang memenuhi $|[s]_{12}| = 12$. Gunakan Teorema 2.3.2, didapat

$$|[s]_{12}| = 12/\text{fpb}(12, s).$$

Jadi $|[s]_{12}| = 12$ bila dan hanya bila $12/\text{fpb}(12,s) = 12$ atau $\text{fpb}(12,s) = 12/12 = 1$. Dengan demikian elemen-elemen $[s]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ adalah generator dari $\mathbb{Z}_{12}$ bila $\text{fpb}(12,s) = 1$. Jadi elemen-elemen tersebut adalah: $[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}$ dan $[11]_{12}$.

Kesimpulan 2.3.4 Diberikan grup siklik G dengan generator a, $G = \langle a \rangle$ dengan $|G| = |a| = n$. Maka a^s adalah generator dari G bila dan hanya bila $\text{fpb}(n,s) = 1$.

Bukti Elemen a^s adalah generator dari G bila dan hanya bila $G = \langle a^s \rangle$. Gunakan Kesimpulan 2.3.3, didapat $|\langle a^s \rangle| = |a^s|$, dan dari Teorema 2.3.2 didapat $|a^s| = n/\text{fpb}(n,s)$. Tetapi $|a^s| = |G| = n$. Jadi a^s adalah generator dari G bila dan hanya bila $n/\text{fpb}(n,s) = n$ atau ekivalen $\text{fpb}(n,s) = 1$.

Kesimpulan 2.3.5 Misalkan G adalah suatu grup siklik dengan order n. Maka banyaknya elemen generator dari G adalah $\phi(n)$ dimana ϕ adalah fungsi Euler.

Bukti Dari kesimpulan yang baru saja dibahas, banyaknya elemen generator dari G adalah bilangan s dengan $1 \leq s < n$ yang memenuhi $\text{fpb}(n,s) = 1$. Hal ini sesuai dengan definisi $\phi(n)$.

Contoh berikut mengilustrasikan bahwa suatu sifat yang dipunyai oleh grup siklik, membuat sifat ini secara khusus mudah dipahami.

Contoh 2.3.14 Misalkan akan dicari semua subgrup dari grup $\mathbb{Z}_{15}$. Untuk memulainya, jelas subgrup trivial $\langle 0\rangle$ adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_{15}$. Misalkan H adalah sebarang subgrup tak-trivial dari $\mathbb{Z}_{15}$. Dari Kesimpulan 2.3.4 didapat semua generator dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $[1]_{15}, [2]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [11]_{15}, [13]_{15}, [14]_{15}$. Didapat subgrup tak-sejati:

$$\mathbb{Z}_{15} = \langle [1]_{15}\rangle = \langle [2]_{15}\rangle = \langle [4]_{15}\rangle = \langle [7]_{15}\rangle = \langle [8]_{15}\rangle = \langle [11]_{15}\rangle = \langle [13]_{15}\rangle = \langle [14]_{15}\rangle .$$

Selanjutnya, misalkan H adalah subgrup sejati tak-trivial dari G. Misalkan $[3]_{15} \in H$, maka untuk sebarang $[y]_{15} \in H$ dan dengan menggunakan algoritma pembagian bilangan bulat didapat $y = 3q + r$ untuk beberapa r dengan $0 \leq r < 3$. Tetapi $[3]_{15}, [y]_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$, maka $[r]_{15} = [y]_{15} - q[3]_{15} \in H$. Tetapi H adalah himpunan bagian sejati dari $\mathbb{Z}_{15}$, maka $[1]_{15}, [2]_{15} \notin H$. Jadi haruslah $r = 0$. Dengan demikian semua elemen dari H adalah kelipatan dari $[3]_{15}$. Jadi $H = \langle [3]_{15}\rangle = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\} = 3\mathbb{Z}_{15}$. Karena $3[6]_{15} = 2[9]_{15} = 4[12]_{15} = [3]_{15}$, maka sebarang subgrup sejati tak-trivial dari $\mathbb{Z}_{15}$ yang memuat $[6]_{15}, [9]_{15}$ dan $[12]_{15}$ juga pasti memuat $[3]_{15}$ dan sama dengan

$$3\mathbb{Z}_{15} = \langle [3]_{15}\rangle = \langle [6]_{15}\rangle = \langle [9]_{15}\rangle = \langle [12]_{15}\rangle .$$

Berikutnya, misalkan H subgrup sejati tak-trivial dan $[5]_{15} \in H$. Dengan argumentasi yang sama didapat $H = \langle [5]_{15}\rangle = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\} = 5\mathbb{Z}_{15}$, dan sebarang subgrup sejati yang memuat $[10]_{10}$ juga sama dengan $5\mathbb{Z}_{15} = \langle [5]_{15}\rangle = \langle [10]_{15}\rangle$. Dengan demikian semua subgrup yang mungkin dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah

$$0\mathbb{Z}_{15} = \{[0]_{15}\},\ \ 1\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_{15},\ \ 3\mathbb{Z}_{15},\ \ \text{dan}\ \ 5\mathbb{Z}_{15}.$$

Teorema 2.3.3 Setiap subgrup dari suatu grup siklik adalah siklik.

Bukti Misalkan $G = \langle a\rangle$ dan H adalah sebarang subgrup dari G. Bila H adalah subgrup trivial, yaitu H={e}, maka $H = \langle e\rangle$ adalah siklik. Asumsikan H subgrup tak-trivial. Jadi, dapat dipilih $b \in H$ dengan $b \neq e$. Karena juga $b \in G = \langle a\rangle$, maka $b = a^s$ untuk beberapa $s \in \mathbb{Z}$ dan karena $b \neq e$, maka $s \neq 0$. Juga karena $b \in H$, maka $b^{-1} = (a^s)^{-1} = a^{-s} \in H$. Karena satu diantara s atau $-s$ adalah positip, maka H memuat beberapa pangkat positip dari a. Dengan menggunakan prinsip keterurutan secara baik bilangan bulat positip, maka dapat diplih bilangan bulat positip terkecil m yang memenuhi $a^m \in H$. Selanjutnya, diberikan sebarang $x \in H$, maka $y = a^n$ untuk beberap bilangan bulat n (sebab juga $y \in G$). Gunakan algoritma pembagian bilangan bulat pada m dan n didapat $n = qm + r$ untuk beberapa bilangan bulat q dan $0 \leq r < m$. Didapat

$$y = a^n = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r.$$

Hal ini berakibat

$$a^r = y(a^m)^{-q} \in H\ \ (\text{sebab } H < G, y \in H \text{ dan } a^m \in H).$$

Tetapi m adalah bilangan bulat positip terkecil yang memenuhi $a^m \in H$, dengan dan juga $a^r \in H$ dengan $0 \leq r < m$. Jadi haruslah $r = 0$. Dengan demikian didapat

$$y = a^n = a^{qm+r} = a^{qm} = (a^m)^q,\ \ \text{dengan}\ \ q \in \mathbb{Z}.$$

Terlihat bahwa sebarang $y \in H$ merupakan suatu pangkat dari a^m, dengan demikian $H = \{(a^m)^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle a^m \rangle$. Jadi H adalah subgrup siklik.

Kesimpulan 2.3.6 Semua subgrup dari $\mathbb{Z}$ adalah $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ untuk semua $n \geq 0$.

Bukti $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ adalah siklik. Jadi menurut Teorema 2.3.3 sebarang subgrup $H \leq \mathbb{Z}$ juga siklik. Oleh karena itu, $H = \langle m \rangle$ untuk beberapa bilangan bulat m. Karena $\langle -m \rangle = \langle m \rangle$ dan salah satu dari m atau $-m$ adalah taknegatip, maka $H = \langle n \rangle$ untuk $n \geq 0$.

Contoh 2.3.15 Karena $\mathbb{Z}_{12}$ adalah grup siklik, maka semua subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah siklik. Jadi bila subgrup $H = \langle [s]_{12} \rangle$, maka $|H| = |[s]_{12}| = 12/\text{fpb}(12, s)$ adalah pembagi dari 12. Semua pembagi 12 adalah $1, 2, 3, 4, 6$ dan 12 sendiri. Subgrup H dengan $|H| = 1$ adalah $\{[0]_{12}\} = \langle [0]_{12} \rangle$. Berikutnya bila $2 = |H| = |[s]_{12}| = 12/\text{fpb}(12, s)$, maka $s = 6$. Didapat $H = \langle [6]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [6]_{12}\}$. Sedangkan subgrup yang lain adalah

$$\langle [4]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}, \text{ order } |\langle [4]_{12} \rangle| = 3,$$

$$\langle [3]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}, \text{ order } |\langle [3]_{12} \rangle| = 4,$$

$$\langle [2]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [2]_{12}, [4]_{12}, [6]_{12}, [8]_{12}, [10]_{12}\}, \text{ order } |\langle [2]_{12} \rangle| = 6$$

dan $\langle [1]_{12} \rangle = \mathbb{Z}_{12}$ dengan order $|\langle [1]_{12} \rangle| = |\mathbb{Z}_{12}| = 12$.

Teorema 2.3.4 Misalkan $G = \langle a \rangle$ berorder n. Maka

(1) Order $|H|$ sebarang subgrup H dari grup G adalah pembagi dari $n = |G|$.

(2) Untuk semua bilangan bulat positip d yang membagi n ada tunggal subgrup yang berorder d yaitu $H = \left\langle a^{n/d} \right\rangle$.

Bukti

(1) Misalkan H adalah suatu subgrup dari $G = \langle a \rangle$. Dengan menggunakan Teorema 2.3.3, didapat $H = \langle a^m \rangle$ untuk beberapa $m \geq 0$, dan dengan menggunakan Teorema 2.3.2 didapat $|H| = |a^m| = n/\text{fpb}(n, m)$. Terlihat bahwa order $|H|$ membagi n.

(2) Karena $e \in H$ untuk sebarang subgrup H dari grup G, maka subgrup dari G yang berorder 1 hanya $\{e\} = \langle e \rangle$. Misalkan d pembagi dari n dan $d > 1$. Gunakan Teorema 2.3.2 didapat $|a^{n/d}| = n/\text{fpb}(n, n/d) = n/(n/d) = d$. Jadi $\left\langle a^{n/d} \right\rangle$ adalah subgrup berorder d. Tinggal menunjukkan ketunggalan, misalkan H adalah subgrup dari G yang berorder d dan karena G siklik yaitu $G = \langle a \rangle$, maka menurut Teorema 2.3.3 didapat H adalah subgrup siklik. Jadi $H = \langle a^m \rangle$, dimana m adalah bilangan bulat positip terkecil yang memenuhi $a^m \in H$. Selanjutnya dari Teorema 1.3.6 bagian (2) ada bilangan bulat u dan v yang memenuhi $\text{fpb}(n, m) = un + vm$. Sehingga didapat

$$a^{\text{fpb}(n,m)} = a^{un+vm} = a^{un} a^{vm} = (a^n)^u (a^m)^v = e^u (a^m)^v = e(a^m)^v = (a^m)^v \in H.$$

Karena $1 \leq \text{fpb}(n, m) \leq m$ dan m adalah bilangan bulat positip terkecil yang memenuhi $a^m \in H$, maka haruslah $\text{fpb}(n, m) = m$. Maka dengan menggunakan Teorema 2.3.2 didapat

$$d = |H| = |a^m| = n/\text{fpb}(n, m) = n/m.$$

Jadi $d = n/m$ atau $m = n/d$. dengan demikian didapat $H = \langle a^m \rangle = \left\langle a^{n/d} \right\rangle$ sebagaimana diharapkan. ✓

Contoh 2.3.16 Dibahas lagi menentukan semua subgrup dari grup $\mathbb{Z}_{12}$ sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 2.3.15. Tetapi sekarang menggunakan Teorema 2.3.4. Grup siklik $\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle$, dengan demikian $a = [1]_{12}, n = 12$ dan semua pembagi dari $n = 12$ adalah $d = 1, 2, 3, 4, 6, 12$. Untuk $d = 1$ didapat

$$H = \langle (12/1)[1]_{12} \rangle = \langle 12[1]_{12} \rangle = \langle [12]_{12} \rangle = \{[0]_{12}\}.$$

Untuk $d = 2$, didapat subgrup

$$H = \langle (12/2)[1]_{12} \rangle = \langle 6[1]_{12} \rangle = \langle [6]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [6]_{12}\}.$$

Untuk $d = 3$, didapat subgrup

$$H = \langle (12/3)[1]_{12} \rangle = \langle 4[1]_{12} \rangle = \langle [4]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}.$$

Untuk $d = 4$, didapat subgrup

$$H = \langle (12/4)[1]_{12} \rangle = \langle 3[1]_{12} \rangle = \langle [3]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}.$$

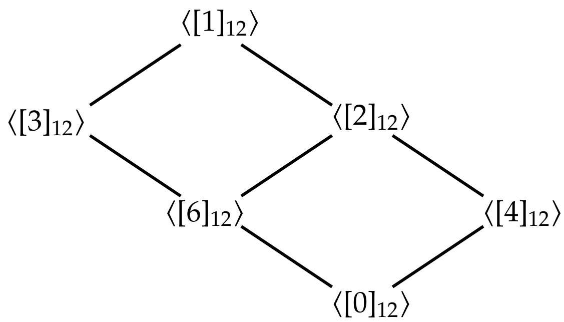
Untuk $d = 6$, didapat subgrup

$$H = \langle (12/6)[1]_{12} \rangle = \langle 2[1]_{12} \rangle = \langle [2]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [2]_{12}, [4]_{12}, [6]_{12}, [8]_{12}, [10]_{12}\}.$$

Untuk $d = 12$, didapat subgrup

$$H = \langle (12/12)[1]_{12} \rangle = \langle 1[1]_{12} \rangle = \langle [1]_{12} \rangle = \mathbb{Z}_{12}.$$

Gambar 2.5 adalah penampilan dari semua subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$ dalam bentuk diagram yang dinamakan **lattice subgrup**. Gambar tersebut menunjukkan bagaimana subgrup-subgrup mempunyai keterkaitan satu dengan yang lainnya. Garis dalam diagram menyatakan inklusi. Jadi, dalam diagram menunjukkan bahwa $\langle [3]_{12} \rangle$ memuat $\langle [6]_{12} \rangle$ dan $\langle [6]_{12} \rangle$ memuat $\langle [0]_{12} \rangle$. Diagram menunjukkan bahwa irisan dari $\langle [3]_{12} \rangle$ dan $\langle [2]_{12} \rangle$ adalah $\langle [6]_{12} \rangle$ dan irisan dari $\langle [6]_{12} \rangle$ dan $\langle [4]_{12} \rangle$ adalah $\langle [0]_{12} \rangle$.



Gambar 2.5: Lattice Subgrup

Latihan

Latihan 2.3.1 Dapatkan order elemen dari grup berikut:

(1) $[6]_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$ (2) $[6]_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$ (3) $[10]_{42} \in \mathbb{Z}_{42}$
(4) $[77]_{210} \in \mathbb{Z}_{210}$ (5) $[40]_{210} \in \mathbb{Z}_{210}$ (6) $[70]_{210} \in \mathbb{Z}_{210}$.

Latihan 2.3.2 Misalkan $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = 21$. Hitung order dari: $a^2, a^6, a^8, a^9, a^{14}, a^{15}$ dan a^{18}.

Latihan 2.3.3 Misalkan G adalah suatu grup dan $a \in G$ dengan $|a| = 6$.
(a) Tulis semua elemen dari $\langle a \rangle$.
(b) Dapatkan dalam $\langle a \rangle$ elemen-elemen a^{32}, a^{47}, a^{70}.

Latihan 2.3.4 Dapatkan semua generator dari $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}$ dan $\mathbb{Z}_{15}$.

Latihan 2.3.5 Diberikan grup $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = 30$. Dapatkan semua generator dari G.

Latihan 2.3.6 Gambar diagram lattice subgrup untuk $\mathbb{Z}_{18}$.

Latihan 2.3.7 Dapatkan semua elemen $a \in \mathbb{Z}_{15}$ dimana $|a| = 5$.

Latihan 2.3.8 Diberikan $G = \langle a \rangle$ dengan $|G| = 20$. Dapatkan semua elemen $b \in G$ dimana $|b| = 10$.

Latihan 2.3.9 Dapatkan semua subgrup siklik dari S_3. Apakah S_3 mempunyai suatu subgrup sejati tak-siklik? Jelaskan jawaban saudara.

Latihan 2.3.10 Dapatkan semua subgrup siklik dari D_4. Apakah D_3 mempunyai suatu subgrup sejati tak-siklik? Jelaskan jawaban saudara.

Latihan 2.3.11 Apakah benar bahwa bila setiap subgrup sejati dari suatu grup G adalah siklik, maka G harus juga siklik? Jawab dengan suatu bukti bila benar atau berikan contoh penyangkal bila salah.

Latihan 2.3.12 Berikan contoh-contoh subgrup siklik berhingga dari $\mathbb{C}^*$.

Latihan 2.3.13 Tunjukkan bahwa setiap grup siklik adalah komutatif.

Latihan 2.3.14 Berikan suatu contoh grup yang memenuhi sifat berikut:

(a) suatu grup siklik takberhingga.

(b) suatu grup komutatif takberhingga yang tak-siklik.

(c) suatu grup siklik berhingga dengan tepat mempunyai enam generator.

(d) suatu grup komutatif berhingga yang tak-siklik.

Latihan 2.3.15 Misalkan H dan K adalah subgrup siklik dari suatu grup komutatif G dengan $|H| = 10$ dan $|K| = 14$. Tunjukkan bahwa G memuat suatu subgrup siklik yang berorder 70.

Latihan 2.3.16 Diberikan grup G yang tak mempunyai subgrup sejati tak-trivial.
(a) Tunjukkan bahwa G harus siklik.
(b) Apa yang bisa dikatakan mengenai order dari G?

Latihan 2.3.17 Diberikan bilangan bulat m dan n; dan himpunan

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \,|\, a \in m\mathbb{Z},\ b \in n\mathbb{Z}\}.$$

(a) Tunjukkan bahwa $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ adalah suatu subgrup dari $\mathbb{Z}$.

(b) Dapatkan suatu generator untuk subgrup $12\mathbb{Z} + 21\mathbb{Z}$.

(c) Dapatkan suatu generator untuk subgrup $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.

Latihan 2.3.18 Dapatkan suatu generator subgrup $6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z}$ dari grup $\mathbb{Z}$.

Latihan 2.3.19 Diberikan bilangan bulat m dan n. Dapatkan suatu generator subgrup $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ dari grup $\mathbb{Z}$.

Latihan 2.3.20 Tentukan grup yang berikut siklik atau tidak:
(a) $\mathbb{U}(10)$ (b) $\mathbb{U}(12)$ (c) $\mathbb{U}(20)$ (d) $\mathbb{U}(24)$.

Latihan 2.3.21 Diberikan grup G dan $a, b \in G$ dengan $|a| = 14$ dan $|b| = 15$. Uraikan subgrup $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Jelaskan jawaban saudara.

Latihan 2.3.22 Diberikan grup $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = 20$. Himpunan H dan K adalah dua subgrup sejati tak-trivial yang berbeda dari grup G sedemikian hingga $H < K$ dan $a^4 \notin K$. Uraikan H dan K.

Latihan 2.3.23 Diberikan grup $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = n$, d suatu pembagi dari n. Tunjukkan bahwa banyaknya elemen-elemen di G yang berorder d adalah $\phi(d)$ dimana ϕ adalah fungsi-ϕ Euler.

2.4 Permutasi

Pembahasan berikut ini tentang contoh yang paling penting dari grup berhingga, yaitu grup permutasi. Alasan grup permutasi menjadi pokok penting adalah bahwa, seperti yang akan terlihat pada bab mendatang , setiap grup berhingga dapat dilihat sebagai subgrup dari grup permutasi. Ini berarti bahwa kajian grup berhingga dapat dibahas pada sebagian kajian grup permuatsi. Ketika dikonstruksi suatu grup berhingga dengan sifat tertentu, dapat ditemukan grup permutasi yang menghasilkan subgrup dengan sifat-sifat yang sama. Bahasan dimulai dengan memberikan beberapa contoh permutasi dan fungsi yang bukan permutasi.

Contoh 2.4.1 Diberikan fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $f(n) = n + 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ adalah satu-satu, sebab bila $f(n_1) = f(n_2)$, maka $n_1 + 1 = n_2 + 1$ dan $n_1 = n_2$. Fungsi f juga pada, sebab untuk sebarang $m \in \mathbb{Z}$ (kodomain), maka dapat diplih $m - 1 \in \mathbb{Z}$ (domain) sehingga $f(m - 1) = (m - 1) + 1 = m$. ●

Contoh 2.4.2 Diberikan fungsi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $g(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ adalah satu-satu, sebab bila $g(n_1) = g(n_2)$, maka $2n_1 = 2n_2$ dan $n_1 = n - 2$. Fungsi g tidak pada, sebab $g(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. ●

Contoh 2.4.3 Fungsi $j : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan oleh

$$j(1) = 3,\ \ j(2) = 4,\ \ j(3) = 1,\ \ j(4) = 2.$$

Jelas fungsi j satu-satu dan pada. ●

Contoh 2.4.4 Fungsi $k : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ didefinisikan oleh

$$k(1) = 2,\ \ k(2) = 2,\ \ k(3) = 4,\ \ j(4) = 3.$$

Jelas fungsi k tidak satu-satu dan tidak pada. ●

Definisi 2.4.1 Suatu fungsi $\phi : A \to A$ dinamakan **permutasi dari himpunan** A bila ϕ fungsi satu-satu dan pada atau bijektif. ✓

Dari contoh-contoh yang dibahas, maka Contoh 2.4.1 dan 2.4.3 adalah permutasi. Sedangkan Contoh 2.4.2 dan 2.4.4 bukan permutasi.

Contoh 2.4.5 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan dua permutasi ϕ dan τ yang disajikan oleh

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Penyajian ϕ dan τ mempunyai arti :

$$\phi(1) = 4,\ \phi(2) = 6,\ \phi(3) = 1,\ \phi(4) = 2,\ \phi(5) = 3,\ \phi(6) = 5$$

dan

$$\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 3,\ \tau(3) = 5,\ \tau(4) = 4,\ \tau(5) = 6,\ \tau(6) = 1.$$

Karena ϕ dan τ adalah fungsi, maka dapat dikonstruksi komposisi fungsi $\phi \circ \tau : A \to A$ sebagai berikut

$$\phi \circ \tau(1) = \phi(\tau(1)) = \phi(2) = 6,\ \phi \circ \tau(2) = \phi(\tau(2)) = \phi(3) = 1,\ \phi \circ \tau(3) = \phi(\tau(3)) = \phi(5) = 3,$$

didapat

$$\phi \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama didapat

$$\tau \circ \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Catatan bahwa hasil komposisi fungsi juga fungsi bijektif oleh karenanya juga permutasi. Pada umumnya komposisi dari permutasi tidak komutatif, dalam contoh terlihat bahwa $\phi \circ \tau \neq \tau \circ \phi$. ●

Definisi 2.4.2 Diberikan dua permutasi ϕ dan τ pada suatu himpunan A komposisi $\phi \circ \tau$ dinamakan **produk permutasi** dari ϕ dan τ dan operasi komposisi disebut **perkalian permutasi**. ✓

Perkalian permutasi adalah operasi yang akan digunakan untuk membuat himpunan semua permutasi pada suatu himpunan A membentuk grup. Perlu diingatkan lagi, dimana grup permutasi ini telah dikenal.

Contoh 2.4.6 Misalkan dicari semua permutasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Pertama, perlu dicatat akan ada tepat enam permutasi. Bila dimulai dari 1 ada tiga kemungkinan pengaitan $1 \to 1, 1 \to 2$ atau $1 \to 3$, selanjutnya untuk 2 tinggal 2 pilihan pengaitan sebab fungsinya pada dan untuk 3 tinggal satu pilihan pengaitan. Dengan demikian ada sebanyak $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasi. Enam permutasi pada A adalah:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutasi yang terbentuk sudah dikenal sebagai grup simetri dari segitiga sama sisi S_3 yang sudah dibahas dalam Contoh 2.1.5. ●

Teorema 2.4.1 Diberikan $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan S_n adalah himpunan semua permutasi pada A. Maka S_n adalah suatu grup terhadap perkalian permutasi.

Bukti (Tertutup) Dari Teorema 1.1.1 menyatakan bahwa komposisi fungsi satu-satu dan pada menghasilkan fungsi satu-satu dan pada. Karena permutasi adalah fungsi satu-satu dan pada serta perkalian permutasi bermakna komposisi fungsi, maka berdasarkan teorema yang telah disebutkan sifat tertutup dipenuhi. (Assosiatif) Sifat ini juga dipenuhi berdasarkan Teorema 1.1.1. (Identitas) Permutasi yang didefinisikan oleh $\rho_0(i) = i$ untuk semua $i \in A$ adalah elemen identitas terhadap perkalian permutasi. (Invers) Untuk sebarang $\phi \in S_n$, ϕ adalah satu-satu dan pada, maka berdasarkan Teorema 1.1.3 fungsi diberikan oleh $\phi^{-1}(i) = j$ dimana $\phi(j) = i$ adalah terdefinisi dengan baik dan merupakan invers dari ϕ terhadap operasi perkalian permutasi. ✓

Karena elemen-elemen dari sebarang himpunan dengan n elemen dapat dilabel oleh $1, 2, 3, \ldots, n$,berlaku juga Teorema 2.4.1 berlaku juga untuk seberang himpunan berhingga A.

Definisi 2.4.3 Grup dari himpunan S_n terhadap operasi perkalian permutasi dinamakan **grup simetri** berderajad n. ✓

Proposisi 2.4.1 Grup simetri S_n mempunyai order $|S_n| = n!$.

Bukti Misalkan $\phi \in S_n$, ϕ dapat ditulis sebagai

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \phi(1) & \phi(2) & \phi(3) & \ldots & \phi(n-1) & \phi(n) \end{pmatrix}.$$

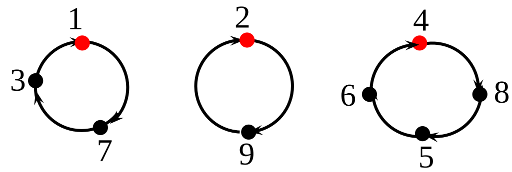
Ada sebanyak n pilihan untuk menetapkan niali $\phi(1)$. Sekali telah dipilih suatu nilai untuk $\phi(1)$, ada sebanyak $n-1$ pilihan untuk menetapkan nilai $\phi(2)$. Sekali nilai $\phi(1)$ dan $\phi(2)$ dipilih, ada sebanyak $n-2$ pilihan untuk menetapkan nilai $\phi(3)$, dan seterusnya. Dengan demikian ada sebanyak

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!. \quad ✓$$

Contoh 2.4.7 Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ dan permutasi

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_9.$$

Selanjutnya dibahas aplikasi dari ϕ secara berulang dikenakan pada berbagai elemen dari himpunan A:
$1 \to \phi(1) = 7 \to \phi^2(1) = \phi(7) = 3 \to \phi^3(1) = \phi(3) = 1$. Permutasi ϕ dikenakan pada 1 sebanyak 3 kali, hasilnya kembali lagi ke 1.
$2 \to \phi(2) = 9 \to \phi^2(2) = \phi(9) = 2$. Permutasi ϕ dikenakan pada 2 sebanyak 2 kali, hasilnya kembali lagi ke 2.
$4 \to \phi(4) = 8 \to \phi^2(4) = \phi(8) = 5 \to \phi^3(4) = \phi(5) = 6 \to \phi^4(4) = \phi(6) = 4$. Permutasi ϕ dikenakan pada 4 sebanyak 4 kali, hasilnya kembali lagi ke 4.



Gambar 2.6: Pengulangan ϕ dikenakan pada $i \in A$

Pertama pemutasi ϕ berturut-turut memetakan : 1 ke 7, 7 ke 3, 3 ke 1 dan tinggalkan elemen yang lain tetap didapat (1 7 3). Selanjutnya dengan cara yang sama didapat (2 9) dan (4 8 5 6). Tiga permutasi yang didapat diberikan oleh Gambar 2.6. Permutasi asal ϕ adalah produk $\phi = (1\ 7\ 3)(2\ 9)(4\ 8\ 5\ 6)$. Akibatnya, permutasi ϕ mempartisi himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$ menjadi tiga himpunan bagian yang saling asing, dengan demikian menentukan suatu relasi ekivalen pada himpunan A. Dua elemen $i, j \in A$ ekivalen , ditulis $i \sim j$ bila $\phi^n(i) = j$ untuk beberapa $n \in \mathbb{Z}$. Jadi $1 \sim 3$ sebab $\phi^2(1) = 3$ dan $4 \sim 6$ sebab $\phi^3(4) = 6$. Klas ekivalennya adalah

$$\{1, 7, 3\},\ \{2, 9\} \text{ dan } \{4, 8, 5, 6\}.$$

Teorema 2.4.2 Diberikan permutasi $\phi \in S_n$, maka ϕ menentukan suatu ralasi klas ekivalen pada himpunan $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ yang didefinisikan oleh kondisi untuk $r, s \in A$, $r \sim s$ bila dan hanya bila $s = \phi^i(r)$ untuk beberapa $i \in \mathbb{Z}$.

Bukti
(Refkesif) $r \sim r$ sebab $r = \phi^0(r)$.
(Simetri) Bila $r \sim s$, didapat $s = \phi^i(r)$ untuk beberapa $i \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian $r = \phi^{-i}(s)$, dimana $-i \in \mathbb{Z}$. Jadi $s \sim r$.
(Transitif) Bila $r \sim s$ dan $s \sim t$, maka $s = \phi^i(r)$ dan $t = \phi^j(s)$ untuk beberapa $i, j \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian, $t = \phi^j(s) = \phi^j(\phi^i(r)) = \phi^{j+i}(r)$ dimana $j + i \in \mathbb{Z}$. Jadi $r \sim t$.

Definisi 2.4.4 Diberikan $\phi \in S_n$, klas ekivalen dalam $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ yang ditentukan oleh ϕ dinamakan **orbit** dari ϕ.

Definisi 2.4.5 Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan **sikel** bila permutasi ini setidaknya adalah satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen. **Panjang** dari sikel adalah banyaknya elemen yang paling besar pada orbit-orbitnya. Suatu sikel dengan panjang k juga dinamakan **sikel**-k dan dapat ditulis $(a_1\ a_2 \ldots a_k)$, dimana untuk semua i, a_i adalah elemen dari orbit terbesar dan

$$a_2 = \sigma(a_1),\ a_3 = \sigma^2(a_1) = \sigma(a_2), \ldots, a_k = \sigma^{k-1}(a_1) = \sigma(a_{k-1}), a_1 = \sigma^k(a_1) = \sigma(a_k).$$

Dua sikel **saling asing** bila himpunan orbitnya saling asing.

Contoh 2.4.8 Semua sikel-3 dalam S_4 adalah

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 3\ 2) & (1\ 2\ 4) & (1\ 4\ 2) \\ (1\ 3\ 4) & (1\ 4\ 3) & (2\ 3\ 4) & (2\ 4\ 3). \end{array}$$

Catatan, sikel yang sama dapat ditulis lebih dari satu cara, misalnya (1 2 3) = (2 3 1) = (3 1 2).

Teorema 2.4.3 Setiap permutasi $\phi \in S_n$ dapat ditulis sebagai produk dari sikel-sikel yang saling asing.

Bukti Misalkan orbit dari ϕ adalah $O_1, O_2, \ldots, O_s$. Untuk masing-masing orbit O_i didefinisikan sikel yang sesuai σ_i sebagai berikut:

$$\sigma_i(a) = \begin{cases} \phi(a), & \text{bila } a \in O_i \\ a, & \text{bila } a \notin O_i. \end{cases}$$

Sikel-sikel adalah saling asing sebab orbit O_i adalah klas ekivalen dengan demikian σ_i adalah sikel yang saling asing. Selanjutnya ditunjukan bahwa $\phi = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s$. Misalkan sebarang $a \in A$, bila $a \in O_i$, maka

$$\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s(a) = \sigma_i(a) = \phi(a),$$

dan bila $a \notin O_i$, maka $a \in O_{j_0}$ untuk suatu $j_0 \neq i$ dengan $1 \leq j_0 \leq s$, sehingga didapat

$$\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s(a) = \sigma_{j_0}(a) = \phi(a).$$

Jadi $\phi(a) = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s(a)$ untuk semua $a \in A$. Dengan demikian $\phi = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_s$. ✓

Contoh 2.4.9 Dalam S_6, diberikan sikel $\sigma = (1\ 3\ 5\ 4)$ dan $\tau = (1\ 5\ 6)$. Didapat

$$\tau\sigma = (1\ 5\ 6)(1\ 3\ 5\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$\sigma\tau = (1\ 3\ 5\ 4)(1\ 5\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.

Dalam Contoh 2.4.9 menunujukkan bahwa produk dari dua sikel tidak komutatif. Sifat berikut ini memberikan suatu kondisi bahwa produk dua sikel adalah komutatif.

Proposisi 2.4.2 Misalkan σ_1 dan σ_2 adalah dua sikel yang saling asing di S_n. Maka $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Bukti Misalkan O_1 dan O_2 masing-masing adalah orbit dari sikel σ_1 dan σ_2 yang saling asing. Catatan, untuk $i = 1$ atau $i = 2$, didapat $\sigma_i(a) \in O_i$ bila $a \in O_i$ dan $\sigma_i(a) = a$ bila $a \notin O_i$. Oleh karena itu, bila $b \in O_1$, maka $\sigma_1\sigma_2(b) = \sigma_1(\sigma_2(b)) = \sigma_1(b)$ dan $\sigma_2\sigma_1(b) = \sigma_2(\sigma_1(b)) = \sigma_1(b)$. Selanjutnya bila $b \notin O_1$ ini berarti $b \in O_2$, didapat $\sigma_1\sigma_2(b) = \sigma_1(\sigma_2(b)) = \sigma_2(b)$ dan $\sigma_2\sigma_1(b) = \sigma_2(\sigma_1(b)) = \sigma_2(b)$. Dengan demikian

$$\sigma_1\sigma_2(b) = \sigma_2\sigma_1(b),\ \forall b \in O_1 \cup O_2.$$

Jadi $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. ✓

Proposisi yang baru saja dibahas dapat digunakan untuk menghitung order permutasi.

Contoh 2.4.10 Dalam S_{10}, diberikan permutasi

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 10 & 7 & 2 & 9 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalam notasi sikel didapat

$$\phi = (1\ 8\ 3\ 10)\ (2\ 6\ 9\ 4\ 7\ 5).$$

Order dari (1 8 3 10) adalah 4 dan order dari (2 6 9 4 7 5) adalah 6. Karena dua permutasi tersebut saling asing, maka komutatif, jadi $|\phi| = \text{kpk}(4, 6) = 12$. ●

Contoh 2.4.11 Elemen dari D_4 grup simetri dari segi empat beraturan dapat direpresentasikan sebagai permutasidalam S_4 dengan melabel empat titik sudut pada persegi: $1, 2, 3, 4$ sebagaimana dalam Contoh 2.1.6. Didapat

$$\begin{array}{ll} \rho_0 = \text{identitas} & \tau = (1\ 2)(3\ 4) \\ \rho = (1\ 2\ 3\ 4) & \rho\tau = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3) \\ \rho^2 = (1\ 3)(2\ 4) & \rho^2\tau = (1\ 3)(2\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 4)(2\ 3) \\ \rho^3 = (1\ 4\ 3\ 2) & \rho^3\tau = (1\ 4\ 3\ 2)(1\ 2)(3\ 4) = (2\ 4). \end{array}$$ ●

Contoh 2.4.12 Untuk menghitung produk $\phi = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$, dilakukan sebagai berikut: Dimulai dari permutasi (1 2) yang mengubah 1 menjadi 2, sedangkan (1 3) dan (1 4) tidak mengubah 2, jadi $\phi(1) = 2$. Kemudian, $(1, 2)$ mengubah 2 menjadi 1 sedangkan $(1, 3)$ mengubah 1 menjadi 3 dan (1 4) tidak mengubah 3, jadi $\phi(2) = 3$. Berikutnya, (1 2) tidak mengubah 3, (1 3) mengubah 3 menjadi 1 dan (1 4) mengubah 1 menjadi 4, jadi $\phi(3) = 1$. Terakhir, (1 2) tidak mengubah 4, (1 3) juga tidak mengubah 4, sedangkan (1 4) mengubah 4 menjadi 1, jadi $\phi(4) = 1$. Dengan demikian didapat

$$\phi = (1\ 4)\ (1\ 3)\ (1\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4).$$ ●

Teorema 2.4.4 Setiap sikel dapat ditulis sebagai produk dari sikel-2.

Bukti Suatu cara yang sama sebagaimana telah dikerjakan dalam Contoh 2.4.12, secara umum didapat

$$(a_1\ a_2\ a_3 \cdots\ a_n) = (a_1\ a_n)(a_1\ a_{n-1}) \cdots\ (a_1\ a_3)(a_1\ a_2).$$

Proposisi 2.4.3 Setiap permutasi dapat ditulis sebagai produk dari sikel-2.

Bukti Pertama, tulis sebarang permutasi sebagai produk dari sikel yang saling asing (berdasarkan Teorema 2.4.3). Selanjutnya pada sikel-sikel yang terbentuk gunakan Teorema 2.4.4 didapat semua sikel yang terbentuk dapat ditulis sebagai produk dari sikel-2. Dengan demikian sebarang permutasi dapat ditulis sebagai produk dari sikel-2.

Contoh 2.4.13 Umumnya, suatu permutasi dapat ditulis sebagai prduk dari sikel-2 dalam beberapa cara. Misalnya, dalam S_6 permutasi identitas dapat ditulis sebagai (1 2)(1 2) dan juga sebagai (1 2)(3 4)(1 2)(3 4) dan sebagainya. Permutasi (1 2 3) dapat ditulis sebagai (1 3)(1 2) tetapi dapat juga sebagai (3 4)(1 2) atau sebagai (4 5)(1 3)(4 5)(1 2). Permutasi (1 2 3 4) dapat ditulis sebagai (1 4)(1 3)(1 2) juga dapat ditulis sebagai (5 6)(1 4)(1 3)(5 6)(1 2). Catatan, apapun penyajian penulisan pada semua penulisan produk dari sikel-2 dengan cara yang berbeda tersebut semuanya berkaitan dengan banyaknya sikel-2 yang terbentuk genap atau ganjil.

Contoh 2.4.14 Misalkan n bilangan bulat positip. Untuk sebarang barisan berhingga dari bilangan bulat

$$s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

didefinisikan

$$p(s) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)$$

dan untuk sebarang $\tau \in S_n$, misalkan $\tau s = (a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \cdots, a_{\tau(n)})$. Misalnya untuk $n = 6$ dan $s = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, didapat

$$\begin{array}{rcl} p(s) & = & (1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6) \\ & & (3-4)(3-5)(3-6)(4-5)(4-6)(5-6), \end{array}$$

bila $\tau = (2\ 5)$, maka $\tau s = (1, 5, 3, 4, 2, 6)$. Dengan demikian

$$\begin{array}{rcl} p(\tau s) & = & (1-5)(1-3)(1-4)(1-2)(1-6)(\underline{5-3})(\underline{5-4})(\underline{5-2})(5-6) \\ & & (3-4)(\underline{3-2})(3-6)(\underline{4-2})(4-6)(2-6), \end{array}$$

dimana suku-suku yang digaris bawahi mempunyai tanda yang berubah. Suku-suku ini adalah $(2-5)$, suku-suku $(2-j)$ untuk $2 < j < 5$ dan suku-suku $(i-5)$ untuk $2 < i < 5$. Catatan ada lima suku-suku tersebut Jadi tampa melakukan proses perkalian yang panjang terlihat bahwa $p(\tau s) = (-1)^5 p(s) = -p(s)$.

Teorema 2.4.5 Dengan notasi sebagaimana baru saja dibahas, untuk sebarang bilangan bulat positip n, sebarang barisan bilangan bulat $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan sebarang sikel-2 $\tau \in S_n$, maka $p(\tau s) = -p(s)$.

Bukti Misalkan $\tau = (k\ l)$, dimana $k < l$ dan misalkan dibandingkan produk dari $p(s)$ dan $p(\tau s)$. Dibedakan lima kasus:

(1) Bila $i < k$, maka untuk sebarang j dengan $i < j$, didapat $i = \tau(i)$ dan $i < \tau(j)$, juga suku $(a_i - a_{\tau(j)})$ adalah suatu faktor dari $p(\tau s)$ dan $p(s)$.

(2) Bila $l < j$, maka untuk sebarang i dengan $i < j$, dengan argumen yang sama suku $(a_{\tau(i)} - a_j)$ adalah suatu faktor dari $p(\tau s)$ dan $p(s)$.

(3) Bila $i = k$, maka untuk sebarang j dengan $k < j < l$ didapat $j = \tau(j)$ dan $(a_{\tau(k)} - a_{\tau(j)}) = (a_l - a_j) = -(a_j - a_l)$. Jadi suku $(a_j - a_l)$ di $p(s)$ berubah tanda di $p(\tau s)$. Dalam kasus ini, ada sebanyak $(l - k - 1)$ suku yang berubah.

(4) Bila $j = l$, maka untuk sebarang i dengan $k < i < l$, dengan argumen yang sama seperti yang dilakukan di (3), suku $(a_l - a_k)$ di $p(s)$ berubah tanda di $p(\tau s)$. Ada sebanyak $(l - k - 1)$ perubahan tanda.

(5) Terakhir, $(a_{\tau(k)} - a_{\tau(l)}) = (a_l - a_k) = -(a_k - a_l)$, terlihat bahwa suku $(a_k - a_l)$ di $p(s)$ mengalami perubahan tanda di $p(\tau s)$.

Dari lima kasus yang telah dibahas total perubahan tanda yang terjadi dari $p(s)$ menjadi $p(\tau s)$ adalah $2(l - k - 1) + 1$ yang merupakan bilangan bulat ganjil, dengan demikian didapat $p(\tau s) = -p(s)$. ✓

Teorema 2.4.6 Tidak ada permutasi di S_n dapat ditulis sebagai produk dari sikel-2 sebanyak bilangan bulat genap dan sekaligus produk dari sikel-2 sebanyak bilangan bulat ganjil.

Bukti Menggunakan notasi yang sama sebagaimana dalam pembahasan Teorema 2.4.5, misalkan τ dan ρ dua sikel-2 di S_n. Maka untuk sebarang barisan $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ didapat

$$\begin{aligned}
(\rho\tau)s &= (a_{\rho\tau(1)}, a_{\rho\tau(2)}, \ldots, a_{\rho\tau(n)}) \\
&= (a_{\rho(\tau(1))}, a_{\rho(\tau(2))}, \ldots, a_{\rho(\tau(n))}) \\
&= \rho(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, \ldots, a_{\tau(n)}) \\
&= \rho(\tau s),
\end{aligned}$$

dengan demikian didapat

$$p((\rho\tau)s) = p(\rho(\tau s)) = -1\, p(\tau s) = (-1)^2 p(s).$$

Dengan cara yang sama, diberikan sebarang permutasi $\phi \in S_n$, bila ϕ adalah produk dari sikel-2 sebanyak k, maka $p(\phi s) = (-1)^k p(s)$. Dengan demikian diberikan sebarang $\phi \in S_n$, maka k salah satu dari dari hal yang berikut: k selalu genap atau k selalu ganjil dan tidak mungkin terjadi kedua-duanya untuk segala cara penulisan ϕ sebagai suatu produk dari sikel-2.

Definisi 2.4.6 Suatu permutasi $\phi \in S_n$ dinamakan permutasi **genap** bila ϕ dapat dituliskan sebagai produk dari sikel-2 sebanyak bilangan bulat genap dan dinamakan permutasi **ganjil** bila ϕ dapat dituliskan sebagai produk dari sikel-2 sebanyak bilangan bulat ganjil.

Proposisi 2.4.3 menjamin bahwa sebarang permutasi dapat dikelompokkan sebagai permutasi genap atau ganjil. Sedangkan Teorema 2.4.6 menyatakan bahwa sebarang permutasi adalah genap atau ganjil tidak bisa terjadi dua-duanya.

Contoh 2.4.15 Dalam S_9, diberikan permutasi

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 7 & 8 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Permutasi ϕ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \phi &= (1\,9\,3)(2\,5\,8\,4\,7\,6) \\ &= (1\,3)(1\,9)(2\,6)(2\,7)(2\,4)(2\,8)(2\,5). \end{aligned}$$

Terlihat bahwa ϕ bisa disajikan oleh produk sikel-2 sebanyak 7, dengan demikian ϕ adalah permutasi ganjil. Menggunakan fakta dalam sebarang grup, maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, didapat

$$\begin{aligned} \phi^{-1} &= (2\,5)(2\,8)(2\,7)(2\,6)(1\,9)(1\,3) \\ &= (2\,6\,7\,4\,8\,5)(1\,3\,9) \\ &= (1\,3\,9)(2\,6\,7\,4\,8\,5). \end{aligned}$$

Catatan bahwa, ϕ^{-1} juga permutasi ganjil.

Teorema 2.4.7 Misalkan A_n adalah himpunan semua permutasi genap di S_n. Maka A_n adalah subgrup dari S_n dalam hal ini A_n dinamakan **grup alternating** derajad n.

Bukti Menggunakan Teorema 2.2.2 cukup dibuktikan tertutup dan eksistensi invers. (**Tertutup**) Bila $\phi, \rho \in A_n$, maka ϕ dan ρ masing-masing dapat dituliskan sebagai produk dari sikel-2 sebanyak bilangan genap $2r$ dan $2s$. Dengan demikian $\phi\rho$ dapat dituliskan sebagai produk dari sikel-2 sebanyak $2r + 2s = \underbrace{2(r+s)}_{\text{genap}}$. Jadi $\phi\rho \in A_n$. (**Invers**) Bila $\phi \in A_n$, maka ϕ dapat dituliskan sebagai produk sikel-2:

$$\phi = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2r},\ 2r \text{ adalah genap},$$

didapat

$$\begin{aligned}\phi^{-1} &= (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2r})^{-1}\\ &= (\sigma_{2r})^{-1}\cdots(\sigma_2)^{-1}(\sigma_1)^{-1}\\ &= \sigma_{2r}\cdots\sigma_2\sigma_1.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\phi^{-1} \in A_n$.

Contoh 2.4.16 Dalam S_3, dimana $|S_3| = 3! = 6$, himpunan permutasi genap adalah

$$A_3 = \{\rho_0 = \text{elemen identitas}, \rho = (1\ 2\ 3), \rho^2 = (1\ 3\ 2)\}.$$

Terlihat ada tepat sebanyak 3 pemutasi genap, jadi banyaknya permutasi ganjil dalam S_3 adalah $6 - 3 = 3$. Selanjutnya dalam S_4 dimana $|S_4| = 4! = 24$. Bila elemen di A_4 ditulis sebagai produk sikel-sikel yang saling asing, didapat tiga permutasi yang yang mengubah semua elemen, yaitu

$$\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4) \qquad \sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4) \qquad \sigma_3 = (1\ 4)(2\ 3).$$

Untuk i dengan $1 \le i \le 4$ ada dua permutasi di A_4 yang membuat i tetap. Sehingga ada delapan permutasi di A_4 yang membuat tepat satu elemen tidak berubah (tetap) yaitu

$$\begin{array}{lll}\rho_1 = (2\ 3\ 4) & \rho_1^2 = (2\ 4\ 3) & 1 \text{ tetap}\\ \rho_2 = (1\ 3\ 4) & \rho_2^2 = (1\ 4\ 3) & 2 \text{ tetap}\\ \rho_3 = (1\ 2\ 4) & \rho_3^2 = (1\ 4\ 2) & 3 \text{ tetap}\\ \rho_4 = (1\ 2\ 3) & \rho_4^2 = (1\ 3\ 2) & 4 \text{ tetap.}\end{array}$$

Dalam A_4 tidak ada permutasi yang membuat tetap dua elemen, elemen-elemen ini adalah sikel-2 yang tidak di A_4. Satu lagi elemen di A_4 adalah elemen identitas. Jadi ada dua belas elemen di A_4:

$$A_4 = \{\rho_0 = \text{elemen identiats}, \rho_1, \rho_1^2, \rho_2, \rho_2^2, \rho_3, \rho_3^2, \rho_4, \rho_4^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}.$$

Pada pembahasan A_3 dalam S_3 dan A_4 dalam S_4 tepat separuh dari permutasinya adalah permutasi genap. Hal ini berlaku secara umum untuk S_n dengan $n \ge 3$.

Teorema 2.4.8 Order dari grup alternating derajad n dengan $n \ge 3$ adalah

$$|A_n| = |S_n|/2 = n!/2.$$

Bukti Misalkan O_n adalah himpunan semua permutasi ganjil di S_n. Karena setiap permuatasi di S_n adalah salah satu diantara berikut yaitu berada di A_n atau berada di O_n tetapi tidak di keduanya. Dengan demikian

$$n! = |S_n| = |A_n| + |O_n|.$$

Jadi untuk membuktikan teorema cukup dibuktikan $|A_n| = |O_n|$. Untuk hal ini dibuat suatu pementaan $\gamma : A_n \to O_n$, dengan aturan $\gamma(\phi) = \phi(1\ 2)$, $\forall \phi \in A_n$. Selanjutnya dibuktikan γ adalah satu-satu dan pada. Pemetaan γ adalah satu-satu, sebab bila $\gamma(\phi) = \gamma(\psi)$ didapat $\phi(1\ 2) = \psi(1\ 2)$ hal ini berakibat bahwa

$$\phi = \phi(1\ 2)(1\ 2) = \psi(1\ 2)(1\ 2) = \psi.$$

Terlihat bahwa γ adalah satu-satu. Tinggal menunjukkan γ adalah pada sebagai berikut. Karena sebarang $\tau \in O_n$ adalah permutasi ganjil, maka $\tau(1\ 2) \in A_n$ adalah permuatsi genap yang memenuhi $\gamma(\tau(1\ 2)) = \tau(1\ 2)(1\ 2) = \tau$.

Contoh 2.4.17 Sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 2.1.6 D_4 adalah subgrup dari S_4. Dengan cara yang sama, D_5 adalah subgrup dari S_5, elemen-elemen dari D_5 adalah:

$$\begin{array}{ll}
\rho_0 = \text{identitas} & \tau = (1\ 5)(3\ 4) \\
\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) & \rho\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 5)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 5) \\
\rho^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4) & \rho^2\tau = (1\ 3)(4\ 5) \\
\rho^3 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3) & \rho^3\tau = (1\ 4)(2\ 3) \\
\rho^4 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2) & \rho^4\tau = (1\ 5)(2\ 4).
\end{array}$$

Terlihat semua elemen di D_5 adalah permutasi genap dalam S_5. Jadi D_5 adalah subgrup dari A_5.

Latihan

Latihan 2.4.1 Tentukan mana fungsi berikut yang merupakan permutasi atau tidak. Jelaskan jawaban saudara.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimana $f(x) = 3x + \sqrt{2}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimana $f(x) = 3x^2 + 2$
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $f(x) = |x|$
4. $f : \mathbb{U}(5) \to \mathbb{U}(5)$, dimana $f(x) = x^{-1}$
5. $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, dimana $f(x) = x + 3$.

Latihan 2.4.2 Dapatkan semua orbit dari permutasi berikut.

1. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 9 & 4 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\tau(x) = x + 5$
4. $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\tau(x) = x - 3$.

Latihan 2.4.3 Misalkan

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hitung:
(a) $\phi\tau$ dan $\tau\phi$ (b) $\phi^2\tau$ dan $\phi\tau^2$
(c) ϕ^{-1} dan τ^{-1} (d) $|\phi|$ dan $|\tau|$.

Latihan 2.4.4 Ungkapkan permutasi berikut sebagai suatu produk dari sikel yang saling asing dan hitung ordernya.

1. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 2 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Latihan 2.4.5 Tunjukkan bahwa permutasi sikel-n mempunyai order n.

Latihan 2.4.6 Tunjukkan bahwa bila ρ dan σ di S_n adalah sikel-sikel yang saling asing dan $\phi = \rho\sigma$, maka $|\phi| = \text{kpk}(|\rho|, |\sigma|)$.

Latihan 2.4.7 Tunjukkan bahwa permutasi sikel-m adalah suatu permutasi genap bila dan hanya bila m adalah ganjil.

Latihan 2.4.8 Tunjukkan bahwa himpunan semua permuatsi ganjil dalam S_n bukan suatu subgrup dari S_n.

Latihan 2.4.9 Dapatkan order terbesar dari elemen-elemen dalam grup:
1. S_4, 2. S_5 3. S_6 4. S_7 5. A_5 6. A_6 7. A_7.

Latihan 2.4.10 Tunjukkan bahwa sebarang subgrup H dari grup S_n adalah salah satu dari hal yang berikut: setiap elemen dari H adalah suatu permutasi genap atau bila tidak $H = A_n$.

Latihan 2.4.11 Buat tabel hasil operasi dalam grup A_4.

Latihan 2.4.12 Misalkan $H = \{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(2) = 2\}$.
(a) Tunjukkan bahwa H adalah subgrup dari S_4.
(b) Berapakah $|H|$?
(c) Dapatkan semua permutasi genap dalam H.

Latihan 2.4.13 Misalkan $n \geq 3$, $i \leq 3$ dan $H = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) = i\}$.
(a) Tunjukkan bahwa H adalah subgrup dari S_n.
(b) Berapakah $|H|$?
(c) Dapatkan semua permutasi genap dalam H.

Latihan 2.4.14 Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 3$ grup S_n adalah takkomutatif.

Latihan 2.4.15 Dapatkan semua elemen yang berorder 2 dalam S_4.

Latihan 2.4.16 Tunjukkan bahwa bila $\sigma \in S_n$ dan $|\sigma| = 2$, maka σ adalah suatu produk dari sikel-2 yang saling asing. ✓

Latihan 2.4.17 Tunjukkan bahwa bila $\sigma \in S_n$, maka σ dapat dituliskan sebagai suatu produk dari sikel-3. ✓

Latihan 2.4.18 Tunjukkan bahwa bila $\sigma \in S_n$, maka σ dapat dituliskan sebagai suatu produk dari sikel-3 $(1\ 2\ s)$ dimana $s = 3, 4, \ldots, n$. ✓

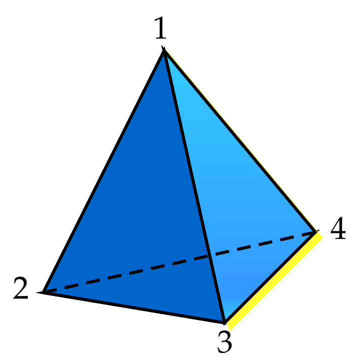
Latihan 2.4.19 Tunjukkan bahwa setiap permutasi $\rho \in S_n$ dapat dituliskan sebagai suatu produk sikel-2 berbentuk $(i\ i+1)$ dimana $1 \leq i \leq n$. ✓

Latihan 2.4.20 Tunjukkan bahwa setiap permutasi $\phi \in S_n$ dapat dituliskan sebagai suatu produk dari pangkat $\rho = (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$ dan $\phi = (1\ 2)$. ✓

Latihan 2.4.21 Tunjukkan bahwa bila $m \leq n$, maka banyaknya sikel-m $(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots a_m)$ dalam S_n adalah

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)/m.$$ ✓

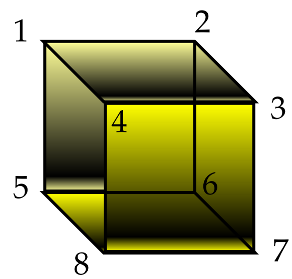
Latihan 2.4.22 Diberikan gambar tetrahedon teratur berikut.



Gambar 2.7: Tetrahedron

(a) Dapatkan semua rotasi yang mugkin dari tetrahedron teratur.
(b) Dapatkan semua rotasi dari tetrahedron teratur yang membentuk grup. ✓

Latihan 2.4.23 Diberikan gambar kubus berikut.



Gambar 2.8: Kubus

Dapatkan suatu grup yang elemen-elemennya berkaitan dengan rotasi dari kubus.

Bab 3

Homomorpisma Grup

Pada pembahasan sebelumnya telah diberikan pengertian dari grup dan sifat-sifatnya dan dibahas berbagai macam grup yang berbeda dan subgrupnya. Pada bab ini dikenalkan empat pengertian dasar baru kesemuanya mempunyai keterkaitan yang erat. Pertama ditunjukkan bagaimana suatu subgrup menentukan suatu relasi ekivalen pada elemen-elemen grup. Oleh karena itu mempartisi grup kedalam klas ekivalen yang dinamakan *koset* dari subgrup. Partisi ini digunakan untuk memberikan suatu bukti yang sederhana dan elok pada teorema Lagrange merupakan hasil yang sangat dasar dalam teori grup. Kedua dikenalkan suatu pemetaan tertentu dikenakan pada grup yang dinamakan *homomorpisma*. Ketiga, ditunjukkan bagaimana pengertian suatu homomorpisma menimbulkan suatu gagasan subgrup khusus yang dinamakan *subgrup normal*. Keempat, image dari suatu grup oleh homomorpisma adalah suatu grup dengan struktur khusus. Selanjutnya ditunjukkan bahwa hal itu dapat dianggap sebagai suatu grup yang elemen-elemennya merupakan koset dari subgrup normal dari grup yang diberikan. Grup yang demikian dinamakan *grup kuasi/grup faktor*. Empat konsep baru: koset, homomorpisma, subgrup normal dan grup kuasi akan tampak alami setelah disadari betapa saling keterkaitannya.

3.1 Koset dan Teorema Lagrange

Sudah ditunjukkan bahwa dalam Teorema 2.3.4 bila G adalah suatu grup siklik berhingga dan H adalah suatu subgrup dari G, maka order H membagi order G. Pada bagian ini dibuktikan teorema Lagrange, yang menyatakan pernyataan dalam Teorema 2.3.4 berlaku untuk sebarang grup berhingga G. Untuk membuktikan hal ini, pertama ditunjukkan bagaimana suatu subgrup H menentukan suatu relasi ekivalen pada G. Kemudian ditunjukkan bahwa masing-masing klas ekivalen ini banyaknya elemen adalah sama dan sama dengan banyaknya elemen H. Dari sini terlihat bahwa banyaknya elemen-elemen di G adalah kelipatan dari banyaknya elemen-elemen di H. Dimulai dari contoh-contoh untuk memberikan gambaran bagaimana sebarang subgrup H dari sebarang grup G menentukan suatu relasi ekivalen pada G, bahkan hal ini tidak hanya pada grup berorder hingga.

Contoh 3.1.1 Dalam grup $\mathbb{Z}$, misalkan subgrup $3\mathbb{Z} = \langle 3\rangle$. Untuk bilangan bulat $a, b \in \mathbb{Z}$, relasi ekivalen $a \sim b$ berlaku bila $b - a \in 3\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, bila $a \equiv b \mod 3$. Maka tiga klas ekivalen adalah:
$3\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$, $1 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$,
dan $2 + 3\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$.

Contoh 3.1.2 Dalam grup $\mathbb{Z}_{15}$, misalkan subgrup $H = \langle [3]_{15}\rangle$. Maka H mempartisi $\mathbb{Z}_{15}$ sebagai berikut:
$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$, $[1]_{15} + H = \{[1]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [10]_{15}, [13]_{15}\}$,
dan $[2]_{15} + H = \{[2]_{15}, [5]_{15}, [8]_{15}, [11]_{15}, [14]_{15}\}$.
Lagi, dari apa yang dibahas ini secara langsung relasi ekivalen dapat diungkapkan sebagai $a \sim b$ bila $b - a \in H$.

Berikut ini dinyatakan bahwa suatu relasi ekivalen ditentukan oleh suatu subgrup H dari sebarang grup G.

Teorema 3.1.1 Misalkan G sebarang grup dan H adalah subgrup dari G. Maka

(1) Untuk $a, b \in G$, relasi yang didefinisikan oleh $a \sim b$ bila $a^{-1}b \in H$ adalah suatu relasi ekivalen pada G.

(2) Untuk sebarang $a \in G$, klas ekivalen dari a adalah $aH = \{ah \,|\, h \in H\}$.

Bukti

(1) (Refleksif) Untuk sebarang $a \in G$, karena H subgrup dari G didapat $e = a^{-1}a \in H$. Jadi $a \sim a$.
(Simetri) Untuk sebarang $a, b \in G$. Bila $a \sim b$, maka $a^{-1}b \in H$. Karena H subgrup dari G, maka $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$. Jadi $b \sim a$.
(Transitif) Untuk sebarang $a, b, c \in G$. Bila $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a^{-1}b \in H$ dan $b^{-1}c \in H$. Karena H subgrup dari G, didapat $a^{-1}c = (a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$. Jadi $a \sim c$.

(2) Untuk sebarang $a \in G$ klas ekivalen dari a memuat semua $x \in G$ yang memenuhi $a^{-1}x \in H$. Bila $x \sim a$, maka $x = a(a^{-1}x) = ah$ dimana $h = a^{-1}x \in H$. Sebaliknya, bila $x = ah$ untuk beberapa $h \in H$, maka $a^{-1}x = (a^{-1}a)h = h \in H$ hal ini menunjukkan bahwa $x \sim a$.

Definisi 3.1.1 Misalkan G adalah suatu grup, H adalah suatu subgrup dari G dan sebarang $a \in G$ tetapi tetap. Maka himpunan $aH = \{ah \,|\, h \in H\}$ dinamakan **koset kiri** dari H dalam grup G dan himpunan $Ha = \{ha \,|\, h \in H\}$ dinamakan **koset kanan** dari H dalam grup G.

Contoh 3.1.3 Dalam $S_3 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ dan $H = \langle \mu_1 \rangle$, maka koset kiri dari H adalah:

$$H = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad \rho H = \{\rho, \rho\mu_1 = \mu_3\} \quad \text{dan} \quad \rho^2 H = \{\rho^2, \rho^2\mu_1 = \mu_2\}.$$

Sedangkan koset kanan dari H adalah:

$$H = \{\rho_0, \mu_1\}, \quad H\rho = \{\rho, \mu_1\rho = \mu_2\} \quad \text{dan} \quad H\rho^2 = \{\rho^2, \mu_1\rho^2 = \mu_3\}.$$

Perlu diperhatikan bahwa dua relasi ekivalen yang ditentukan oleh $H = \langle \mu_1 \rangle$ memberikan dua partisi yang berbeda. ●

Dalam suatu grup komutatif G, karena semua elemen di G komutatif, maka koset kiri dan kanan dari suatu subgrup adalah sama.

Contoh 3.1.4 Dalam $\mathbb{Z}$ perhatikan bahwa subgrup $3\mathbb{Z} \supseteq 6\mathbb{Z}$. Koset dari $6\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$ adalah

$$6\mathbb{Z},\ 1 + 6\mathbb{Z},\ 3 + 6\mathbb{Z},\ 4 + 6\mathbb{Z},\ 5 + 6\mathbb{Z}.$$

Sedangkan koset dari $6\mathbb{Z}$ dalam $3\mathbb{Z}$ adalah $6\mathbb{Z}$ dan $3 + 6\mathbb{Z}$. ●

Teorema berikut memperlihatkan bahwa koset kiri dari suatu subgrup H dalam grup G mempartisi G menjadi klas-klas yang saling asing.

Teorema 3.1.2 Untuk setiap dua elemen a dan b di grup G dan $H < G$, maka

1. Bila $a \sim b$, maka $aH = bH$ $(Ha = Hb)$.
2. Bila $a \nsim b$, maka $aH \cap bH = \emptyset$ $(Ha \cap Hb = \emptyset)$.
3. $aH = bH$ bila dan hanya bila $a^{-1}b \in H$ $(ab^{-1} \in H)$.

Bukti

1. Misalkan $a \sim b$, maka $a^{-1}b = h_0$ untuk suatu $h_0 \in H$, didapat $b = ah_0$ atau $a = bh_0^{-1}$. Misalkan sebarang $ah \in aH$, didapat $ah = h(bh_0^{-1})h = b(hh_0) \in bH$. Jadi $aH \subset bH$. Misalkan sebarang $bh \in bH$, maka $bh = (ah_0)h = a(hh_0) \in aH$. Jadi $bH \subset aH$. Maka dari itu, didapat $aH = bH$.

2. Misalkan $a \nsim b$ dan andaikan $g \in aH \cap bH$, maka $g = ah_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $g = bh_2$ untuk suatu $h_2 \in H$. Jadi $a^{-1} = h_1 g^{-1}$ dan $b = gh_2^{-1}$. Didapat

   $$a^{-1}b = (h_1 g^{-1})(gh_2^{-1}) = h_1(g^{-1}g)h_2^{-1} = h_1 e h_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} \in H \quad (\text{sebab } H < G).$$

   Terlihat bahwa $a \sim b$, kontradiksi dengan kenyataan bahwa $a \nsim b$. Dengan demikian haruslah $aH \cap bH = \emptyset$.

3. Misalkan $a^{-1}b \in H$, hal ini berarti bahwa $a \sim b$. Akibatnya menurut hasil 1. didapat $aH = bH$. Sebaliknya misalkan $aH = bH$. Karena $b \in bH$, maka $b \in aH$. Jadi $b = ah$ untuk beberapa $h \in h$ atau $a^{-1}b = h \in H$. ✓

Teorema berikut menjelaskan bahwa banyaknya elemen sebarang koset dalam satu koset dengan koset yang lainnya adalah sama.

Teorema 3.1.3 Misalkan G adalah grup dan $H < G$. Maka untuk sebarang $a \in G$, $|H| = |aH| = |Ha|$.

Bukti Didefinisikan pemetaan $f : H \to aH$ oleh $f(h) \stackrel{\text{def}}{=} ah,\ \forall h \in H$. Pemetaan f adalah satu-satu, sebab bila $f(h) = f(h_1)$ atau $ah = ah_1$, maka $h = h_1$. Pemetaan f adalah pada, sebab bila diberikan sebarang $ah \in aH$, maka dapat dipilih $h \in H$ sehingga $f(h) = ah$. Jadi pemetaan f adalah satu-satu pada, maka dari itu $|H| = |aH|$. Dengan cara yang sama bila didifisikan pemetaan $g : H \to Ha$ oleh $g(h) \stackrel{\text{def}}{=} ha,\ \forall h \in H$. Maka pemetaan g adalah satu-satu, sebab bila $g(h) = g(h_1)$ atau $ha = h_1a$, maka $h = h_1$. Pemetaan g adalah pada, sebab bila diberikan sebarang $ha \in Ha$, maka dapat dipilih $h \in H$ sehingga $g(h) = ha$. Jadi pemetaan g adalah satu-satu pada, maka dari itu $|H| = |Ha|$. ✓

Teori-teori yang telah dibahas digunakan untuk membuktikan teorema Lagrange, sebagaimana berikut.

Teorema 3.1.4 (**Teorema Lagrange**) Misalkan G grup berhingga dan $H < G$. Maka

(1) $|H|$ membagi $|G|$.

(2) Banyak nya koset yang berbeda dari H sama dengan $|G|/|H|$.

Bukti Menggunakan Teorema 3.1.2 didapat koset kiri kiri dari H mempartisi G menjadi klas-klas yang saling asing. Misalkan

$$a_1H, a_2H, \ldots, a_sH$$

adalah semua koset kiri dari H yang saling asing dalam G, maka didapat

$$|G| = \overbrace{|a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_sH|}^{s},$$

dan dari Teorema 3.1.3 didapat $|a_iH| = |H|$ untuk semua $a_i \in G$. Jadi $|G| = s \cdot |H|$ dan $s = |G|/|H$ adalah banyaknya koset kiri dari H yang berbeda dalam G. ✓

Catatan bahwa, jugah sudah dibuktikan bahwa $|aH| = |Ha| = |H|$. Dengan demikian, $|G|/|H|$ juga adalah banyaknya koset kanan yang berbeda dari H dalam G. Berikut ini diberikan nama untuk banyaknya koset yang berbeda dari H dalam G.

Definisi 3.1.2 Misalkan G adalah suatu grup dan $H < G$. Maka banyaknya koset kiri dari H dalam G dinamakan **indeks** dari H dalam G dan dinotasikan oleh $\text{indeks}_G(H)$ atau $[G : H]$. ✓

Mengingat Definisi 3.1.2, maka dua pernyataan dalam Teorema 3.1.4 dapat dikombinasikan dalam formulasi $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

Contoh 3.1.5 Misalkan H adalah subgrup dari grup G dengan $|G| = 10$, maka menurut teorema Lagrange didapat $|H| = 1, 2, 5$ atau 10. Misalnya, bila

$$G = D_5 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau, \rho^4\tau\}$$

sebagaimana dalam Contoh 2.4.17, maka

$$\left|\langle\rho_0\rangle\right| = 1,\ \left|\left\langle\rho^i\right\rangle\right| = 5,\ |\langle\tau\rangle| = \left|\left\langle\rho^i\tau\right\rangle\right| = 2,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq 4$$

dan $|D_5| = 10$. ●

Contoh 3.1.6 Grup simetri S_3 dapat dilihat sebagai suatu subgrup dari grup simetri S_4 dimana $S_3 = \{\phi \in S_4 \,|\, \phi(4) = 4\}$. Karena $|S_4| = 4! = 24$ dan $|S_3| = 3! = 6$, indeks $[S_4 : S_3] = 24/6 = 4$. Dengan demikian S_3 mempunyai empat koset dalam S_4. Untuk mendapatkan empat koset yang berbeda dari S_3, pertama dapatkan elemen $\phi \in S_4$ tetapi $\phi \notin S_3$, dengan kata lain $\phi(4) \neq 4$. Salah satu elemen ini adalah $\phi = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$. Karena $\phi \notin S_3$ dengan menggunakan Teorema 3.1.2 bagian (3) didapat $\phi S_3 \neq S_3$. Juga $\phi^2 = (1\ 3)(2\ 4) \notin S_3$ dan $\phi^{-1}\phi^2 \notin S_3$, gunakan lagi Teorema 3.1.2 bagian (3) didapat $\phi^2 S_3 \neq S_3$ dan $\phi^2 S_3 \neq \phi S_3$. Terakhir, $\phi^3 = (1\ 4\ 3\ 2) \notin S_3$, $\phi^{-1}\phi^3 \notin S_3$ dan $\phi^2\phi^3 \notin S_3$. Dengan demikian sekali lagi digunakan Teorema 3.1.2 bagian (3) didapat

$$S_3,\ \phi S_3,\ \phi^2 S_3\ \text{ dan }\ \phi^3 S_3$$

adalah empat koset yang berbeda dari S_3 dalam S_4. ●

Kesimpulan berikut adalah akibat langsung dari teorema Lagrange.

Kesimpulan 3.1.1 Dalam suatu grup berhingga G, order $|a|$ dari sebarang elemen a membagi order $|G|$ dari grup G.

Bukti Untuk sebarang elemen $a \in G$ dengan $|G|$ berhingga, misalkan $H = \langle a\rangle$. Maka H adalah suatu subgrup dari G dan menurut Kesimpulan 2.3.3 maka $|H| = |\langle a\rangle| = |a|$. Selanjutnya gunakan teorema Lagrange bagian (1) didapat $|H|$ membagi $|G|$. Dengan demikian $|a|$ membagi $|G|$. ✓

Kesimpulan berikut memberikan suatu hasil yang **sangat penting**.

Kesimpulan 3.1.2 Misalkan G adalah suatu grup berhingga dan sebarang elemen $a \in G$. Maka $a^{|G|} = e$, dimana e adalah elemen netral dari G.

Bukti Dari kesimpulan 3.1.1 didapat

$$a^{|G|} = a^{m\,|a|},\ \text{untuk beberapa } m \in \mathbb{Z}.$$

Gunakan Kesimpulan 2.3.1, didapat

$$a^{m\,|a|} = \left(a^{|a|}\right)^m = e^m = e. \quad ✓$$

Contoh 3.1.7 Misalkan G adalah grup berorder 7. Maka dengan menggunakan Teorema Lagrange G tidak mempunyai subgrup sejati tak-trivial. Sebab misalkan sebarang $a \in G$ dan $a \neq e$, maka $|a| \neq 1$. Jadi $|a| = 7$ dan $G = \langle a \rangle$ adalah siklik.

Teorema 3.1.5 Suatu grup yang berorder p dengan p adalah prima adalah grup siklik.

Bukti Misalkan grup G dengan $|G| = p$ dimana p adalah prima dan sebarang $a \in G$ dengan $a \neq e$. Maka $|a| \neq 1$, jadi $|a| = p = |G|$. Dengan demikian $G = \langle a \rangle$.

Contoh 3.1.8 Grup G taksiklik yang beroder $|G| < 7$ yang sudah dijumpai adalah dua macam:

(1) Grup yang berorder 4, misalnya adalah $\mathbb{U}(8)$, $\mathbb{U}(12)$ dan grup-4 Klein V sebagaimana diberikan dalam Contoh 2.1.20.

(2) Grup berorder 6, misalnya adalah S_3.

Pada bahasan akhir ini ditunjukkan suatu hasil terkenal dalam teori bilangan, yaitu Teorema Euler yang dapat diturukan dari Teorema Lagrange.

Teorema 3.1.6 Diberikan bilangan bulat $n \geq 2$ dan a dimana $\text{fpb}(a, n) = 1$. Maka $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Bukti Gunakan algoritma pembagian bilangan bulat didapat, $a = qn + r$, dimana $0 \leq r < n$. Karena $\text{fpb}(a, n) = 1$, maka $\text{fpb}(r, n) = 1$. Jadi $r \in \mathbb{U}(n)$. Karena $|\mathbb{U}(n)| = \phi(n)$ dan gunakan Kesimpulan 3.1.2 didapat $r^{\phi(n)} = 1$ di $\mathbb{U}(n)$. Dengan demikian $a^{\phi(n)} \equiv r^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Teorema 3.1.7 (**Teori Fermat Kecil**) Bila p adalah prima, maka untuk sebarang bilangan bulat a didapat $a^p \equiv a \mod p$.

Bukti Bila p membagi a, maka $a \equiv 0 \mod p$ dan jelas bahwa $a^p \equiv 0 \mod p$. Bila p tidak membagi a, maka $\text{fpb}(a, p) = 1$ dan gunakan Teorema 3.1.6 didapat $a^{\phi}(p) \equiv 1 \mod p$. Tetapi $\phi(p) = p - 1$. Dengan demikian didapat $a^{p-1} = a^{\phi(p)} \equiv 1 \mod p$. Jadi $a^p \equiv a \mod p$.

Contoh 3.1.9 Misalkan dihitung sisa pembagian dari 5^{148} oleh 7. Karena $5^6 \equiv 1 \mod 7$ dan $148 = 24 \cdot 6 + 4$ didapat

$$5^{148} = (5^6)^{24} \cdot 5^4 \equiv 1 \cdot 5^4 \mod 7 \equiv (-2)^4 \mod 7 \equiv 2 \mod 7.$$

Jadi sisa pembagian dari 5^{148} oleh 7 adalah 2.

Contoh 3.1.10 Misalkan akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilngan bulat n maka $n^{13} - n$ habis dibagi oleh 15. Untuk menunjukkan bahwa $15 = 3 \cdot 5$ membagi $n^{13} - n = n(n^{12} - 1)$ cukup ditunjukkan bahwa 3 dan 5 keduanya membagi $n(n^{12} - 1)$. Jelas bahwa bila 3 membagi n, maka 3 membagi $n(n^{12} - 1)$. Bila 3 tidak membagi n, maka $n^2 \equiv 1 \mod 3$, jadi $n^{12} - 1 = (n^2)^6 - 1 \equiv 0 \mod 3$. Terlihat bahwa 3 membagi $(n^{12} - 1)$. Dengan demikan 3 membagi $n(n^{12} - 1)$. Dengan cara yang sama didapat, bila 5 membagi n, maka 5 membagi $n(n^{12} - 1)$ dan bila 5 tidak membagi n, maka $n^4 \equiv 1 \mod 5$. Jadi, $n^{12} - 1 = (n^2)^6 - 1 \equiv 0 \mod 5$. Terlihat bahwa 5 membagi $n^{12} - 1$. Dengan demikian 5 membagi $n(n^{12} - 1)$. ●

Latihan

Latihan 3.1.1 Dapatkan semua koset dari subgrup $5\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$.

Latihan 3.1.2 Dapatkan semua koset dari $9\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$ dan dalam $3\mathbb{Z}$.

Latihan 3.1.3 Dapatkan semua koset dari $\langle 6 \rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$ dan semua koset dari $\langle 6 \rangle$ dalam subgrup $\langle 2 \rangle$ dari grup $\mathbb{Z}_{12}$.

Latihan 3.1.4 Dalam D_4 dapatkan semua koset kiri dan kanan dari $\langle \tau \rangle$.

Latihan 3.1.5 Dapatkan indeks dari $\langle 10 \rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$.

Latihan 3.1.6 Dapatkan indeks dari $\langle \mu_2 \rangle$ dalam S_3.

Latihan 3.1.7 Dapatkan indeks dari $\langle \rho^2 \tau \rangle$ dalam D_4.

Latihan 3.1.8 Misalkan $H = \{\phi \in S_n \,|\, \phi(n) = n\}$. Dapatkan indeks dari H dalam S_n.

Latihan 3.1.9 Misalkan H adalah subgrup dari grup G. Tunjukkan untuk sebarang $a \in G$ bahwa $aH = H$ bila dan hanya bila $a \in H$.

Latihan 3.1.10 Misalkan $H = 5\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$. Tentukan apakah koset dari H berikut adalah sama:

(a) $12 + H$ dan $27 + H$

(b) $13 + H$ dan $-2 + H$

(c) $126 + H$ dan $-1 + H$.

Latihan 3.1.11 Diberikan grup G berorder 42. Dapatkan semua order yang mungkin untuk subgrup H dari G. Untuk hal yang demikian tentukan banyaknya koset kiri dari H.

Latihan 3.1.12 Misalkan $G = \langle a \rangle$ adalah suatu grup siklik berorder 60 dan $H = \langle a^{35} \rangle$. Daftarkan semua koset kiri dari H dalam GG.

Latihan 3.1.13 Misalkan G adalah grup berorder 36. Bila G mempunyai suatu elemen $a \in G$ dimana $a^{12} \neq e$ dan $a^{18} \neq e$. Tunjukkan bahwa G adalah siklik.

Latihan 3.1.14 Misalkan grup G dengan $|G| < 300$. Bila G mempunyai suatu subgrup H berorder 24 dan suatu subgrup K berorder 54, berapakah order G?

Latihan 3.1.15 Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G dimana $|H| = 9$, $|K| = 12$ dan indeks $[G : H \cap K] \neq |G|$. Dapatkan $|H \cap K|$.

Latihan 3.1.16 Misalkan G grup dengan $|G| = p^2$, dimana p adalah prima. Tunjukkan bahwa sebarang subgrup sejati dari G adalah siklik.

Latihan 3.1.17 Diberikan grup G dengan $|G| = pq$ dimana p dan q adalah prima. Tunjukkan bahwa setiap subgrup sejati dari G adalah siklik.

Latihan 3.1.18 Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G dengan $|H| = n$, $|K| = m$ dan $\text{fpb}(m, n) = 1$. Tunjukkan bahwa $H \cap K = \{e\}$.

Latihan 3.1.19 Misalkan G adalah grup dan $a, b \in G$ dengan $|a| = n$, $|b| = m$ dan $\text{fpb}(m, n) = 1$. Bila untuk beberapa bilangan bulat k didapat $a^k = b^k$, tunjukkan bahwa mn membagi k. (Petunjuk gunakan Latihan 3.1.18).

Latihan 3.1.20 Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat n, bilangan $n^{19} - n$ habis dibagi oleh 21.

Latihan 3.1.21 Dapatkan sisa pembagian 9^{1573} oleh 11.

Latihan 3.1.22 Hitung $\phi(p^2)$, dimana p adalah prima.

Latihan 3.1.23 Hitung $\phi(pq)$, dimana p dan q adalah prima berbeda.

Latihan 3.1.24 Dapatkan sisa pembagian 5^{1258} oleh 12.

Latihan 3.1.25 Misalkan G adalah grup takkomutatif dimana $|G| = 2p$ dan p adalah prima. Tunjukkan bahwa ada suatu elemen $g \in G$ yang memenuhi $|g| = p$.

Latihan 3.1.26 Misalkan G adalah grup takkomutatif dimana $|G| = 2p$ dan p adalah prima. Tunjukkan bahwa G mempunyai sebanyak p elemen yang berorder 2.

Latihan 3.1.27 Misalkan G adalah suatu grup berorder $|G| > 1$ yang mana G tidak mempunyai subgrup sejati tak-trivial. Tunjukkan bahwa G adalah suatu grup siklik berhingga berorder prima.

Latihan 3.1.28 Misalkan G adalah grup beroder 15. Tunjukkan bahwa G memuat suatu elemen beroder 3.

Latihan 3.1.29 Misalkan H adalah suatu subgrup dari grup berhingga G dan K adalah suatu subgrup dari H. Misalkan indeks $[G : H] = n$ dan indeks $[H : K] = m$. Tunjukkan bahwa indeks $[G : K] = mn$. (Petunjuk: Misalkan $x_i H$ adalah koset-koset kiri yang berbeda dari H dalam G dan $y_j K$ adalah koset-koset kiri yang berbeda dari K dalam H. Tunjukkan bahwa $x_i y_j K$ adalah koset-koset kiriyang berbeda dari K dalam G).

Latihan 3.1.30 Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G dan untuk semua $a, b \in G$, $a \sim b$ bila dan hanya bila $a = hbk$ untuk beberapa $h \in H$ dan beberapa $k \in K$. Tunjukkan bahwa relasi $\sim$ adalah relasi ekivalen. Uraikan klas ekivalennya (klas ekivalen ini dinamakan **koset ganda**).

Latihan 3.1.31 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup berhingga G dengan indeks $[G : H] = n$ dan indeks $[G : K] = m$. Tunjukkan bahwa

$$\mathrm{kpk}(m, n) \leq [G : H \cap K] \leq mn.$$

Latihan 3.1.32 Diberikan H dan K adalah subgrup berhingga dari suatu grup G. Misalkan himpunan

$$HK = \{hk \,|\, h \in H, k \in K\}.$$

Tunjukkan bahwa $|HK| = |H|\,|K|/|H \cap K|$. (Petunjuk: $HK = \bigcup\limits_{h \in H} hK$).

Latihan 3.1.33 Untuk sebarang bilangan positip n tunjukkan bahwa $n = \sum\limits_{d|n} \phi(d)$, dimana ϕ adalah fungsi-ϕ Euler.

Latihan 3.1.34 Tunjukkan bahwa kebalikan dari Teorema Lagrange tidak benar. (Petunjuk: Tunjukkan bahwa A_4 tidak mempunyai subgrup yang berorder 6).

3.2 Homomorpisma

Sudah dibahas mengenai apa grup dan subgrup dan beberapa macam grup: siklik dan taksiklik, komutatif dan takkomutatif, berhingga dan takberhingga. Apapun itu, belum dibahas pemetaan diantara grup. Karena grup bukan sekedar suatu himpunan, tatapi bersamaan himpunan ini melekat suatu operasi biner yang memenuhi beberapa aksiomatik tertentu. Pemetaan diantara grup yang akan dibahas dikaitkan dengan operasi biner yang berlaku pada masing-masing grup.

Contoh 3.2.1 Dibahas tiga fungsi berbeda dari $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$ dan diidentifikasi beberapa sifat dari fungsi tersebut Misalkan tiga fungsi $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh

(1) $f(x) = x^2$

(2) $g(x) = x + 1$

(3) $h(x) = 2x$.

Dalam kasus (1), image dari f bukan suatu subgrup dari $\mathbb{Z}$. Juga bila diambil dua elemen $x, y \in \mathbb{Z}$ didapat

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = f(x) + f(y).$$

Dalam kasus (2), image dari g adalah subgrup dari $\mathbb{Z}$, sebab $\mathrm{im}(f) = \mathbb{Z}$ dan

$$g(x + y) = x + y + 1 \neq (x + 1) + (y + 1) = g(x) + g(y).$$

Dalam kasus (3), image dari h adalah subgrup $2\mathbb{Z}$ dari grup $\mathbb{Z}$ dan

$$h(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = h(x) + h(y).$$

Definisi 3.2.1 Diberikan suatu pemetaan $\phi : G \to G'$ dimana G dan G' adalah grup. Pemetaan ϕ dinamakan **homomorpisma** grup bila memenuhi

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \text{ untuk semua } a, b \in G.$$

Perlu diperhatikan bahwa, dalam $\phi(ab)$ operasi biner yang digunakan adalah dalam G, sedangkan dalam $\phi(a)\phi(b)$ operasi biner yang digunakan dalam G'. ✓

Contoh 3.2.2 Dalam Contoh 3.2.1, h adalah homomorpisma. Sedangkan f dan g bukan. Juga perlu diperhatikan bahwa selain $h(x + y) = h(x) + h(y)$ didapat $h(0) = 0$ dan $h(-x) = -h(x)$.

Contoh 3.2.3 Pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang diberikan oleh $\phi(x) = 5x, \ \forall x \in \mathbb{Z}$ adalah suatu homomorpisma, sebab

$$\phi(x + y) = 5(x + y) = 5x + 5y = \phi(x) + \phi(y), \text{ untuk semua } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Contoh 3.2.4 Pemetaan $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{Z}_2$ diberikan oleh

$$\phi(x) = \begin{cases} [0]_2, & \text{bila } x > 0 \\ [1]_2, & \text{bila } x < 0, \end{cases}$$

adalah suatu homomorpisma. Sebab, bila x dan y keduanya positip, maka xy adalah positip, didapat $\phi(xy) = [0]_2 = [0]_2 + [0]_2 = \phi(x) + \phi(y)$. Juga bila x dan y keduanya negatif, maka xy positip, didapat $\phi(xy) = [0]_2 = [1]_2 + [1]_2 = f(x) + f(y)$. Juga, bila x positip dan y negatif, maka xy negatip, didapat $\phi(xy) = [1]_2 = [0]_2 + [1]_2 = \phi(x) + \phi(y)$. Dengan cara yang sama bila bila x negatip dan y positip, maka xy negatip, didapat $\phi(xy) = [1]_2 = [1]_2 + [0]_2 = \phi(x) + \phi(y)$.

Contoh 3.2.5 Untuksebarang grup G, pemetaan identitas adalah suatu homomorpisma. Sebab bila $\phi : G \to G$ adalah pemetaan identitas maka $\phi(x) = x, \forall x \in G$ dan $\phi(xy) = xy = \phi(x)\phi(y)$.

Contoh 3.2.6 Untuk sebarang grup G dan G',pemetaan $\phi : G \to G'$ diberikan oleh $\phi(x) = e'$, $\forall x \in G$ dimana e' adalah elemen netral di G'. Maka ϕ adalah suatu homomorpisma yang dinamakan **trivial** homomorpisma diantara G dan G'. Untuk $x, y \in G$ didapat $\phi(xy) = e' = e'e' = \phi(x)\phi(y)$.

Contoh 3.2.7 Untuk sebarang grup G dan sebarang $a \in G$ diberikan pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$ yang dinamakan **pemetaan eksponensial** oleh $\phi(n) = a^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Maka ϕ adalah homomorpisma, sebab $\phi(m + n) = a^{m+n} = a^m a^n = \phi(m)\phi(n)$.

Contoh 3.2.8 Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ didefinisikan oleh $\phi(n) = [n]_5$, $\forall n ß \mathbb{Z}$. Jadi $\phi(7) = [2]_5, \phi(8) = [3]_5$ dan $\phi(7 + 8) = \phi(15) = [0]_5$ juga $\phi(7) + \phi(8) = [2]_5 + [3]_5 = [5]_5 = [0]_5$. Misalkan sebarang $m, n \in \mathbb{Z}$, maka gunakan algoritma pembagian didapat $n = 5q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < 5$ dan $m = 5q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < 5$ untuk beberapa $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned} \phi(m + n) &= \phi(5q_1 + r_1 + 5q_2 + r_2) \\ &= \phi(5(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)) \\ &= [r_1 + r_2]_5 \\ &= [r_1]_5 + [r_2]_5 \\ &= \phi(m) + \phi(n). \end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah suatu homomorpisma.

Proposisi 3.2.1 Untuk sebarang grup G, G' dan G'', diberikan pemetaan $\phi : G \to G'$ dan $\psi : G' \to G''$ keduanya adalah homomorpisma. Maka komposisi $\psi \circ \phi(x) = \psi(\phi(x))$ adalah suatu homomorpisma grup dari G ke G''.

Bukti Misalkan sebarang $x, y \in G$ didapat

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(xy) &= \psi(\phi(xy)) \\ &= \psi(\phi(x)\phi(y)) \\ &= \psi(\phi(x))\psi(\phi(y)) \\ &= \psi \circ \phi(x)\, \psi \circ \phi(y). \end{aligned}$$

Suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$ menentukan suatu subgrup khusus dari grup G yang sangat berperan penting untuk pemahaman homomorpisma.

Definisi 3.2.2 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dan e' adalah elemen netral di G', maka **kernel** dari ϕ dinotasikan oleh $\ker(\phi)$ adalah himpunan

$$\ker(\phi) = \{x \in G \,|\, \phi(x) = e'\}.$$

Contoh 3.2.9 Kernel dari $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ dalam Contoh 3.2.8 adalah $\ker(\phi) = 5\mathbb{Z}$. ●

Contoh 3.2.10 Kernel $\phi : \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$ dalam Contoh 3.2.7 adalah

$$\ker(\phi) = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, |a| \text{ membagi } n\}. \quad ●$$

Contoh 3.2.11 Kernel dari $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{Z}_2$ dalam Contoh 3.2.4 adalah

$$\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^* \,|\, x > 0\}. \quad ●$$

Sifat dasar homomorpisma berikut bukanlah suatu hal yang mengejutkan sebab dari beberapa contoh yang telah dibahas menjelaskan hal ini.

Proposisi 3.2.2 (**Sifat-sifat Dasar Homomorpisma Grup**) Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma grup. Maka

(1) $\phi(e) = e'$, dimana e elemen netral di G dan e' elemen netral di G'.

(2) $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$ untuk sebarang $a \in G$.

(3) $\phi(a^n) = \phi(a)^n$ untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}$.

(4) Bila $|a|$ berhingga, maka $|\phi(a)|$ membagi $|a|$.

(5) Bila H adalah suatu subgrup dari G, maka $\phi(H) = \{\phi(x) \,|\, x \in H\}$ adalah suatu subgrup dari G'.

(6) Bila K adalah suatu subgrup dari G', maka $\phi^{-1}(K) = \{x \in G \,|\, \phi(x) \in K\}$ adalah subgrup dari G.

Bukti

(1) Karena $\phi(e)\cancel{\phi(e)} = \phi(e\,e) = \phi(e) = e'\cancel{\phi(e)}$, gunakan hukum kanselasi didapat $\phi(e) = e'$.

(2) Karena $\cancel{\phi(a)}\phi(a^{-1}) = \phi(aa^{-1}) = \phi(e) = e' = \cancel{\phi(a)}(\phi(a))^{-1}$, gunakan hukum kanselasi didapat $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$.

(3) $\phi(a^n) = \phi(a)^n$ untuk $n = 0$ mengikuti hasil (1). Untuk $n > 0$ digunakan induksi: untuk $n = 1$ didapat $\phi(a) = \phi(a)$. Misalkan benar untuk bilangan bulat positip k, maka

$$\phi(a^{k+1}) = \phi(a^k a) = \phi(a^k)\phi(a) = \phi(a)^k\phi(a) = \phi(a)^{k+1}.$$

Dengan demikian untuk $n > 0$ benar bahwa $\phi(a^n) = \phi(a)^n$. Selanjutnya, untuk $n < 0$ maka $-n > 0$. Didapat

$$\phi((a^{-1})^n) = \phi(a^{-n}) = \phi(a)^{-n} = (\phi(a)^{-1})^n = \phi(a^{-1})^n.$$

Terlihat bahwa untuk $n < 0$ benar bahwa $\phi(a^n) = \phi(a)^n$.

(4) Misalkan $|a| = n$, maka menggunakan hasil (3) dan (1) didapat

$$\phi(a)^n = \phi(a^n) = \phi(e) = e'.$$

Selanjutnya dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.1 didapat $|\phi(a)|$ membagi $|a| = n$.

(5) Diberikan sebarang $u, v \in \phi(H) = \{w \in G' \,|\, w = \phi(x)$ untuk beberapa $x \in H\}$, pilih $x, y \in H$ yang memenuhi $u = \phi(x)$ dan $v = \phi(y)$. Maka $xy^{-1} \in H$ sebab H subgrup dan

$$uv^{-1} = \phi(x)\phi(y)^{-1} = \phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(xy^{-1}) \in \phi(H) \;\; (\text{sebab } xy^{-1} \in H).$$

Jadi $\phi(H)$ adalah subgrup dari G'.

(6) Misalkan $x, y \in \phi^{-1}(K)$, didapat

$$\phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)^{-1} \in K.$$

Terlihat bahwa $xy^{-1} \in \phi^{-1}(K)$, jadi $\phi^{-1}(K)$ adalah subgrup dari G.

Proposisi 3.2.3 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma grup. Maka $\ker(\phi)$ adalah suatu subgrup dari G.

Bukti Himpunan $K = \{e'\}$ dimana e' adalah elemen netral di G' adalah subgrup dari G', maka menurut menurut Proposisi 3.2.2 bagian (6) $\phi^{-1}(K)$ adalah subgrup dari G. Tetapi

$$\phi^{-1}(K) = \{x \in G \,|\, \phi(x) \in K\} = \{x \in G \,|\, \phi(x) = e'\} = \ker(\phi).$$

Dengan demikian $\ker(\phi)$ adalah subgrup dari G.

Proposisi 3.2.4 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma grup. Maka ϕ adalah satu-satu bila dan hanya bila $\ker(\phi) = \{e\}$, dimana e adalah elemen netral di G.

Bukti ($\Rightarrow$) Misalkan ϕ satu-satu dan sebarang elemen $x \in \ker(\phi)$. Maka $\phi(x) = e' = \phi(e)$. Jadi $x = e$, dengan demikian $\ker(\phi) = \{e\}$. ($\Leftarrow$) Misalkan $\ker(\phi) = \{e\}$ dan untuk beberapa $x, y \in G$ bila $\phi(x) = \phi(y)$. Maka

$$\phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y^{-1}) = \phi(y)\phi(y)^{-1} = e'.$$

Terlihat bahwa $xy^{-1} \in \ker(\phi) = \{e\}$. Jadi $xy^{-1} = e$ atau $x = y$. Dengan demikian ϕ adalah satu-satu.

Definisi 3.2.3 Suatu homomorpisma grup $\phi : G \to G'$ dimana ϕ adalah satu-satu dan pada dinamakan suatu **isomorpisma**. Dalam hal ini G dan G' adalah **isomorpik** dan ditulis $G \cong G'$.

Untuk menunjukkan bahwa dua grup G dan G' isomorpik, diperlukan empat hal:

(1) definisikan suatu pemetaan $\phi : G \to G'$.

(2) Tunjukkan bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma grup.

(3) Tunjukkan bahwa ϕ satu-satu.

(4) Tunjukkan bahwa ϕ adalah pada.

Contoh berikut mengilustrasikan empat langkah tersebut.

Contoh 3.2.12 Grup $\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$ adalah isomorpik. Untuk menunjukkan hal ini, digunakan empat langkah berikut:

(1) definisikan pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ oleh $\phi(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

(2) Didapat, untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $\phi(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = \phi(x) + \phi(y)$. Jadi ϕ adalah homomorpisma grup.

(3) $\phi(x) = 0$ bila dan hanya bila $3x = 0$ bila dan hanya bila $x = 0$. Jadi $\ker(\phi) = \{0\}$, dengan demikian ϕ adalah satu-satu.

(4) Diberikan sebarang $u \in 3\mathbb{Z}$ dapat dipilih $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $u = 3x$. Jadi $u = \phi(x)$, dengan demikian ϕ adalah pada.

Jadi $\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$. ●

Contoh 3.2.13 Diberikan grup $\mathbb{R}$ dengan operasi biner penjumlahan dan grup

$$R^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$$

dengan operasi biner perkalian. Maka $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^+$ adalah isomorpik, sebab

(1) Misalkan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ adalah fungsi yang diberikan oleh $\phi(x) = \exp(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\phi(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \phi(x)\phi(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Jadi ϕ adalah homomorpisma grup.

(3) Elemen netral di $\mathbb{R}$ adalah 1. Jadi bila sebarang elemen $x \in \ker(\phi)$, maka $\phi(x) = e^x = 1$. Hal ini berkibat $x = 0$. Dengan demikian $\ker(\phi) = \{0\}$. Jadi ϕ satu-satu.

(4) Diberikan sebarang $u \in \mathbb{R}^+$, pilih $x \in \mathbb{R}$ dimana $x = \ln(u)$. Didapat $u = e^x = \phi(x)$, dengan demikian ϕ adalah pada.

Jadi $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$. ●

Contoh 3.2.14 Dalam Contoh 3.2.12, pemetaan $\phi^{-1} : 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dimana

$$\phi^{-1}(u) = u/3, \ \forall u \in 3\mathbb{Z}$$

adalah suatu isomorpisma dari $3\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Begitu juga dalam Contoh 3.2.13, pemetaan $\phi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dimana $\phi^{-1}(u) = \ln(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^+$ adalah suatu isomorpisma grup dari $\mathbb{R}^+$ ke $\mathbb{R}$.

Proposisi 3.2.5 Misalkan $\phi : G \to G'$ dan $\psi : G' \to G''$ adalah isomorpisma. Maka

(1) Komposisi $\psi \circ \phi : G \to G''$ adalah isomorpisma.

(2) Pemetaan identitas $\phi : G \to G$ adalah isomorpisma

(3) Invers $\phi^{-1} : G' \to G$ adalah isomorpisma.

Bukti

(1) Dengan menggunakan Proposisi 3.2.1, maka komposisi $\psi\circ\phi$ adalah homomorpisma. Juga, dengan menggunakan Teorema 1.1.1 bagian (2) dan (3), maka komposisi $\psi\circ\phi$ adalah satu-satu dan pada. Jadi komposisi $\psi \circ \phi$ adalah isomorpisma grup dari G ke G''.

(2) Berdasarkan Proposisi 1.1.2 pemetaan identitas ϕ adalah satu-satu dan pada. Untuk sebarang $x, y \in G$ didapat $\phi(xy) = xy = \phi(x)\phi(y)$. Jadi ϕ adalah homomorpisma. Dengan demikian pemetaan identitas ϕ adalah isomorpisma.

(3) Karena ϕ satu-satu dan pada, maka diberikan sebarang $u, v \in G'$ dapat dipilih dengan tunggal $x, y \in G$ yang memenuhi $u = \phi(x)$ dan $v = \phi(y)$. Didapat $\phi^{-1}(u) = x$ dan $\phi^{-1}(v) = y$ juga $uv = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$. Hal ini berakibat

$$\phi^{-1}(uv) = \phi^{-1}(\phi(xy)) = (\phi^{-1} \circ \phi)(xy) = xy = \phi^{-1}(u)\phi^{-1}(v).$$

Terlihat bahwa ϕ^{-1} adalah suatu homomorpisma dari G' ke G. Lagi, karena ϕ satu-satu dan pada, maka diberikan sebarang $x \in G$ dapat dipilih dengan tunggal $u \in G'$ yang memenuhi $u = \phi(x)$ sehingga didapat $\phi^{-1}(u) = x$. Jadi ϕ^{-1} adalah pemetaan satu-satu dan pada. ✓

Proposisi 3.2.6 Misalkan $G \cong G'$. Maka

(1) $|a| = |\phi(a)|$ untuk sebarang $a \in G$ dan ϕ adalah suatu isomorpisma grup dari G ke G'.

(2) $|G| = |G'|$.

(3) G komutatif bila dan hanya bila G' komutatif.

(4) G siklik bila dan hanya bila G' siklik.

(5) G mempunyai k elemen yang berorder n bila dan hanya bila G' mempunyai k elemen yang berorder n.

Bukti Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu isomorpisma grup dari G ke G'.

(1) Misalkan sebarang elemen $a \in G$ dimana $|a| = n$ dan $|\phi(a)| = m$, maka dengan menggunakan Proposisi 3.2.2 bagian (4) didapat $|\phi(a)| = m$ membagi $|a| = n$. Dengan demikian

$$n = k_1 m, \quad \text{untuk beberapa bilangan bulat positip } k_1. \tag{3.1}$$

Tetapi, karena $\phi(a^m) = \phi(a)^m = e'$ dengan e' adalah elemen netral di G' dan kerana ϕ satu-satu, maka haruslah $a^m = e$. Dengan demikian $|a| = n$ membagi m. Didapat

$$m = k_2 n, \quad \text{untuk beberapa bilangan bulat positip } k_2. \tag{3.2}$$

Dari Persamaan 3.1 dan 3.2 didapat

$$\cancel{n} = k_1 m = k_1(k_2 n) = (k_1 k_2)\cancel{n},$$

hal ini berakibat $1 = k_1 k_2$. Tetapi k_1 dan k_2 keduanya adalah bilangan bulat positip, jadi haruslah $k_1 = k_2 = 1$. Dengan demikian $n = k_1 m = m$ atau $|a| = |\phi(a)|$.

(2) Karena ϕ adalah satu-satu dan pada, maka $|G| = |G'|$.

(3) Misalkan G komutatif dan sebarang elemen $u, v \in G'$. Karena ϕ pada, maka dapat dipilih $x, y \in G$ yang memenuhi $\phi(x) = u$ dan $\phi(y) = v$. Maka didapat

$$uv = \phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = \phi(yx) = \phi(y)\phi(x) = vu.$$

Jadi G' adalah komutatif. Bila G' komutatif, maka

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x) = \phi(yx),$$

karena ϕ satu-satu, maka haruslah $xy = yx$. Jadi G komutatif.

(4) Bila $G = \langle a \rangle$ siklik, maka dari hasil (1) didapat

$$|\phi(a)| = |a| = |G| = |G'|,$$

jadi $G' = \left\langle \phi(a) \right\rangle$ adalah siklik. Sebaliknya bila $G' = \langle b \rangle$ siklik dan karena ϕ pada, maka dapat dipilih elemen $a \in G$ yang memenuhi $\phi(a) = b$. Didapat

$$|a| = |\phi(a)| = |b| = |G'| = |G|$$

dan akibatnya $\langle a \rangle = G$, dengan demikian G adalah siklik.

(5) Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elemen-elemen yang berbeda di G dengan order n. Karena ϕ satu-satu, maka $\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_k)$ adalah elemen-elemen berbeda di G' dan dari hasil (1) elemen-elemen tersebut mempunyai order n. Bila $a_1, a_2, \ldots, a_k$ adalah semua elemen di G dengan order n, maka $\phi(a_1), \phi(a_2), \ldots, \phi(a_k)$ adalah semua elemen di G' dengan order n. Selanjutnya, untuk sebarang elemen yang lain $u \in G'$, karena ϕ pada, maka dapat dipilih $x \in G$ yang memenuhi $u = \phi(x)$ dan tentunya u berbeda dengan semua $\phi(a_i)$. Juga, x berbeda dengan semua a_i. Karena a_i adalah semua elemen di G dengan order n, didapat

$$|u| = |\phi(x)| = |x| \neq n. \qquad \checkmark$$

Lemma 3.2.1 Misalkan G dan H adalah grup siklik dengan order yang sama yaitu n, dan misalkan sebarang elemen generator $a \in G$ dan sebarang generator $b \in H$. Maka ada suatu isomorpisma $\phi : G \to H$ dengan $\phi(a) = b$.

Bukti Diketahui $G = \langle a \rangle$ dan $|G| = n$, gunakan Kesimpulan 2.3.2 didapat

$$G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\},$$

dimana semua elemen-elemen a^i adalah berbeda. Didefinisikan pemetaan $\phi : G \to H$ oleh $\phi(a^i) = b^i$ untuk $0 \leq i < n$, maka untuk sebarang a^{i_0}, a^{i_1} di G dimana $0 \leq i_0, i_1 < n$ didapat

$$\begin{aligned}
\phi(a^{i_0}a^{i_1}) &= \phi(a^{[i_0]_n}a^{[i_1]_n}) \\
&= \phi(a^{[i_0+i_1]_n}) \\
&= b^{[i_0+i_1]_n} \\
&= b^{[i_0]_n+[i_1]_n} \\
&= b^{[i_0]_n}b^{[i_1]_n} \\
&= b^{i_0}b^{i_1} \\
&= \phi(a^{i_0})\phi(a^{i_1}).
\end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah homomorpisma grup dari G ke H. Selanjutnya misalkan sebarang elemen $a^j \in \ker(\phi)$ dimana $0 \leq j < n$, didapat

$$\phi(a^j) = b^j = e_H = b^0,$$

hal ini berkibat bahwa $j = 0$. Jadi $a^j = a^0 = e_G$. Dengan demikian $\ker(\phi) = \{e_G\}$, gunakan Proposisi 3.2.4 didapat ϕ adalah satu-satu dan kerena $|G| = n = |H|$, maka ϕ pada. Jadi ϕ adalah isomorpisma grup dari G ke H. $\checkmark$

Proposisi 3.2.7 Misalkan $G = \langle a \rangle$ adalah suatu grup siklik. Maka

(1) Bila $|G| = \infty$, maka $G \cong \mathbb{Z}$.

(2) Bila $|G| = n$, maka $G \cong \mathbb{Z}_n$.

Bukti

(1) Bila $G = \langle a \rangle$ dimana $|G| = \infty$, misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to G$ didefinisikan oleh $\phi(k) = a^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Karena $|a| = \infty$, $a^k = e$ bila dan hanya bila $k = 0$. Jadi $\ker(\phi) = \{0\}$, dengan demikian ϕ satu-satu. Karena G siklik, diberikan sebarang $u \in G$, dapat dipilih $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $u = a^k = \phi(k)$. Jadi ϕ adalah pada. Dengan demikian ϕ adalah homomorpisma dari $\mathbb{Z}$ ke G. Tetapi, dengan menggunakan Proposisi 3.2.5 bagian (3), maka ϕ^{-1} adalah isomorpisma dari G ke $\mathbb{Z}$. Jadi $G \cong \mathbb{Z}$.

(2) Langsung gunakan Lemma 3.2.1 didapat $G \cong \mathbb{Z}_n$. ✓

Contoh 3.2.15 D_4 dan $\mathbb{Z}_8$ tidak isomorpik, sebab D_4 bukan grup komutatif, sedangkan $\mathbb{Z}_8$ grup komutatif. ●

Contoh 3.2.16 Diberikan grup

$$\mathbb{U}(10) = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$$

dan

$$\mathbb{U}(12) = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\},$$

maka $\mathbb{U}(10)$ dan $\mathbb{U}(12)$ tidak isomorpik sebab $\mathbb{U}(10)$ siklik dan $\mathbb{U}(12)$ tidak siklik. ●

Contoh 3.2.17 Grup $\mathbb{Q}$ dengan operasi biner penjumlahan dan grup $\mathbb{Q}^*$ dengan operasi biner perkalian tidak isomorpik. Sebab, bila ada suatu isomorpisma $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$, karena ϕ pada, maka diberikan $2 \in \mathbb{Q}^*$ dapat $a \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $\phi(a) = 2$. Perhatikan bilangan rasional $r = \phi(a/2)$ dan menggunakan ϕ adalah homomorpisma didapat

$$r^2 = \phi(a/2)\phi(a/2) = \phi(a/2 + a/2) = \phi(a) = 2.$$

Suatu hal yang tidak mungkin, sebab bila mungkin berakibat bahwa $r = \pm\sqrt{2}$ adalah irasional. ●

Latihan

Latihan 3.2.1 Pada latihan berikut tentukan apakah pemetaan ϕ adalah homomorpisma atau tidak. Bila ϕ homomorpisma maka tentukan $\ker(\phi)$.

1. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\phi(n) = n - 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\phi(n) = 3n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3. $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (terhadap operasi perkalian), dimana $\phi(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

4. $\phi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, dimana $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ adalah grup linier umum matriks ukuran 2×2 yang mempunyai invers dan $\phi(A) = \det(A),\ \forall A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

5. $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$, dimana
$$\phi(\sigma) = \begin{cases} [0]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi genap} \\ [1]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi ganjil.} \end{cases}$$

6. $\phi : D_4 \to \mathbb{Z}_4$, dimana
$$D_4 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau\}$$
adalah dihedral grup dan $\phi(\rho^i) = 0, \phi(\rho^i\tau) = 1,$ untuk semua $i, 0 \le i \le 3$.

7. $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ adalah grup himpunan bilangan riil dengan operasi penjumlahan dan
$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. $\phi : G \to G$, dimana G adalah sebarang grup dan $\phi(x) = x^{-1},\ \forall x \in G$.

9. $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$, dimana $\phi([x]_6) = [x]_2,\ \forall [x]_6 \in \mathbb{Z}_6$.

10. $\phi : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_2$, dimana $\phi([x]_7) = [x]_2,\ \forall [x]_7 \in \mathbb{Z}_7$.

Latihan 3.2.2 Hitung nilai homomorpisma ϕ berikut:

1. $\phi(27)$ dimana $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$, dengan $\phi(n) = [n]_5,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. $\phi(27)$ dimana $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$, dengan $\phi(m) = [m]_3,\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

3. $\phi((1\ 2)(2\ 3\ 1)(2\ 3))$ dimana $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ dan ϕ didefinisikan oleh $\phi(\tau) = [0]_2$ bila τ permutasi genap dan $\phi(\tau) = [1]_2$ bila τ permutasi ganjil.

4. $\phi(5)$ dan $\phi(10)$ dimana $\phi : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_3$, dengan $\phi(1) = 2$.

Latihan 3.2.3 Dapatkan semua homomorpisma yang mungkin dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

Latihan 3.2.4 Dapatkan semua homomorpisma yang mungkin dari $\mathbb{Z}$ pada $\mathbb{Z}$.

Latihan 3.2.5 Dapatkan semua homomorpisma yang mungkin dari $\mathbb{Z}_3$ ke $\mathbb{Z}_6$.

Latihan 3.2.6 Diberikan suatu relasi $\mathcal{R}$ pada klas dari semua grup didefinisikan oleh $G\mathcal{R}G'$ bila dan hanya bila G dan G' isomorpik. Tunjukkan bahwa $\mathcal{R}$ adalah relasi ekivalen.

Latihan 3.2.7 Konstruksi suatu contoh dari suatu homomorpisma taktrivial diantara dua grup berikut bila hal ini mungkin, bila tidak mengapa hal ini tidak mungkin.

1. $\phi : S_3 \to S_5$.
2. $\phi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$.
3. $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$.
4. $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{12}$.
5. $\phi : D_4 \to S_5$.
6. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$.
7. $\phi : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_8$.
8. $\phi : S_5 \to \mathbb{Z}_2$.

Latihan 3.2.8 Misalkan $\phi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ adalah suatu homomorpisma dengan

$$\ker(\phi) = \{[0]_{12}, [3]_3, [6]_{12}, [9]_{12}\}$$

dan $\phi([4]_{12}) = [2]_3$. Dapatkan semua $x \in \mathbb{Z}_{12}$ yang memenuhi $\phi(x) = [1]_3$, dan tunjukkan bahwa himpunan $\{x \in \mathbb{Z}\}_{12} \,|\, \phi(x) = [1]_3\}$ suatu koset dari $\ker(\phi)$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$.

Latihan 3.2.9 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dimana $|G| = 9$. Dapatkan $|\ker(\phi)|$ bila ϕ adalah:
(a) trivial (b) satu-satu (c) bukan keduanya.

Latihan 3.2.10 Diberikan suatu grup G, $a \in G$ dan $\phi : \mathbb{Z} \to G$ adalah homomorpisma yang diberikan oleh $\phi(n) = a^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Uraikan semua $\ker(\phi)$ yang mungkin.

Latihan 3.2.11 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dimana $\ker(\phi) = K$ dan $a \in G$. Tunjukkan bahwa

$$\{x \in G \,|\, \phi(x) = \phi(a)\} = aK.$$

Latihan 3.2.12 Tentukan apakah pemetaan ϕ berikut adalah isomorpisma, terangkan jawaban saudara.
(a) $\phi : 2\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$, dimana $\phi(2n) = 3n$ (b) $\phi : \mathbb{U}(10) \to \mathbb{Z}_4$, dimana $\phi([3]_{10}) = [3]_4$
(c) $\phi : \mathbb{U}(10) \to \mathbb{Z}_4$, dimana $\phi([3]_{10}) = [2]_4$ (d) $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\phi(n) = 3n$.

Latihan 3.2.13 Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(8)$ dan $\mathbb{U}(12)$ isomorpik.

Latihan 3.2.14 Dalam $\mathbb{C}^*$, subgrup $\langle i \rangle$ isomorpik dengan $\mathbb{Z}_4$.

Latihan 3.2.15 Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ dan grup-4 Klein V tidak isomorpik.

Latihan 3.2.16 Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(14) \cong \mathbb{U}(18)$.

Latihan 3.2.17 Tunjukkan bahwa grup dihedral D_4 dan grup quaternion Q_8 tidak isomorpik.

Latihan 3.2.18 Dapatkan empat subgrup berbeda dari grup S_4 yang isomorpik dengan dengan S_3.

Latihan 3.2.19 Tunjukkan bahwa grup alternating A_4 memuat suatu subgrup yang isomorpik dengan grup-4 Klein V.

Latihan 3.2.20 Tunjukkan bahwa grup dihedral D_4 memuat suatu subgrup yang isomorpik dengan grup-4 Klein V.

Latihan 3.2.21 Diberikan grup $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$, tunjukkan bahwa grup G isomorpik dengan grup S_3.

3.3 Subgrup Normal

Telah dibahas bahwa untuk sebarang homomorpisma $\phi : G \to G'$, kernel $\ker(\phi)$ adalah suatu subgrup dari G. Pada bagian ini ditunjukkan bahwa $\ker(\phi)$ adalah suatu subgrup dengan suatu sifat khusus yang berkaitan dengan koset-kosetnya. Pembahasan dimulai dengan subgrup khusus tersebut yang dinamakan subgrup *normal*.

Contoh 3.3.1 Diberikan pemetaan $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$, dimana

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi genap} \\ 1, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi ganjil.} \end{cases}$$

Maka $\ker(\phi) = A_3 = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$. Koset kiri dari A_3 adalah:
$A_3 = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$ $\quad$ $\mu_1 A_3 = \{\mu_1, \mu_1\rho, \mu_1\rho^2\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$.
Sedangkan koset kanan dari A_3 adalah:
$A_3 = \{\rho_0, \rho, \rho^2\}$ $\quad$ $A_3\mu_1 = \{\mu_1, \rho\mu_1, \rho^2\mu_1\} = \{\mu_1, \mu_3, \mu_2\}$.
Terlihat bahwa koset kiri dari A_3 sama dengan koset kanan dari A_3. Perhatikan persamaan $\mu_1 A_3 = A_3\mu_1$ tidak berarti bahwa μ_1 komutatif dengan setiap elemen-elemen dari A_3, sebab $\mu_1\rho = \mu_2 \neq \mu_3 = \rho\mu_1$.

Contoh 3.3.2 Diberikan quaternion grup $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$. Misalkan pemetaan $\phi : Q_8 \to \mathbb{Z}_2$ didefinisikan oleh $\phi(\pm 1) = \phi(\pm\mathbf{i}) = [0]_2$ dan $\phi(\pm\mathbf{j}) = \phi(\pm\mathbf{k}) = [1]_2$. Maka ϕ adalah suatu homomorpisma grup dengan $\ker(\phi) = K = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}\}$. Maka koset kiri dari K adalah:
$K = \{1, -1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ $\quad$ $\mathbf{j}K = \{\mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{j}(-\mathbf{i}) = \mathbf{k}\}$
Sedangkan koset kanan dari K adalah:

$K = \{1, -1, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ $\quad$ $K\mathbf{j} = \{\mathbf{j}, -\mathbf{j}, \mathbf{ij} = \mathbf{k}, (-\mathbf{i})\mathbf{j} = -\mathbf{k}\}$.
Terlihat bahwa koset kiri dan kanan dari K sama. tetpai perlu diingat bahwa walaupun $\mathbf{j}K = K\mathbf{j}$ hal ini tidak berakibat $\mathbf{j}$ komutatif dengan semua elemen-elemen dari K, sebab $\mathbf{ji} = -\mathbf{k} \neq \mathbf{k} = \mathbf{ij}$.

Dua contoh yang telah dibahas mengilustrasikan suatu sifat penting kernel dari suatu homomorpisma.

Proposisi 3.3.1 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dan $K = \ker(\phi)$. Maka untuk semua $g \in G$ didapat $gK = Kg$.

Bukti Misalkan $x \in gK$, maka $x = gk_1$ untuk beberapa $k_1 \in K$. Jadi

$$\phi(x) = \phi(gk_1) = \phi(g)\phi(k_1) = \phi(g)e' = e'\phi(g).$$

Didapat

$$e' = \phi(x)\phi(g)^{-1} = \phi(x)\phi(g^{-1}) = \phi(xg^{-1}).$$

Terlihat bahwa $xg^{-1} \in K$, misalkan $k_2 = xg^{-1}$, untuk beberapa $k_2 \in K$, didapat $x = k_2 g \in Kg$. Jadi $gK \subseteq Kg$. Dengan cara yang sejalan, misalkan $y \in Kg$, maka $y = k_0 g$ untuk beberapa $k_0 \in K$. Jadi

$$\phi(y) = \phi(k_0 g) = \phi(k_0)\phi(g) = e'\phi(g) = \phi(g)e'.$$

Didapat

$$e' = \phi(g)^{-1}\phi(y) = \phi(g^{-1})\phi(x) = \phi(g^{-1}y).$$

Terlihat bahwa $g^{-1}y \in K$, misalkan $k_1 = g^{-1}y$, untuk beberapa $k_1 \in K$, didapat $y = gk_1 \in gK$. Jadi $Kg \subseteq gK$. Karena $gK \subseteq Kg$ dan$Kg \subseteq gK$, maka $gK = Kg$. ✓

Subgrup kernel mempunyai sifat penting sebagaimana telah dibuktikan pada proposisi yang baru saja dibahas dan berperan penting dalam memahami struktur dari grup.

Definisi 3.3.1 Diberikan grup G dan H adalah subgrup dari G. Bila untuk semua $g \in G$ berlaku $gH = Hg$, maka H dinamakan subgrup **normal** dari G dan ditulis $H \triangleleft G$. ✓

Kesimpulan 3.3.1 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dan $K = \ker(\phi)$, maka $K \triangleleft G$.

Bukti Hal ini adalah akibat langsung dari Proposisi 3.3.1. ✓

Contoh 3.3.3 Dalam Contoh 3.3.1 $A_3 \triangleleft S_3$ juga dalam Contoh 3.3.2 $\{\pm 1, \pm \mathbf{i}\} \triangleleft Q_8$.

Proposisi 3.3.2 Bila G adalah suatu grup komutatif, setiap subgrup dari G adalah subgrup normal dari G.

Bukti Langsung dari definisi 3.3.1. ✓

Contoh 3.3.4 Karena $\mathbb{Z}$ adalah grup komutatif, maka subgrup $n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ untuk $n \geq 1$ begitu juga setiap subgrup dari $\mathbb{Z}_n$ adalah subgrup normal di $\mathbb{Z}_n$. ●

Contoh 3.3.5 Dalam A_4, tinjau subgrup

$$H = \{\rho_0, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Didapat $|A_4| = 12$ dan $|H| = 4$, jadi indeks $[A_4 : H] = 3$. Ada tiga koset kiri dari H, yaitu H sendiri dan

$$(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2)\}$$
$$(1\ 3\ 2)H = \{(1\ 3\ 2), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3)\}.$$

Juga ada tiga koset kanan dari H yaitu H sendiri dan

$$H(1\ 2\ 3) = \{(1\ 2\ 3), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4)\}$$
$$H(1\ 3\ 2) = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\}.$$

Terlihat bahwa $(1\ 2\ 3)H = H(1\ 2\ 3)$ dan $(1\ 3\ 2)H = H(1\ 3\ 2)$, jadi $H \lhd A_4$. ●

Teorema berikut memberikan suatu cara untuk mengkonstruksi contoh-contoh subgrup normal.

Teorema 3.3.1 Diberikan suatu grup G dan H adalah suatu subgrup dari G dengan indeks $[G : H] = 2$. Maka H adalah subgrup normal dari G.

Bukti Karena $[G : H] = 2$, hal ini berakibat banyaknya koset kiri dan kanan adalah dua. Karena H sendiri adalah koset kiri dan sekaligus kanan dari H dan untuk sebarang $g \notin H$, maka dua koset kiri dari H yang berbeda adalah H dan gH dan dua koset kanan dari H yang berbeda adalah H dan Hg. Karena koset menentukan suatu partisi dari G, maka haruslah

$$gH = \{k \in G \,|\, k \notin H\} = Hg,$$

dengan demikian $H \lhd G$. ✓

Contoh 3.3.6 Karena $[S_n : A_n] = 2$, maka subgrup alternating $A_n \lhd S_n$ untuk semua $n \geq 3$. ●

Contoh 3.3.7 Subgrup $H = \langle \rho \rangle$ dari grup dihedral D_4 mempunyai order empat, maka indeks $[D_4 : H] = 2$. Jadi $H \lhd D_4$. ●

Teorema berikut memberikan suatu cara mudah untuk membedakan suatu subgrup adalah subgrup normal atau bukan.

Teorema 3.3.2 (**Test Subgrup Normal**) Diberikan suatu grup G dan H adalah suatu subgrup dari G. Maka kondisi berikut ekivalen:

(1) $H \lhd G$,

(2) $gHg^{-1} \subseteq H$ untuk semua $g \in G$,

(3) $gHg^{-1} = H$ untuk semua $g \in G$

Bukti (1) $\Rightarrow$ (2) Misalkan $g \in G$ dan $x \in gHg^{-1}$, maka $x = ghg^{-1}$ untuk beberapa $h \in H$. Menggunakan hipotisis (1), maka $gH = Hg$. Karena $gh \in gH$ didapat $gh \in Hg$. Jadi $gh = h'g$ untuk beberapa $h' \in H$. Dengan demikian

$$x = ghg^{-1} = h'gg^{-1} = h' \in H.$$

Jadi $gHg^{-1} \subseteq H$. Selanjutnya (2) $\Rightarrow$ (3), menggunakan hipotesis (2) didapat $yHy^{-1} \subseteq H$, hal ini berakibat $H \subseteq yHy^{-1}$ untuk semua $y \in G$. Diberikan sebarang $g \in G$, misalkan $y = g^{-1}$. Maka, didapat

$$gHg^{-1} \subset H \subseteq y^{-1}Hy = gHg^{-1}.$$

Jadi $gHg^{-1} = H$. Berikutnya (3) $\Rightarrow$ (1) misalkan $g \in G$ dan $x \in gH$. Jadi $x = gh$ untuk beberapa $h \in H$. Sehingga didapat $xg^{-1} = ghg^{-1} \in gHg^{-1}$, tetapi menggunakan hipotisis (3), didapat $xg^{-1} \in H$. Akibatnya $x \in Hg$. Jadi $gH \subseteq Hg$. Dengan cara yang sejalan, bila dimulai dengan $y \in Hg$ dapat ditunjukkan $g^{-1}y \in H$. Jadi $y \in gH$, dengan demikian $gH = Hg$ untuk semua $g \in G$. Jadi $H \lhd G$. ✓

Catatan pada bagian (2) Teorema 3.3.2 pernyataan $gHg^{-1} \subseteq H$ untuk semua $g \in G$ bila dan hanya bila $ghg^{-1} \in H$ untuk semua $g \in G$ dan semua $h \in H$ bila dan hanya bila $g^{-1}h'g \in H$ untuk semua $g \in G$ dan semua $h' \in H$.

Contoh 3.3.8 Diberikan $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dan $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Maka $H \lhd G$, sebab bila $A \in G$ dan $B \in H$, didapat

$$\det(ABA^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A^{-1}) = \det(A) \cdot 1 \cdot \det(A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

jadi $ABA^{-1} \in H$. ●

Contoh 3.3.9 Diberikan $Z(G)$ senter dari grup G, maka $Z(G)$ subgrup normal dari G sebab elemen-elemen dari $Z(G)$ komutatif dengan semua elemen dari G. ●

Contoh 3.3.10 Dalam S_3, tinjau subgrup $H = \langle \mu_1 \rangle$. Bila dihitung $\rho H \rho^{-1}$ didapat subgrup $\langle \mu_2 \rangle$. Bila dihitung $\rho^2 H \rho^{-2}$ didapat subgrup $\langle \mu_3 \rangle$. Dalam hal ini $H, \rho H \rho^{-1}$ dan $\rho^2 H \rho^{-2}$ adalah tiga subgrup yang berbeda dari S_3 berorder dua dan ketiganya taksatupun merupakan subgrup normal. ●

Teorema 3.3.3 Misalkan H adalah subgrup dari suatu grup G. Maka untuk sebarang $g \in G$

(1) gHg^{-1} adalah subgrup dari G.

(2) $\left|gHg^{-1}\right| = |H|$.

Bukti

(1) Bila $x, y \in gHg^{-1}$, maka $x = gh_1g^{-1}$ dan $y = gh_2g^{-1}$ untuk beberapa $h_1, h_2 \in H$. Jadi

$$xy^{-1} = gh_1g^{-1}(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1}.$$

Karena H adalah subgrup, maka $h = h_1h_2^{-1} \in H$. Jadi $xy^{-1} = ghg^{-1} \in gHg^{-1}$. Dengan demikian gHg^{-1} adalah subgrup dari G.

(2) Buat suatu pemetaan berikut

$$f : H \to gHg^{-1}$$

diberikan oleh $f(h) = ghg^{-1}$, $\forall h \in H$. Untuk $f(h_1) = f(h_2)$, didapat

$$\cancel{g}\, h_1\, \cancel{g^{-1}} = \cancel{g}\, h_2\, \cancel{g^{-1}},$$

dengan menggunakan hukum kanselasi kiri dan kanan didapat $h_1 = h_2$. Jadi f adalah satu-satu. Selanjutnya, diberikan sebarang $y \in gHg^{-1}$, maka $y = ghg^{-1}$ untuk beberapa $h \in H$. Hal ini berakibat $f(h) = ghg^{-1} = y$. Jadi f adalah pada, dengan demikian f satu-satu dan pada. Jadi $|H| = \left|gHg^{-1}\right|$.

Kesimpulan 3.3.2 Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G. Bila H adalah hanya satu-satunya subgrup dari G yang berorder $|H|$, maka $H \lhd G$.

Bukti Karena H adalah satu-satunya subgrup dari G dan menggunakan Teorema 3.3.3 didapat $H = gHg^{-1}$ untuk semua $g \in G$. Menurut Teorema Test Subgrup Normal maka $H \lhd G$.

Contoh 3.3.11 Dalam D_4 tinjau subgrup $H = \langle\tau\rangle = \{\rho_0, \tau\}$ dan $N = \{\rho_0, \rho^2, \tau, \rho^2\tau\}$. Karena $[N : H] = 2 = [D_4 : N]$, maka $H \lhd N$ dan $N \lhd D_4$. Tetapi, H bukan subgrup normal dari D_4. Faktanya, N adalah subgrup terbesar dari D_4 yang memuat H sebagai suatu subgrup normal.

Definisi 3.3.2 Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G, maka

$$N_G(H) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\right\}$$

dinamakan **normalisir** dari H dalam G.

Teorema 3.3.4 Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G. Maka

(1) $N_G(H)$ adalah suatu subgrup dari G.

(2) $H \lhd N_G(H)$.

(3) Bila K suatu subgrup dari G dan $H \lhd K$, maka K adalah subgrup dari $N_G(H)$.

(4) $H \triangleleft G$ bila dan hanya bila $N_G(H) = G$.

Bukti

(1) Misalkan $a, b \in N_G(H)$, didapat $aHa^{-1} = H = bHb^{-1}$. Hal ini berakibat

$$(a^{-1}b)H(b^{-1}a) = H \quad \text{atau} \quad (a^{-1}b)H(a^{-1}b)^{-1} = H.$$

Jadi $a^{-1}b \in N_G(H)$, dengan demikian $N_G(H)$ adalah subgrup dari G.

(2) Misalkan sebarang $h \in H$, didapat $hHh^{-1} = H$. Jadi $h \in N_G(H)$ dengan demikian $H \subset N_G(H)$. Diberikan sebarang $g \in N_G(H)$, didapat $gHg^{-1} = H$ untuk semua $g \in N_G(H)$ dan menurut Teorema Test Subgrup Normal, maka $H \triangleleft N_G(H)$.

(3) Misalkan $H \triangleleft K$ dan diberikan sebarang $g \in K$, maka $gHg^{-1} = H$. Hal ini menunjukkan bahwa $g \in N_G(H)$, akibatnya $K \subset N_G(H)$. Karena K subgrup dari G dan $K \subset N_G(H)$ hal ini berakibat K adalah subgrup dari $N_G(H)$.

(4) ($\Rightarrow$) Misalkan $H \triangleleft G$ dan untuk sebarang $g \in G$, didapat $gHg^{-1} = H$. Jadi $g \in N_G(H)$, dengan demikian $G \subset N_G(H)$. Tetapi $N_G(H) \subset G$, jadi $N_G(H) = G$. ($\Leftarrow$) Misalkan $N_G(H) = G$, maka untuk sebarang $g \in G$ didapat $g \in N_G(H)$. Akibatnya, $gHg^{-1} = H$ untuk semua $g \in G$. Jadi $H \triangleleft G$. ✓

Diberikan dua subgrup H dan K dari suatu subgrup G, didefinisikan himpunan

$$HK \stackrel{\text{def}}{=} \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Himpunan HK mungkin subgrup dari G mungkin tidak. Proposisi berikut memberikan syarat bahwa HK adalah subgrup dari G.

Proposisi 3.3.3 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup G dan $H \triangleleft G$. Maka HK adalah suatu subgrup dari G.

Bukti Misalkan $a, b \in HK$, maka $a = h_1k_1$ dan $b = h_2k_2$ untuk beberapa $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$. Didapat

$$ab^{-1} = h_1k_1(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1kh_2^{-1},$$

dimana $k = k_1k_2^{-1} \in K$ (sebab K subgrup). Selanjutnya, tinjau elemen kh_2^{-1}, elemen ini berada di kH. Karena $H \triangleleft G$, maka $kH = Hk$. Jadi $kh_2^{-1} \in Hk$, dengan demikian $kh_2^{-1} = h_3k$ untuk beberapa $h_3 \in H$. Sehingga didapat

$$ab^{-1} = h_1kh_2^{-1} = h_1h_3k = hk,$$

dimana $h = h_1h_3 \in H$ (sebab H subgrup dari G). Terlihat bahwa, $ab^{-1} \in HK$. Jadi HK adalah subgrup dari grup G. ✓

Kesimpulan 3.3.3 Bila H dan K adalah subgrup dari suatu grup komutatif G, maka HK adalah subgrup dari G.

Bukti Karena G grup komutatif, maka $H \lhd G$. Gunakan Proposisi 3.3.3 didapat HK subgrup dari G. ✓

Teorema 3.3.5 Bila H dan K adalah subgrup berhingga dari suatu grup G, maka

$$|HK| = |H|\,|K|/|H \cap K|.$$

Bukti Misalkan m adalah indeks $[K : H \cap K]$ dan

$$(H \cap K)k_1, (H \cap K)k_2, \cdots, (H \cap K)k_m$$

adalah m koset yang berbeda dari $H \cap K$ dalam K. Koset-koset ini membentuk partisi dalam K dan setiap elemen dari K tepat berada pada satu koset tersebut. Karena

$$m = [K : H \cap K] = |K|/|H \cap K|,$$

maka tinggal menunjukkan $|HK| = |H|\,m$ sebagai berikut. Tinjau

$$Hk_1, Hk_2, \ldots, Hk_m,$$

adalah koset-koset kanan dari H yang semuanya berbeda. Sebab bila tidak, yaitu $Hk_i = Hk_j$ untuk beberapa $i \neq j$ dengan $1 \leq i, j \leq m$, maka $k_i k_j^{-1} \in H$, tetapi $k_i k_j^{-1} \in K$ (sebab K subgrup). Jadi $k_i k_j^{-1} \in (H \cap K)$. Akibatnya, $(H \cap K)k_i = (H \cap K)k_j$ dengan $i \neq j$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan koset $(H \cap K)k_s$ dengan $1 \leq s \leq m$ semuanya berbeda. Bila diberikan sebarang elemen $hk \in HK$ dan karena $(H \cap K)k_s$ dengan $1 \leq s \leq m$ adalah koset-koset yang berbeda dari $(H \cap K)$ dalam K, maka $k \in (H \cap K)k_s$ untuk beberapa $1 \leq s \leq m$, dengan demikian hk terletak pada salah satu koset Hk_s. Jadi Hk_s mempartisi HK dan $|Hk_s| = |H|$. Sehingga didapat $|HK| = |Hk_s|\,m = |H|\,|K|/|H \cap K|$. ✓

Latihan

Latihan 3.3.1 Tentukan apakah subgrup berikut adalah subgrup normal.

1. A_3 dalam S_3
2. A_3 dalam S_4
3. $3\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$
4. $\langle \rho \rangle$ dalam D_4
5. $\langle \rho\tau \rangle$ dalam D_4
6. $\{\pm 1, \pm \mathbf{j}\}$ dalam Q_8
7. $K = \{\rho_0, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ dalam S_4
8. $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$ dalam S_4. ✓

Latihan 3.3.2 Tunjukkan bahwa pemetaan $\phi : Q_8 \to \mathbb{Z}_2$ didefinisikan oleh

$$\phi(\pm 1) = \phi(\pm \mathbf{i}) = [0]_2$$

dan

$$\phi(\pm \mathbf{j}) = \phi(\pm \mathbf{k}) = [1]_2$$

adalah suatu homomorpisma. ✓

Latihan 3.3.3 Dapatkan semua subgrup normal dalam $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z})$.

Latihan 3.3.4 Dapatkan semua subgrup normal dalam D_4.

Latihan 3.3.5 Untuk $r \in \mathbb{R}^*$, misalkan $rI = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$. Tunjukkan bahwa $H = \{rI \,|\, r \in \mathbb{R}^*\}$ adalah suatu subgrup normal dari $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Latihan 3.3.6 Diberikan suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$ dan $H' \lhd G'$. Tunjukkan bahwa $H = \phi^{-1}(H') \lhd G$.

Latihan 3.3.7 Berikan suatu contoh grup G dimana dua subgrup $H \leq K \leq G$ memenuhi $H \lhd K$ dan $K \lhd G$, tetapi H bukan subgrup normal dalam G.

Latihan 3.3.8 Tunjukkan bahwa bila $H \lhd G$ dan $K \lhd G$, maka $(H \cap K) \lhd G$.

Latihan 3.3.9 Misalkan H adalah suatu subgrup dari grup G dan untuk setiap $a \in G$ ada $b \in G$ yang memenuhi $aH = Hb$. Tunjukkan bahwa $H \lhd G$.

Latihan 3.3.10 Tunjukkan bahwa bila $H \lhd G$ dan $K \lhd G$, maka $HK \lhd G$.

Latihan 3.3.11 Dapatkan normalisir dari subgrup berikut.

1. A_3 dalam S_3 2. $\langle \mu_1 \rangle$ dalam S_3 3. $\langle \tau \rangle$ dalam D_4 4. $\langle \mathbf{j} \rangle$ dalam Q_8.

Latihan 3.3.12 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup G. Tunjukkan bahwa HK adalah suatu subgrup dari G bila dan hanya bila $HK = KH$.

Latihan 3.3.13 Misalkan G adalah suatu grup dengan order pq dimana p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda. Bila G mempunyai suatu subgrup tunggal berorder p dan suatu subgrup tunggal berorder q, maka tunjukkan bahwa G siklik.

Latihan 3.3.14 Misalkan G suatu grup yang mempunyai dua subgrup tunggal berorder m dan beroder n dimana $\mathrm{fpb}(m, n) = 1$. Tunjukkan bahwa G mempunyai suatu subgrup normal berorder mn.

Latihan 3.3.15 Misalkan $K \lhd G$ dan H adalah suatu subgrup dari G. Tunjukkan bahwa $(K \cap H) \lhd H$.

3.4 Grup Kuasi

Dalam bagian sebelumnya sudah ditunjukkan bahwa bila subgrup K dari suatu grup G adalah kernel
$$\ker(\phi) = \{g \in G \,|\, \phi(g) = e\}$$
dari suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$, maka $gK = Kg$ untuk semua $g \in G$ dan subgrup K dengan sifat yang demikian dinamakan subgrup normal. Dalam bagian ini dibahas image dari suatu homomorpisma. Selanjutnya ditunjukkan sebaliknya, yaitu bila K adalah suatu subgrup normal dari suatu grup G, maka K adalah kernel suatu homomorpisma ϕ dari G ke grup lainnya G'. Kenyataannya, ditunjukkan bagaimana mengkonstruksi grup G' dan homomorpisma ϕ bila diberikan grup G dan subgrup normal K dari G. Pengkonstruksian ini dinamakan pengkonstruksian grup kuasi. Grup ini sangat penting dalam pemahaman struktur dari grup.

Contoh 3.4.1 Dalam $\mathbb{Z}$ tinjau subgrup $7\mathbb{Z}$ dan himpunan dengan elemen-elemen di koset-koset dari $7\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$. Karena $m + 7\mathbb{Z} = n + 7\mathbb{Z}$ bila dan hanya bila $m \equiv n$ mod 5, maka himpunan dengan elemen-elemen adalah koset-koset dari $7\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$ adalah
$$G' = \{0 + 7\mathbb{Z}, 1 + 7\mathbb{Z}, 2 + 7\mathbb{Z}, 3 + 7\mathbb{Z}, 4 + 7\mathbb{Z}, 5 + 7\mathbb{Z}, 6 + 7\mathbb{Z}\}.$$
Ada suatu cara wajar untuk mendefinisikan suatu operasi pada G', misalnya
$$(m + 7\mathbb{Z}) + (n + 7\mathbb{Z}) = (m + n) + 7\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} (m \boxplus_7 n) + 7\mathbb{Z},$$
dimana $m \boxplus_7 n \stackrel{\text{def}}{=} [m + n]_7$ adalah operasi penjumlahan modulo 7. Dengan operasi ini himpunan G' isomorpik dengan $\mathbb{Z}_7$ dengan koset $m + 7\mathbb{Z}$ berkaitan dengan elemen $\phi(m) \in \mathbb{Z}_7$, dimana $\phi(m)$ adalah sisa dari $m \mod 7$. Elemen netral adalah $7\mathbb{Z} = 0 + 7\mathbb{Z}$, invers dari $2 + 7\mathbb{Z}$ adalah $5 + 7\mathbb{Z}$, invers dari $3 + 7\mathbb{Z}$ adalah $4 + 7\mathbb{Z}$. ●

Diberikan suatu subgrup H dari suatu grup G, meniru cara pengkosntruksian contoh sebelumnya dan didefinisikan suatu operasi koset dari H dalam G, yaitu $(aH)(bH) = (ab)H$. Tetapi untuk definisi mempunyai makna, atau dikatakan bahwa operasi ini terdefinisi dengan baik (well defined). Maka diperluhkan bahwa bila a_1H dan a_2H adalah koset yang sama dan bila b_1H dan b_2H adalah koset yang sama, maka $(a_1b_1)H$ dan $(a_2b_2)H$ adalah koset yang sama. Dengan kata lain diperluhkan bahwa hasil operasi tidak bergantung pada elemen yang mana a_1 atau a_2 yang dipilih untuk mewakili koset yang pertama dan pada elemen yang mana b_1 atau b_2 yang dipilih untuk mewakili koset yang kedua. Lemma berikut menjelaskan kondisi apa yang dibahas ini.

Lemma 3.4.1 Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G. Maka $H \lhd G$ bila dan hanya bila $(aH)(bH) = (ab)H$ adalah operasi pada koset dari H terdefinisi secara baik.

Bukti ($\Rightarrow$) Asumsikan $H \lhd G$ dan misalkan $a_1H = a_2H$ dan $b_1H = b_2H$. Hal ini berarti bahwa $a_1 = a_2h$ dan $b_1 = b_2h'$ untuk beberapa $h, h' \in H$. Maka

$$a_1b_1 = (a_2h)(b_2h') = a_2(hb_2)h'.$$

Karena $H \lhd G$, maka $b_2H = Hb_2$, jadi $hb_2 = b_2h''$ untuk beberapa $h'' \in H$. Sehingga didapat

$$a_1b_1 = a_2(hb_2)h' = a_2(b_2h'')h' = a_2b_2(h''h'),$$

dimana $h''h' \in H$ (sebab H subgrup). Dengan demikian $(a_1b_1)H = (a_2b_2)H$ sebagai mana yang dibutuhkan untuk menunjukkan bahwa operasi perkalian koset dari H adalah terdefinisi dengan baik. ($\Leftarrow$) Asumsikan operasi perkalian koset dari H terdefinisi dengan baik, misalkan sebarang $g \in G$ dan sebarang $h \in H$. Karena $gH = (gh)H$ dan operasi terdefinisi dengan baik, maka untuk $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ didapat

$$(ghg^{-1})H = (gh)H\,g^{-1}H = gH\,g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH = H.$$

Jadi $ghg^{-1} \in H$, dengan demikian $gHg^{-1} \subseteq H$ untuk semua $g \in G$. Gunakan test subgrup normal pada Teorema 3.3.2 didapat bahwa $H \lhd G$. ✓

Teorema 3.4.1 Misalkan H adalah suatu sungrup normal dari grup G. Maka himpunan koset-koset dari H dalam G membentuk suatu grup terhadap operasi $(aH)(bH) = (ab)H$.

Bukti Operasi "perkalian" koset $(aH)(bH) = (ab)H$ menurut Lemma 3.4.1 terdefinisi dengan baik. Sifat tertutup, didapat langsung dari "perkalian" koset $(aH)(bH)$ menghasilkan lagi suatu koset $(ab)H$. Sifat assosiatif,

$$aH(bH\,cH) = aH[(bc)H] = a(bc)H = (ab)cH = (ab)H\,cH = (aH\,bH)cH.$$

Sifat elemen netral, untuk sebarang koset aH, didapat $aH\,H = aH\,eH = (ae)H = aH$, sejalan dengan hal ini didapat $H\,aH = eH\,aH = (ea)H = aH$. Jadi $eH = H$ adalah elemen netral. Sifat invers, diberikan sebarang koset aH, didapat $aH\,a^{-1}H = (aa^{-1})H = eH = H$ juga $a^{-1}H\,aH = (a^{-1}a)H = eH = H$. Terlihat bahwa invers dari aH adalah $a^{-1}H$. ✓

Definisi 3.4.1 Misalkan H adalah subgrup normal dari G. Maka grup himpunan koset-koset dari H dalam G dengan operasi $(aH)(bH) = (ab)H$ dinamakan **grup kuasi** dari G oleh H ditulis G/H. ✓

Contoh 3.4.2 Sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 3.4.1 $Z/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$. Sejalan dengan ini, secara umum didapat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Contoh 3.4.3 Dalam $\mathbb{Z}_6$, tinjau subgrup $\langle [3]_6 \rangle$. Himpunan koset dari $\langle [3]_6 \rangle$ adalah

$$\{\langle [3]_6 \rangle, [1]_6 + \langle [3]_6 \rangle, [2]_6 + \langle [3]_6 \rangle\}$$

dan $\mathbb{Z}_6/\langle [3]_6 \rangle$ adalah grup berorder 3. Grup ini isomorpik dengan $\mathbb{Z}_3$. Jadi didapat $\mathbb{Z}_6/\langle [3]_6 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Catatan bahwa $[1]_6 + \langle [3]_6 \rangle$ membangun grup kuasi $\mathbb{Z}_6/\langle [3]_6 \rangle$.

Contoh 3.4.4 Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, tinjau subgrup

$$\langle[8]_{12}\rangle = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}.$$

Order grup kuasi $|\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle|$ adalah banyaknya koset dari $\langle[8]_{12}\rangle$ atau indeks dari $\langle[8]_{12}\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{12}$, yaitu $[\mathbb{Z}_{12} : \langle[8]_{12}\rangle] = |\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle| = 12/3 = 4$. Setiap grup berorder 4 isomorpik dengan $\mathbb{Z}_4$ atau V grup-4 Klein. Dihitung order elemen $1 + \langle[8]_{12}\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle$. Didapat

$$2(1 + \langle[8]_{12}\rangle) = 2 + \langle[8]_{12}\rangle, 3(1 + \langle[8]_{12}\rangle) = 3 + \langle[8]_{12}\rangle, 4(1 + \langle[8]_{12}\rangle) = 4 + \langle[8]_{12}\rangle = \langle[8]_{12}\rangle.$$

Jadi order $|1 + \langle[8]_{12}\rangle| = 4$. Dengan demikian $|1 + \langle[8]_{12}\rangle| = |\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle| = 4$ dan $\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle$ adalah siklik berorder 4. Jadi $\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle \cong \mathbb{Z}_4$. ●

Contoh 3.4.5 Dalam D_4 tinjau subgrup $\langle\rho^2\rangle = \{\rho_0, \rho^2\}$. Karena $\rho^2 \in Z(D_4)$, senter dari D_4, maka $\langle\rho^2\rangle$ adalah suatu subgrup normal. Indeks $[D_4 : \langle\rho^2\rangle] = 8/2 = 4$, jadi grup kuasi $D_4/\langle\rho^2\rangle$ mempunyai order $[D_4 : \langle\rho^2\rangle] = 4$. Grup kuasi

$$D_4/\left\langle\rho^2\right\rangle = \left\{\left\langle\rho^2\right\rangle, \rho\left\langle\rho^2\right\rangle, \tau\left\langle\rho^2\right\rangle, \rho\tau\left\langle\rho^2\right\rangle\right\},$$

semua elemen dari $D_4/\langle\rho^2\rangle$ yang bukan $\langle\rho^2\rangle$ mempunyai order 2, jadi $D_4/\langle\rho^2\rangle \cong V$, dimana V adalah grup-4 Klein. ●

Dua contoh yang baru saja dibahas memberikan beberapa fakta penting tentang grup kuasi yang dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.4.1 Misalkan H suatu subgrup normal dari suatu grup G. Maka

(1) Order dari suatu elemen aH dalam G/H adalah bilangan positip terkecil k yang memenuhi $a^k \in H$.

(2) Bila G berhingga, maka $|G/H| = |G|/|H|$.

(3) Bila G grup komutatif, maka G/H komutatif.

(4) Bila G siklik, maka G/H siklik.

Bukti

(1) Misalkan $aH \in G/H$. Karena H adalah elemen netral di G/H order dari elemen aH adalah bilangan positip terkecil k yang memenuhi $(aH)^k = H$, tetapi $(aH)^k = a^kH$. Hal ini berakibat $a^kH = H$ bila dan hanya bila $a^k \in H$

(2) Dengan menggunakan Teorema Lagrange 3.1.4 didapat $|G| = |H|\,[G : H]$, tetapi $|G/H| = [G : H]$. Sehingga didapat

$$|G| = |H|\,[G : H] = |H|\,|G/H|.$$

Jadi $|G/H| = |G|/|H|$.

(3) Misalkan G komutatif dan $aH, bH \in G/H$, didapat

$$aH\, bH = (ab)H = (ba)H = bH\, aH.$$

Terlihat bahwa G/H komutatif.

(4) Misalkan G siklik dan $\langle a \rangle$, dibuat pemetaan $\phi : G \to G/H$ diberikan oleh $\phi(x) = xH,\ \forall x \in G$. Pemetaan ϕ adalah homomorpisma. Sebab, diberikan sebarang $x, y \in G$, maka $x = a^i,\ y = a^j$ untuk beberapa $i, j \in \mathbb{Z}$. Didapat

$$\phi(xy) = \phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j}) = a^{i+j}H = (a^i)(a^j)H = a^iH\, a^jH = xH\, yH.$$

Selanjutnya, diberikan sebarang $zH \in G/H$, maka $z = a^n$ untuk beberapa $n \in \mathbb{Z}$, didapat $\phi(a^n) = a^nH = (aH)^n$. Tetapi $zH = a^nH$. Jadi $zH = (aH)^n \in \langle aH \rangle$. Dengan demikian $G/H \subseteq \langle aH \rangle$. Jelas bahwa $\langle aH \rangle \subseteq G/H$ sebab $\langle aH \rangle$ adalah subgrup dari G/H. Jadi $G/H = \langle aH \rangle$. Dengan demikian G/H adalah siklik. ✓

Kebalikan proposisi bagian (3) dan (4) yang baru saja dibahas tidak benar sebagaimana diberikan pada contoh berikut.

Contoh 3.4.6 Diberikan subgrup A_3 dalam S_3. Indeks $[S_3 : A_2] = 2$. Jadi grup kuasi S_3/A_3 mempunyai order 2, maka dari itu $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$. Sebagaimana telah diketahui $\mathbb{Z}_2$ komutatif dan siklik, sedangkan S_3 tidak komutatif dan tidak siklik. ●

Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$ adalah homomorpisma dimana $\phi(n) = [n]_7,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Maka $\ker(\phi) = 7\mathbb{Z}$. Dikonstruksi grup kuasi $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sebagaimana dalam Contoh 3.4.1, didapat $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$. Diinginkan memahami lebih baik informasi isomorpisma ini melalui hubungan diantara suatu homomorpisma, image dan kernelnya serta grup kuasi.

Bila $\phi : G \to G'$ sebarang pemetaan, maka untuk sebarang himpunan bagian $X \subseteq G$ image dari X oleh ϕ dinotasikan sebagai $\phi(X)$, yaitu

$$\phi(X) = \{x' \in G' \,|\, x' = \phi(x),\ \text{untuk beberapa } x \in X\}.$$

Sejalan dengan ini, untuk sebarang himpunan bagian $Y \subseteq G'$ preimage dari Y dinotasikan sebagai $\phi^{-1}(Y)$ diberikan oleh

$$\phi^{-1}(Y) = \{x \in G \,|\, \phi(x) \in Y\}.$$

Contoh 3.4.7 Dipilih $17 \in \mathbb{Z}$ dan gunakan homomorpisma

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7,\ \phi(n) = [n]_7,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dihitung ϕ^{-1} sebagai berikut:

$$\phi(17) = [17]_7 = [3]_7 \text{ dan } \phi^{-1}(\phi(17)) = [3]_7 + 7\mathbb{Z}.$$

Himpunan $[3]_7 + 7\mathbb{Z}$ adalah koset dari kernel dari ϕ, yaitu $7\mathbb{Z}$ dimana $[17]_7$ berada pada $[17]_7 + 7\mathbb{Z} = [3]_7 + 7\mathbb{Z}$. Hubungan ini berlaku untuk elemen yang lain di $\mathbb{Z}$. Catatan, khususnya bahwa $\phi^{-1}(\phi(0)) = 7\mathbb{Z} = \ker(\phi)$. ●

Proposisi 3.4.2 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma dengan $\ker(\phi) = K$. Maka untuk sebarang $g \in G$ didapat $\phi^{-1}(\phi(g)) = gK$.

Bukti Pilih $y \in G'$ yang memenuhi

$$\phi^{-1}(y) = \{x \in G \,|\, \phi(x) = y\}.$$

Hal ini berakibat bahwa untuk sebarang $g \in G$, maka $x \in \phi^{-1}(\phi(g))$ bila dan hanya bila $\phi(x) = \phi(g)$. Kondisi ini ekivalen dengan $\phi(g)^{-1}\phi(x) = e'$, dimana e' adalah elemen netral dari G'. Karena $\phi(g)^{-1}\phi(x) = \phi(g^{-1}x)$. Hal ini berakibat bahwa $x \in \phi^{-1}(\phi(g))$ bila dan hanya bila $\phi(g^{-1}x) = e'$, dengan kata lain bila dan hanya bila $g^{-1}x \in \ker(\phi) = K$. Kondisi ini ekivalen dengan $x \in gK$. Didapat $\phi^{-1}(\phi(g)) \subseteq gK$ dan $gK \subseteq \phi^{-1}(\phi(g))$. Jadi $\phi^{-1}(\phi(g)) = gK$ ✓

Kesimpulan 3.4.1 Diberikan suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$. Maka $\phi^{-1}(\phi(e)) = \ker(\phi)$.

Bukti Hal ini adalah akibat langsung dari Proposisi 3.4.2, karena $eK = K$. ✓

Definisi 3.4.2 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma. Image

$$\phi(G) = \{\phi(x) \,|\, x \in G\}$$

sebagaimana telah diketahui adalah subgrup dari G' dan sama dengan G' bila ϕ pemetaan pada. Dalam hal ini G' dinamakan suatu **Image Homomorpik** dari G. ✓

Teorema berikut menunjukkan bahwa ada suatu korespondensi diantara subgrup dan image homomorpik dari suatu grup.

Teorema 3.4.2 (**Teorema Isomorpisma Pertama**) Diberikan suatu homomorpisma

$$\phi : G \to G'$$

dengan $\ker(\phi) = K$. Maka

$$G/K \cong \phi(G).$$

Bukti Dikonstruksi suatu pemetaan $\chi : G/K \to \phi(G)$ sebagai berikut. Diberikan sebarang elemen $gK \in G/K$, maka gK adalah suatu koset dari K dalam G untuk beberapa $g \in G$. Juga, sebarang elemen dari $y \in \phi(G)$ memenuhi $y = \phi(g)$ untuk beberapa $g \in G$. Dengan demikian cara yang wajar untuk mendefinisikan suatu pemetaan yang dikonstruksi adalah

$$\chi(gK) = \phi(g),\ \forall gK \in G/K.$$

Perlu diselidiki bahwa pemetaan ini terdefinisi secara baik, dengan kata lain bila $g_1K = g_2K$, maka haruslah $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Untuk melihat hal ini, bila $g_1K = g_2K$, maka $g_2^{-1}g_1 \in K$. Hal ini berakibat

$$\phi(g_2)^{-1}\phi(g_1) = \phi(g_2^{-1}g_1) = e',$$

didapat $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Selanjutnya diberikan sebarang $g_1K, g_2K \in G/K$. Maka

$$\chi(g_1K\, g_2K) = \chi(g_1g_2K) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = \chi(g_1K)\chi(g_2K).$$

Terlihat bahwa χ adalah suatu homomorpisma. Berikutnya, diberikan sebarang elemen $g_1K, g_2K \in G/K$ dan misalkan $\chi(g_1K) = \chi(g_2K)$. Karena $\chi(g_1K) = \phi(g_1)$ dan $\chi(g_2K) = \phi(g_2)$, didapat $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Jadi, dengan menggunakan Proposisi 3.4.2 didapat

$$g_1K = \phi^{-1}(\phi(g_1)) = \phi^{-1}(\phi(g_2)) = g_2K$$

Hal ini menunjukkan bahwa χ satu-satu. Akhirnya, diberikan sebarang $y \in \phi(G)$ dapat dipilih $x \in G$ yang memenuhi $y = \phi(x)$. Karena $\chi(xK) = \phi(x)$, maka $y = \chi(xK)$. Hal ini menunjukkan bahwa χ adalah pada. ✓

Contoh 3.4.8 Tentukan apa bentuk dari grup kuasi $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$? Untuk menjawab pertanyaan ini konstruksi suatu pemetaan $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ diberikan oleh $\phi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ dimana S' grup diberikan dalam Contoh 2.1.15. Pemetaan ϕ adalah homomorpisma sebab, diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ didapat

$$\begin{aligned}
\phi(x + y) &= \cos(2\pi(x + y)) + i \sin(2\pi(x + y)) \\
&= \cos(2\pi x + 2\pi y) + i \sin(2\pi x + 2\pi y) \\
&= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) \\
&= \phi(x)\phi(y).
\end{aligned}$$

Pemetaan ϕ adalah pada sebab diberikan sebarang $(\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x) \in S^1$ dapat dipilih $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $\phi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, jadi $\phi(\mathbb{R}) = S^1$. Kernel dari ϕ adalah

$$\ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1\} = \{x = n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama didapat $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

Implikasi dari Teorema Isomorpisma Pertama adalah manifold. Misalnya, diinginkan mendapatkan semua homomorpisma yang mungkin dari suatu grup G ke grup G' yang berbeda dengan G. Tinjau subgrup normal K dari G dan tentukan dari masing-masing homomorpisma apakah G/K isomorpik dengan suatu subgrup dari G'.

Contoh 3.4.9 Misalkan ditentukan untuk mendapatkan semua homomorpisma taktrivial yang mungkin dari $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_4$. Kondisi bahwa ϕ taktrivial berarti bahwa diinginkan $\ker(\phi) = K$ suatu subgrup sejati dari S_3. Subgrup normal sejati dari S_3 hanya $\{e\}$ dan A_3. Tetapi $K = \{e\}$ suatu hal yang takmungkin, sebab $S_3/K = S_3$ dan fakta bahwa $S_3/K \cong \phi(S_3)$ berakibat $|\phi(S_3)| = 6$. Hal ini suatu yang mustahil, karena $\phi(S_3) \subseteq \mathbb{Z}_4$. Jadi yang mungkin hanya $K = A_3$. Dalam kasus ini, $\phi(S_3) \cong S_3/A_3$ adalah grup berorder 2. Grup $\mathbb{Z}_4$ adalah siklik, mempunyai subgrup tunggal berorder 2, yaitu $\langle [2]_4 \rangle = \{[0]_4, [2]_4\}$. Dengan demikian pemetaan ϕ diberikan oleh

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} [0]_4, & \text{bila } \sigma \in A_3 \\ [2]_4, & \text{bila } \sigma \notin A_3 \end{cases}$$

adalah suatu homomorpisma.

Contoh 3.4.10 Misalkan dicari semua homomorpisma taktrivial yang mungkin dari pemetaan $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_3$. Argumentasi dari contoh sebelumnya menunjukkan bahwa kemungkinan suatu subgrup dari $\mathbb{Z}_3$ adalah $\phi(S_3)$ dengan order 2. Tetapi $\mathbb{Z}_3$ tidak mempunyai subgrup yang berorder 2. Jadi tidak akan mungkin bisa dikonstruksi suatu homomorpisma dari S_3 ke $\mathbb{Z}_3$. ●

Contoh terakhir memberikan gambaran bagaimana dalam kasus grup berhingga bisa didapat bahwa akibat memanfaatkan teorema isomorpisma pertama; diberikan dua grup yang berbeda tidak akan mungkin bisa dikonstruksi suatu homomorpisma grup.

Proposisi 3.4.3 Misalkan G dan G' adalah grup berhingg a dan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma. Maka $|\phi(G)|$ membagi $|G|$ dan $|G'|$.

Bukti Himpunan $\phi(G)$ adalah subgrup dari G', dengan menggunakan teorema Lagrange didapat $|\phi(G)|$ membagi $|G'|$. Dari teorema isomorpisma pertama didapat $|\phi(G)| = |G/\ker(\phi)|$, tetapi $|G/\ker(\phi)| = |G|/|\ker(\phi)|$. Jadi $|\phi(G)| = |G|/|\ker(\phi)|$ atau $|G| = |\phi(G)||\ker(\phi)|$. Dengan demikian $|\phi(G)|$ membagi $|G|$. ✓

Diberikan suatu grup G dan suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$, maka $K = \ker(\phi)$ adalah subgrup normal dari G. Teorema berikut membahas hal yang sebaliknya juga benar.

Teorema 3.4.3 Diberikan suatu grup G dan suatu subgrup normal K dari G, ada suatu homomorpisma pada $\pi : G \to G/K$ dimana $\ker(\pi) = K$. Pemetaan π dinamakan **natural** homomorpisma.

Bukti Dikonstruksi π sebagai berikut: untuk setiap $g \in G$ berlaku $\pi(g) = gK \in G/K$. Karena $K \lhd G$. Sebagaimana telah diketahui G/K adalah grup dengan operasi $g_1K\,g_2K = g_1g_2K$. Maka π adalah suatu homomorpisma, sebab

$$\pi(g_1g_2) = g_1g_2K = (g_1K)(g_2K) = \pi(g_1)\pi(g_2),\ \forall g_1, g_2 \in G.$$

Dalam grup G/K elemen netral adalah K. Sehingga didapat $x \in \ker(\pi)$ bila dan hanya bila $\pi(x) = K$ dan karena $\pi(x) = xK$, didapat $x \in \ker(\pi)$ bila dan hanya bila $xK = K$. Hal ini ekivalen dengan $x \in K$. Jadi $\ker(\pi) = K$. Pemetaan π adalah pada, sebab setiap elemen dari G/K mempunyai bentuk gK untuk beberapa $g \in G$. ✓

Teorema terakhir yang baru saja dibahas memfaktorkan sebarang homomorpisma dalam dua langkah. Diberikan suatu homomorpisma $\phi : G \to G'$ dengan $\ker(\phi) = K$, misalkan $\pi : G \to G/K$ adalah homomorpisma dari Teorema 3.4.3 dan $\chi : G/K \to G'$ adalah homomorpisma dalam bukti dari Teorema 3.4.2. Maka karena untuk sebarang $g \in G$ didapat $\chi(\pi(g)) = \chi(gK) = \phi(g)$, maka $\phi = \chi \circ \pi$ atau diagram diberikan oleh Gambar 3.1 adalah komutatif. Pada akhir bagian ini dibahas teorema Cauchy khusus hanya untuk grup komutatif. Teorema Cauchy yang umum menyatakan bila G suatu grup G mempunyai order berhingga dan p adalah bilangan prima yang membagi order G, maka G mempunyai suatu elemen berorder p. Teorema ini dibahas pada bab yang lainnya.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/K \arrow[ur, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

Gambar 3.1: Diagram Komutatif

Teorema 3.4.4 (**Teorema Cauchy untuk grup komutatif**) Diberikan G suatu grup komutatif mempunyai order berhingga dan p adalah bilangan prima yang membagi order G, maka G mempunyai suatu elemen berorder p.

Bukti Digunakan induksi pada $|G|$. Bila $|G| = 1$ tidak ada yang perlu dibuktikan. Bila $|G| = 2$ atau 3, maka G siklik, dan pernytaan dalam teorema benar. Asumsikan pernyataan benar untuk semua grup komutatif yang mempunyai order lebih kecil dari $|G|$. Bila G tidak mempunyai subgrup sejati tak-trivial, maka G adalah siklik, maka dengan menurut Teorema 2.3.4 pernyataan teorema benar. Selanjutnya, misalkan H adalah suatu subgrup sejati tak-trivialdari G. Bila p membagi $|H|$, maka karena H adalah grup komutatif yang memenuhi $|H| < |G|$, menurut hipotisis induksi ada suatu elemen $a \in H \subset G$ yang berorder p. Dengan demikian benar pernyataan teorema. Berikutnya asumsikan bahwa p tidak membagi $|H|$. Karena G komutatif, maka $H \lhd G$ dan G/H adalah suatu grup komutatif yang memenuhi $|G/H| = |G|/|H|$. Karena H taktrivial, maka $|G|/|H| < |G|$ dan karena p membagi $|G|$ dan tidak membagi $|H|$, maka p membagi $|G|/|H|$. Jadi dengan hipotisis induksi ada suatu elemen $X \in G/H$ yang mempunyai order p. Himpunan X mempunyai bentuk bH untuk beberapa $b \in G$, dimana $bH \neq H$ dan $(bH)^p = H$. Jadi $b \notin H$, tetapi karena $b^pH = (bH)^p = H$, maka $b^p \in H$. Misalkan $c = b^{|H|} \in G$. Maka

$$c^p = \left(b^{|H|}\right)^p = (b^p)^{|H|} = e \ \text{(karena } b^p \in H\text{)}.$$

Tinggal menunjukkan bahwa $c \neq e$. Andaikan $c = e$, maka $e = b^{|H|}$ sehingga didapat

$$H = eH = b^{|H|}H = (bH)^{|H|}$$

dan menurut Kesimpulan 2.3.1, maka p harus membagi $|H|$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan asumsi bahwa p tidak membagi $|H|$. Jadi haruslah $c \neq e$ dan $|c| = p$. Lengkap sudah bukti.

Teorema 3.4.5 (**Teorema Isomorpisma Kedua**) Bila H dan K adalah subgrup dari suatu grup G dengan $H \lhd G$, maka $H \cap K \lhd K$ dan

$$K/(H \cap K) \cong HK/H.$$

Bukti Menurut Proposisi 3.3.3, maka HK adalah subgrup dari G. Jelas bahwa $H < HK$, selanjutnya ditunjukkan bahwa $H \lhd HK$ sebagai berikut: Bila $H \leq S \leq G$, maka karena

$H \lhd G$ dengan menggunakan Teorema 3.3.2 didapat $gHg^{-1} \subseteq H$ untuk semua $g \in G$, juga khususnya $gHg^{-1} \subseteq H$ untuk semua $g \in S$. Jadi $H \lhd S$. Dengan demikian untuk $S = HK$ didapat $H \lhd HK$. Diberikan sebarang $xH \in HK/H$, maka $xH = (hk)H$ untuk beberapa $h \in H$ dan beberapa $k \in K$. Tetapi

$$hk = (kk^{-1})hk = k(k^{-1}hk) = kh'$$

dimana $k^{-1}hk = h' \in H$ sebab $H \lhd HK$. Sehingga didapat

$$xH = (hk)H = kh'H = k(h'H) = kH, \text{ untuk beberapa } k \in K.$$

Dengan demikian pemetaan $\phi : K \to HK/H$ didefinisikan oleh $\phi(k) = kH$, $\forall k \in K$ adalah pemetaan pada. Pemetaan ϕ adalah pembatasan dari pemetaan natural $\pi : G \to G/H$. Jadi $\phi(k) = \pi(k) = kH, \forall k \in K \subseteq G$. Dengan demikian ϕ adalah homomorpisma. Karena $\ker(\pi) = H$, maka $\ker(\phi) = H \cap K$. Jadi $H \cap K \lhd K$. Dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama didapat $K/(H \cap K) \cong HK/H$. ✓

Teorema isomorpisma kedua menghasilkan $K/(H \cap K) \cong HK/H$ hal berakibat

$$|K/(H \cap K)| = |HK/H| \text{ atau } |HK| = |H|\,|K|/|H \cap K|.$$

Hal ini sesuai dengan hasil dalam Teorema 3.3.5.

Teorema 3.4.6 (**Teorema Isomorpisma Ketiga**) Bila H dan K adalah subgrup normal dari suatu grup G dan $K \leq H$, maka $H/K \lhd G/K$ dan

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

Bukti definisikan pemetaan $\phi : G/K \to G/H$ oleh $\phi(aK) = aH$, $\forall aK \in G/K$, pemetaan ini terdefinisi dengan baik sebab: bila untuk $a' \in G$ dan $a'K = aK$, maka $a^{-1}a' \in K \subseteq H$. Jadi $a^{-1}a' \in H$ akibatnya $a'H = aH$. Dengan demikian bila $aK = a'K$, maka

$$\phi(a'K) = a'H = aH = \phi(aK).$$

Jadi ϕ terdefinisi dengan baik. Selanjutnya diberikan sebarang $aK, bK \in G/K$ didapat

$$\phi(aK\,bK) = \phi((ab)K) = (ab)H = aH\,bH = \phi(aK)\phi(bK).$$

Jadi ϕ adalah homomorpisma. Diberikan sebarang $aH \in G/H$, dapat dipilih $aK \in G/K$ yang memenuhi $\phi(aK) = aH$. Jadi ϕ adalah homomorpisma pada dengan demikian $\phi(G/K) = G/H$. Karena $aH = H$ bila dan hanya bila $a \in H$, maka $\ker(\phi) = H/K$. Jadi $H/K \lhd G/H$ dan dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama didapat

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H. \quad ✓$$

Latihan

Latihan 3.4.1 Tentukan nilai n sedemikian hingga $\mathbb{Z}_n$ isomorpik dengan grup kuasi siklik berikut:

1. $\mathbb{Z}_6/\langle[2]_6\rangle$ 2. $\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle$ 3. $\mathbb{Z}_{15}/\langle[6]_{15}\rangle$ 4. S_4/A_4 5. $D_4/\langle\rho\rangle$ 6. $Q_8/\langle\mathbf{j}\rangle$.

Latihan 3.4.2 Dapatkan order elemen dari grup kuasi berikut:

1. $[3]_{12} + \langle[8]_{12}\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{12}/\langle[8]_{12}\rangle$.

2. $[3]_{15} + \langle[6]_{15}\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{15}/\langle[6]_{15}\rangle$.

3. $[2]_{15} + \langle[6]_{15}\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{15}/\langle[6]_{15}\rangle$.

4. $\mathbf{i}\langle\mathbf{j}\rangle$ dalam $Q_8/\langle\mathbf{j}\rangle$.

5. $\rho\langle\rho^2\rangle$ dalam $D_4/\langle\rho^2\rangle$.

Latihan 3.4.3 Dapatkan semua homomorpisma taktrivial yang mungkin dari grup berikut:

1. $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

2. $\phi : D_4 \to \mathbb{Z}_4$.

3. $\phi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{10}$.

4. $\phi : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_5$.

Latihan 3.4.4 Misalkan $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorpisma pada dengan $\ker(\phi) = K$ dan H' adalah suatu subgrup dari G'. Tunjukkan bahwa ada suatu subgrup H dari G sedemikian hingga $K \subseteq H$ dan $H/K \cong H'$.

Latihan 3.4.5 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup G sedemikian hingga $H \lhd G, K \lhd G, [G : H] = 5$ dan $[G : K] = 3$. Tunjukkan bahwa untuk semua $g \in G$ didapat $g^{15} \in H \cap K$.

Latihan 3.4.6 Diberikan dihedral grup

$$D_6 = \{\rho^i\tau^j \,|\, 0 \leq i < 6, 0 \leq j < 2\},$$

dimana $\rho^6 = \tau^2 =$ identitas dan $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$. Tunjukkan bahwa
(a). $\langle\rho^3\rangle \lhd D_6$. (b). $D_6/\langle\rho^3\rangle \cong S_3$.

Latihan 3.4.7 Diberikan dihedral grup

$$D_n = \{\rho^i\tau^j \,|\, 0 \leq i < n, 0 \leq j < 2\},$$

dimana $\rho^n = \tau^2 =$ identitas dan $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$. Untuk sebarang k pembagi dari n tunjukkan bahwa
(a). $\left\langle\rho^k\right\rangle \lhd D_n$. (b). $D_n/\left\langle\rho^k\right\rangle \cong D_k$.

Latihan 3.4.8 Misalkan $Z(G)$ adalah senter dari suatu grup G. Tunjukkan bahwa
(a). $Z(G) \lhd G$ (b). Bila $G/Z(G)$ siklik, maka G adalah komutatif.

Latihan 3.4.9 Misalkan $Z(G)$ adalah senter dari suatu grup G. Tunjukkan bahwa bila $[G : Z(G)] = p$ dengan p adalah prima, maka G adalah komutatif.

Latihan 3.4.10 Misalkan G adalah suatu grup dan $S \subset G$ dengan $S \neq \emptyset$. Didefinisikan $\langle S \rangle$ adalah subgrup terkecil dari G yang memuat S dinamakan subgrup dari G **dibangun** oleh S. Tunjukkan bahwa $\langle S \rangle$ exist.

Latihan 3.4.11 Tunjukkan bahwa dalam S_4 subgrup yang dibangun oleh $S = \{(1\,2), (1\,2\,3\,4)\}$ adalah S_4.

Latihan 3.4.12 Misalkan G adalah suatu grup dan

$$S = \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \,|\, x, y \in G \right\}.$$

Misalkan $N = \langle S \rangle$, dalam hal ini N dinamakan subgrup **komutator** dari G. Maka tunjukkan bahwa:

(a) $N \lhd G$.

(b) G/N komutatif.

(c) Bila H suatu normal subgrup dari G dan G/H komutatif, maka $N \subseteq H$.

(d) Bila H suatu subgrup dari G dengan $N \subseteq H$, maka $H \lhd G$.

Latihan 3.4.13 Dapatkan semua subgrup komutator dari S_3.

Latihan 3.4.14 Dapatkan semua subgrup komutator dari D_4.

Digraf Cayley

Misalkan G suatu grup berhingga dan S suatu himpunan bagian dari G yang membangun G. Suatu himpunan dari persamaan yang dipenuhi oleh generator yaitu secara lengkap menentukan tabel operasi biner dari G dinamakan himpunan **relasi penentu**.

Contoh, D_4 dibangun oleh $S = \{\rho, \tau\}$ dengan relasi penentu $\rho^4 = \tau^2 = \rho_0$ dan $\rho\tau = \tau\rho^{-1}$. Grup kuoternion $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{ij}\}$ dibangun oleh $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ dengan relasi penentu $\mathbf{i}^4 = 1, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2$ dan $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$.

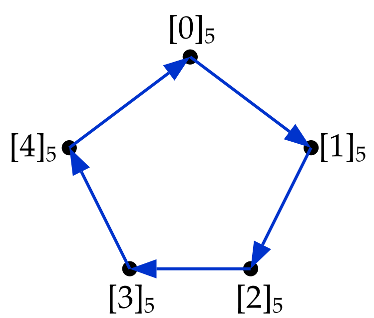
Diberikan suatu himpunan S yang membangun suatu grup berhingga G. Dikonstruksi suatu **graf berarah** atau **digraf Cayley** dari G yang berkaitan dengan S sebagai berikut:

(1) Masing-masing elemen dari G disajikan oleh titik.

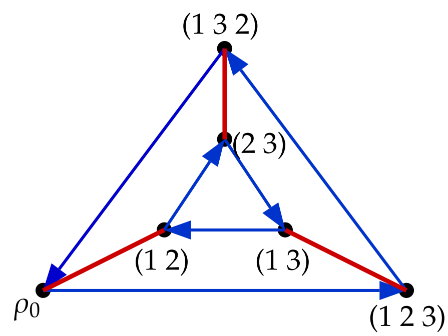
(2) Masing-masing elemen dari S disajikan oleh garis berarah.

(3) Bila $c \in S$ disajikan oleh garis berarah $\rightarrow$, maka untuk $a, b \in G$, $a\bullet \rightarrow \bullet b$ mempunyai arti $ac = b$ di G.

(4) Bila $c \in S$ dengan $c^{-1} = c$, maka tanda panah dihapus dari garis yang menyajikan c.



Digraf Cayley dari $\mathbb{Z}_5$ dengan $S = \{[1]_5\}$ dan $\rightarrow$ representasi dari $[1]_5$.



Digraf Cayley dari grup simetri S_3 dengan $S = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ dan $\rightarrow$ representasi dari $(1\ 2\ 3)$, sedangkan $-$ representasi dari $(1\ 2)$.

Perhatikan bahwa dari gambar diagram terlihat bahwa grup simetri S_3 tidak komutatif.

Latihan

Latihan 3.4.15 Tunjukkan bahwa digraf Cayley dari suatu grup harus memenuhi empat kondisi berikut:

(1) Untuk setiap pasangan titik x dan y ada suatu lintasan yaitu suatu barisan garis terhubung yang mulai dari x berakhir pada y.

(2) Setidaknya ada satu garis dari suatu titik x ke suatu titik y.

(3) Pada masing-masing titik x ada tepat satu garis dari masing-masing jenis garis yang dimulai dari x dan ada tepat satu garis dari masing-masing macam garis yang berakhir pada x.

(4) Bila dua lintasan berbeda dimulai dari suatu titik x dan keduanya berakhir pada titik y, maka dua lintasan yang sama dimulai dari sebarang titik z akan berakhir pada titik yang sama yaitu w.

Latihan 3.4.16 Konstruksi digraf Cayley dari grup G dan himpunan pembangun S berikut:

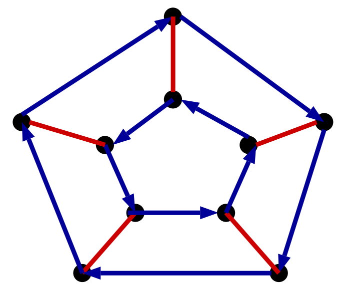
(1) $G = \mathbb{Z}_6$, $S = \{[1]_6\}$.

(2) $G = \mathbb{Z}_6$, $S = \{[2]_6, [3]_6\}$.

(3) $G = S_3$, $S = \{(1\ 2), (2\ 3)\}$.

(4) $G = D_4$, $S = \{\rho, \tau\}$.

(5) $G = A_4$, $S = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$.



Gambar 3.2: Digraf Cayley

Latihan 3.4.17 Identifikasi grup dan himpunan pembangun dan relasi penentu yang merepresentasikan digraf Cayley diberikan oleh Gambar 3.2.

3.5 Automorpisma

Telah dikaji isomorpisma diantara satu grup dan grup lainnya. Pada bagian ini ditinjau isomorpisma diantara suatu grup dan grup itu sendiri. Suatu hal yang akan dibahas bahwa himpunan isomorpisma ini membentuk suatu grup dalam suatu cara yang wajar.

Contoh 3.5.1 Misalkan akan ditentukan semua isomorpisma yang mungkin dari $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$. Sebagaimana telah diketahui $\mathbb{Z}_6$ adalah siklik dan $[1]_6$ adalah suatu generator dari $\mathbb{Z}_6$, yaitu $\mathbb{Z}_6 = \langle [1]_6 \rangle$. Maka menurut Proposisi 3.2.6 didapat, bila ϕ adalah suatu isomorpisma dari G ke G', maka $|\phi(a)| = |a|$ untuk semua $a \in G$. Jadi $|\phi([1]_6)| = |[1]_6| = 6$. Dengan demikian $\phi([1]_6)$ haruslah suatu generator dari $\mathbb{Z}_6$, maka dari itu $\phi([1]_6) = [1]_6$ atau $\phi([1]_6) = [5]_6$. Juga, sekali $\phi([1]_6)$ diketahui, maka ϕ secara lengkap dapat ditentukan; sebab $\phi([2]_6) = 2\phi([1]_6), \phi([3]_6) = 3\phi([1]_6)$ dan seterusnya. Jadi, ada tepat dua isomorpisma. Misalkan ϕ_0 adalah pemetaan identitas, yaitu

$$\phi_0([n]_6) = [n]_6, \ \forall [n]_6 \in \mathbb{Z}_6$$

dan ϕ_1 adalah isomorpisma yang diberikan oleh

$$\phi_1([n]_6) = 5[n]_6, \ \forall [n]_6 \in \mathbb{Z}_6.$$

Sekarang, tinjau himpunan $\{\phi_0, \phi\}$ dengan operasi komposisi fungsi, didapat $\phi_0 \circ \phi_0 = \phi_0$ dan $\phi_0 \circ \phi_1 = \phi_1 \circ \phi_0 = \phi_1$. Lalu bagaimana komposisi $\phi_1 \circ \phi_1$? Untuk menjawab pertanyaan ini cukup ditentukan nilai dari $[1]_6$ terhadap $\phi_1 \circ \phi_1$ sebagai berikut:

$$\phi_1 \circ \phi_1([1]_6) = \phi_1(\phi_1([1]_6)) = \phi_1([5]_6) = 5[5]_6 = [25]_6 = [1]_6 = \phi_0([1]_6).$$

Jadi, $\phi_1 \circ \phi_1 = \phi_0$. Dengan demikian himpunan $\{\phi_0, \phi_1\}$ terhadap operasi biner komposisi fungsi adalah grup siklik berorder 2. ●

Definisi 3.5.1 Misalkan G adalah suatu grup. Suatu isomorpisma $\phi : G \to G$ dinamakan **automorpisma** dari G dan himpunan dari semua automorpisma dari G dinotasikan oleh $\mathrm{Aut}(G)$. ✓

Telah ditunjukkan dalam Contoh 3.5.1 bahwa himpunan $\mathrm{Aut}(G)$ adalah suatu grup. Teorema berikut dibuktikan bahwa automorpisma dari suatu grup selalu membentuk suatu grup.

Teorema 3.5.1 Misalkan G adalah suatu grup. Maka $\mathrm{Aut}(G)$ membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi fungsi.

Bukti Sifat tertutup, misalkan $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ dan tinjau $\phi_1 \circ \phi_2$. Dalam Teorema 1.1.1 telah ditunjukkan bahwa komposisi dari fungsi satu-satu menghasilkan fungsi satu-satu dan komposisi dari fungsi pada menghasilkan fungsi pada. Jadi komposisi $\phi_1 \circ \phi_2$ adalah satu-satu pada dengan demikian untuk menunjukkan $\phi_1 \circ \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ tinggal menunjukkan $\phi_1 \circ \phi_2$ adalah homomorpisma. Tetapi hal ini telah ditunjukkan dalam Proposisi 3.2.5. Sifat assosiatif juga telah ditunjukkan dalam Teorema 1.1.1 bahwa komposisi dari fungsi adalah asosiatif. Sifat identitas, misalkan ϕ_0 fungsi identitas pada G, yaitu $\phi_0(a) = a$, $\forall a \in G$. Juga dalam Proposisi 3.2.5 telah ditunjukkan bahwa, pemetaan identitas adalah suatu isomorpisma grup pada G. Jadi $\phi_0 \in \mathrm{Aut}(G)$ dan memenuhi $\phi \circ \phi_0 = \phi = \phi_0 \circ \phi$, $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Sifat invers, untuk $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, maka menurut Teorema 1.1.3 $\phi^{-1} : G \to G$ dijamin ada dan satu-satu pada yang memenuhi $\phi \circ \phi^{-1} = \phi_0 = \phi^{-1} \circ \phi$. Tinggal menunjukkan bahwa ϕ^{-1} adalah suatu homomorpisma. Misalkan $a, b \in G$ dan $c = \phi^{-1}(a), d = \phi^{-1}(b)$. Didapat $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. Karena ϕ homomorpisma, maka $\phi(cd) = \phi(c)\phi(d) = ab$. Hal ini berakibat $\phi^{-1}(ab) = cd = \phi^{-1}(a)\phi^{-1}(b)$. Hal ini menunjukkan bahwa ϕ^{-1} adalah suatu homomorpisma sebagaimana yang diinginkan. Dengan demikian lengkap sudah bukti. ✓

Contoh 3.5.2 Akan ditentukan $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. Karena $\mathbb{Z}_8$ siklik dengan generator $[1]_8$, maka bila ϕ sebarang automorpisma haruslah $|\phi([1]_8)| = |[1]_8| = 8$ dan $\phi([1]_8)$ juga suatu generator dari $\mathbb{Z}_8$. Yaitu $\phi([1]_8) = [1]_8$ atau $\phi([1]_8) = [3]_8$ atau $\phi([1]_8) = [5]_8$ atau $\phi([1]_8) = [7]_8$. Tetapi, karena sekali nilai $\phi([1]_8)$ ditentukan, maka ϕ secara lengkap dapat ditentukan. Sebab secara umum $\phi([n]_8) = n\phi([1]_8)$ dan pemetaan ini adalah isomorpisma. Jadi terdapat tepat empat automorpisma. Yaitu pemetaan identitas $\phi_1([n]_8) = [n]_8$, $\forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$, pemetaan $\phi_3([n]_8) = 3[n]_8$, $\forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$, pemetaan $\phi_5([n]_8) = 5[n]_8$, $\forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$ dan pemetaan $\phi_7([n]_8) = 7[n]_8$, $\forall [n]_8 \in \mathbb{Z}_8$. Dalam hal ini, didapat

$$\phi_3 \circ \phi_5([n]_8) = \phi_3(\phi_5([n]_8)) = \phi_3(5[n]_8) = 15[n]_8 = 7[n]_8.$$

Jadi $\phi_3 \circ \phi_5 = \phi_7 \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. Secara umum, didapat bahwa bila $ij \equiv k \mod 8$, maka $\phi_i \circ \phi_j = \phi_k \in \text{Aut}(Z_8)$. Dari apa yang dibahas ini, pemetaan $T(\phi_i) = i$ memberikan suatu isomorpisma diantara $\text{Aut}(Z_8)$ dengan grup perkalian $\mathbb{U}(8)$. ●

Contoh yang baru saja dibahas dapat digeneralisasi untuk sebarang grup siklik G sebagaimana ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.5.2 Diberikan grup siklik G dengan order n. Maka $\text{Aut}(G) \cong \mathbb{U}(n)$.

Bukti Didefinisikan suatu pemetaan $T : \text{Aut}(G) \to \mathbb{U}(n)$ sebagai berikut. Misalkan $G = \langle a \rangle$ dimana $|a| = n$. Tinjau $\phi \in \text{Aut}(G)$, maka untuk sebarang $g \in G$ didapat $g = a^i$ untuk beberapa bilangan bulat i dengan $0 \leq i < n$ dan $\phi(g) = \phi(a^i) = \phi(a)^i$. Terlihat bahwa sekali nilai ϕ ditetapkan maka ϕ secara lengkap dapat ditentukan. Sehingga didapat $|\phi(a)| = |a| = n$. Terlihat bahwa $\phi(a)$ adalah suatu generator dari G. Maka dari itu menurut Kesimpulan 2.3.4 $\phi(a) = a^r$ untuk berapa r dimana $\text{fpb}(n, r) = 1$ selanjutnya gunakan Teorema 2.3.1 didapat $a^r = a^s$ bila dan hanya bila $s \equiv r \mod n$. Jadi ada suatu $s \in \{q \,|\, \text{fpb}(n, q) = 1, 0 \leq q < n\} = \mathbb{U}(n)$ yang memenuhi $\phi(a) = a^s$. Dari yang telah dibahas, dapat ditentukan $T(\phi) = s$, $\forall \phi \in \text{Aut}(G)$, dimana $\phi(a) = s$ dan $s \in \mathbb{U}(n)$. Berikutnya ditunjukkan bahwa T suatu homomorpisma. Bila $\phi, \psi \in \text{Aut}(G)$ dengan $\phi(a) = a^s$ dan $\psi(a) = a^t$ dimana $s, t \in \mathbb{U}(n)$, maka didapat

$$\psi \circ \phi(a) = \psi(\phi(a)) = \psi(a^s) = a^{st} = a^u,$$

dimana $u \equiv st \mod n$. Jadi

$$T(\psi \circ \phi) = u = st \mod n = ts \mod n = T(\psi)T(\phi).$$

Pemetaan T adalah satu-satu, sebab bila $T(\phi) = T(\psi)$, maka

$$\phi(a) = a^{T(\phi)} = a^{T(\psi)} = \psi(a),$$

jadi $\phi = \psi$. Juga, pemetaan T adalah pada, sebab diberikan sebarang $s \in \mathbb{U}(n)$, maka a^s adalah suatu generator dari G, dengan menggunakan Lemma 3.2.1 dapat dipilih pemetaan ϕ yang memenuhi $\phi(a^i) = a^{is} = (a^i)^s$ adalah suatu isomorpisma. Dari sini didapat $T(\phi) = s$. ✓

Untuk suatu grup siklik G telah diketahui apa bentuk dari $\text{Aut}(G)$. Untuk grup komutatif taksiklik situasinya lebik kompleks. Untuk grup takkomutatif, proposisi berikut menunjukkan bagaimana mengkonstruksi berbagai contoh automorpisma.

Proposisi 3.5.1 Misalkan G adalah suatu grup, $g \in G$ dan $T_g : G \to G$ pemetaan yang didefinisikan oleh $T_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall x \in G$. Maka $T_g \in \text{Aut}(G)$.

Bukti Pemetaan T_g adalah homomorpisma, sebab untuk semua $x, y \in G$ didapat

$$T_g(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = T_g(x)T_g(y).$$

Pemetaan T_g adalah satu-satu, sebab diberikan sebarang $x \in \ker(\phi)$ didapat

$$T_g(x) = gxg^{-1} = e,$$

maka $x = g^{-1}eg = g^{-1}g = e$. Jadi $\ker(\phi) = \{e\}$. Dengan demikian T_g satu-satu. Selanjutnya diberikan sebarang $y \in G$, pilih $x = g^{-1}yg \in G$ didapat $T_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}ygg^{-1} = y$. Jadi T_g adalah pada. ✓

Definisi 3.5.2 Misalkan G adalah suatu grup dan $g \in G$. Maka automorpisma T_g yang didefinisikan oleh $T_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall x \in G$ dinamakan suatu **inner automorpisma**. Himpunan semua inner automorpisma dinotasikan oleh $\text{Inn}(G)$. ✓

Proposisi 3.5.2 Misalkan G adalah suatu grup. Maka $\text{Inn}(G)$ adalah suatu subgrup dari $\text{Aut}(G)$.

Bukti Inner automorpisma T_e adalah elemen identitas, sebab untuk sebarang $x \in G$ didapat $T_e(x) = exe^{-1} = x$. Diberikan sebarang $T_g, T_h \in \text{Inn}(G)$ dan sebarang $x \in G$ didapat

$$T_g \circ T_h(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(hxh^{-1}) = (gh)x(h^{-1}g^{-1}) = (gh)x(gh)^{-1} = T_{gh}(x).$$

Jadi $T_g \circ T_h = T_{gh} \in \text{Inn}(G)$. Diberikan sebarang $T_g \in \text{Inn}(G)$, maka

$$T_{g^{-1}} \circ T_g(x) = T_{g^{-1}}(T_g(x)) = T_{g^{-1}}(gxg^{-1}) = g^{-1}gxg^{-1}g = x$$

dan

$$T_g \circ T_{g^{-1}} = T_g(T_{g^{-1}}(x)) = T_g(g^{-1}xg) = gg^{-1}xgg^{-1} = x.$$

Jadi $T_{g^{-1}} \circ T_g = T_e = T_g \circ T_{g^{-1}}$. Dengan demikian $T_{g^{-1}}$ adalah invers dari T_g. ✓

Contoh 3.5.3 Akan ditentukan $\text{Inn}(D_4)$. Perhatikan bahwa bila $g \in Z(D_4)$ dimana $Z(D_4)$ adalah senter dari D_4, maka T_g adalah identitas, sebab

$$T_g(x) = gxg^{-1} = gg^{-1}x = ex = x, \text{ untuk semua } x \in D_4.$$

Sebagaimana telah diketahui, senter $Z(D_4) = \{\rho_0, \rho^2\}$. Bila g sebarang elemen di D_4, didapat $T_{g\rho^2} = T_g \circ T_{\rho^2} = T_g$ (sebab T_{ρ^2} adalah identitas). Dapat dihitung

$$\begin{aligned}
T_\rho(\rho^i\tau) &= \rho(\rho^i\tau)\rho^{-1} = \rho\rho^i(\tau\rho^{-1}) = \rho\rho^i(\rho\tau) = \rho^{i+2}\tau \\
T_\tau(\rho^i\tau) &= \tau(\rho^i\tau)\tau^{-1} = \tau\rho^i = \rho^{-i}\tau \\
T_{\rho\tau}(\rho^i\tau) &= \rho\tau(\rho^i\tau)\tau^{-1}\rho^{-1} = \rho\tau\rho^{i-1} = \rho^{-i+2}\tau = T_\rho(\rho^{-i}\tau) = T_\rho(T_\tau(\rho^i\tau)) = T_\rho \circ T_\tau(\rho^i\tau).
\end{aligned}$$

Bila pemetaan identitas dinotasikan oleh T_0, maka $T_0, T_\rho, T_\tau, T_{\rho\tau}$ adalah inner automorpisma dari D_4. Perlu diperhatikan bahwa

$$D_4/Z(D_4) = \{Z(D_4), \rho Z(D_4), \tau Z(D_4), \rho\tau Z(D_4)\}.$$

Terlihat ada keterkaitan diantara inner automorpisma dari D_4 dengan koset dari senter $Z(D_4)$. Kenyataannya keterkaitan ini adalah suatu isomorpisma.

Hubungan diantara Inn(G) dan $Z(G)$ yang baru saja dibahas dalam contoh sebelumnya berlaku secara umum untuk sebarang grup.

Teorema 3.5.3 Untuk sebarang grup G, maka $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$ dimana $Z(G)$ adalah senter dari G.

Bukti Misalkan $\chi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ adalah pemetaan didefinisikan oleh $\chi(g) = T_g \in \mathrm{Inn}(G)$ untuk semua $g \in G$. Dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama, cukup ditunjukkan bahwa χ adalah homomorpisma pada dan $\ker(\chi) = Z(G)$. Pemetaan χ sebagaimana telah dibahas dalam Proposisi 3.5.2 adalah homomorpisma, sebab untuk sebarang $g, h \in G$ didapat

$$\chi(gh) = T_{gh} = T_g \circ T_h = \chi(g)\chi(h).$$

Lagipula, χ adalah pada sebab $\chi \in \mathrm{Inn}(G)$. Akhirnya, $g \in \ker(\chi)$ bila dan hanya bila $\chi(g) = T_g$ adalah pemetaan identitas. Kondisi ini ekivalen dengan $gxg^{-1} = x$ atau $xg = gx$ untuk semua $x \in G$. Jadi $g \in \ker(\chi)$ bila dan hanya bila g komutatif dengan setiap elemen $x \in G$, hal ini berarti bahwa $g \in Z(G)$.

Latihan

Latihan 3.5.1 Misalkan $\phi_1, \phi_3, \phi_5, \phi_7$ adalah automorpisma dari $\mathbb{Z}_8$ sebagaimana dalam Contoh 3.5.2. Tunjukkan bahwa bila $i\,j = k \mod 8$, maka $\phi_i \circ \phi_j = \phi_k$.

Latihan 3.5.2 Dengan notasi sebagaimana diberikan dalam Latihan 3.5.1, tunjukkan bahwa pemetaan $T : \mathrm{Aut}(G) \to \mathbb{U}(8)$ didefinisikan oleh $T(\phi_i) = i$ adalah suatu isomorpisma.

Latihan 3.5.3 Misalkan $G = \langle a \rangle$ adalah suatu grup siklik berorder 10. Uraikan secara langsung elemen-elemen dari Aut(G).

Latihan 3.5.4 Misalkan G adalah suatu grup komutatif. Tunjukkan bahwa pemetaan $\phi : G \to G$ didefinisikan oleh $\phi(x) = x^{-1}$ untuk semua $x \in G$ adalah suatu automorpisma dari G.

Latihan 3.5.5 Tentukan Aut($\mathbb{Z}$).

Latihan 3.5.6 Tunjukkan bahwa pemetaan $\phi : S_3 \to S_3$ didefinisikan oleh $\phi(x) = x^{-1}$ untuk semua $x \in S_3$ bukan suatu automorpisma.

Latihan 3.5.7 Misalkan G adalah suatu grup, $H \lhd G$ dan $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Tunjukkan bahwa $\phi(H) \lhd G$.

Latihan 3.5.8 Untuk sebarang grup G, tunjukkan bahwa $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

Latihan 3.5.9 Tunjukkan bahwa $\mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$.

Latihan 3.5.10 Untuk sebarang p prima, tunjukkan bahwa $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$.

Latihan 3.5.11 Misalkan Q_8 grup kuoternion. Tunjukkan bahwa $\mathrm{Inn}(Q_8) \cong V$ grup-4 Klein. (Petunjuk: tentukan dulu $Z(Q_8)$).

Latihan 3.5.12 Tunjukkan bahwa $\mathrm{Inn}(D_4) \cong V$ grup-4 Klein.

Latihan 3.5.13 Tunjukkan bahwa $|\mathrm{Aut}(D_4)| \leq 8$.

Latihan 3.5.14 Bila V adalah grup-4 Klein, maka tunjukkan bahwa

$$\mathrm{Aut}(V) \cong \mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z}_2).$$

Latihan 3.5.15 Tunjukkan bahwa $\mathrm{Aut}(D_4) \cong D_4$.

Latihan 3.5.16 Tunjukkan bahwa $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$.

Latihan 3.5.17 Tunjukkan bahwa $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Latihan 3.5.18 Untuk suatu grup G, suatu subgrup H dari G dinamakan suatu subgrup **karakteristik** dari G bila untuk semua $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ didapat $\phi(H) = H$.

1. Tunjukkan bahwa bila H adalah suatu subgrup karakteristik dari G, maka $H \lhd G$.
2. Tunjukkan bahwa bila H hanyalah subgrup dari G berorder n, maka H adalah subgrup karakteristik dari G.
3. Misalkan G adalah suatu grup, H suatu subgrup normal dari G dan K suatu subgrup karakteristik dari H. Tunjukkan bahwa K adalah subgrup normal dari G.
4. Misalkan G adalah suatu grup, H adalah suatu subgrup karakteristik dari G dan K adalah suatu subgrup karakteristik dari H. Tunjukkan bahwa K adalah suatu subgrup karakteristik dari G.

Bab 4

Produk Langsung dan Grup Abelian

Dalam Bab 2 sudah dipelajari apa grup dan dibahas contoh-contoh khusus dari berbagai grup penting seperti $\mathbb{Z}_n, \mathbb{U}(n), S_n, A_n, D_n, V$ dan Q_8. Selain itu juga grup matriks $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dan $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Dalam Bab 3 dibahas pemetaan diantara grup yang dinamakan homomorpisma grup setelah pembahasan teorema Lagrange. Dibahas peran subgrup normal dan hubungannya dengan homomorpisma grup dan grup kuasi. Dalam bab ini dibahas bagaimana mengkonstruksi grup baru dari grupyang sudah dikenal. Juga diidentifikasi grup yang terbentuk ini yang berkaitan dengan grup komutatif dan siklik dengan menggunakan teorema-teorema yang telah dibahas dalam Bab 2. Suatu teorema yang sangat penting diturunkan yang berguna untuk mendapatkan semua grup komutatif dari suatu grup berhingga.

4.1 Contoh-contoh dan definisi

Digunakan grup yang telah dibahas sebelumnya untuk mengkonstruksi grup baru dan dipelajari sifat-sifat grup baru ini yang diwarisi dari grup aslinya. Dimulai dari beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1.1 Tinjau himpunan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(a,b)\ a \in \mathbb{Z}_2, b \in \mathbb{Z}_3\}$. Elemen (a,b) adalah suatu pasangan dengan komponen pertama adalah $a = [0]_2$ atau $[1]_2$, sedangkan komponen kedua $b = [0]_3, [1]_3$ atau $[2]_3$. Jadi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ mempunyai tepat enam elemen,

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{([0]_2,[0]_3), ([0]_2,[1]_3), ([0]_2,[2]_3), ([1]_2,[0]_3), ([1]_2,[1]_3), ([1]_2,[2]_3)\}.$$

Dikenakan operasi secara komponen yang besesuaian pada himpunan ini, yaitu

$$(a,b) + (c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (a+c, b+d).$$

Jadi

$$([1]_2,[2]_3) + ([1]_2,[2]_3) = ([1+1]_2,[2+2]_3) = ([0]_2,[1]_3),$$

$$([1]_2, [2]_3) + ([1]_2, [1]_3) = ([1+1]_2, [2+1]_3) = ([0]_2, [0]_3)$$

dan

$$([0]_2, [0]_3) + ([1]_2, [2]_3) = ([0+1]_2, [0+2]_3) = ([1]_2, [2]_3).$$

Jelas bahwa sifat tertutup dipenuhi, elemen $([0]_2, [0]_3)$ adalah elemen netral dan invers dari (a, b) adalah $(-a, -b)$. ●

Contoh 4.1.2 Diberikan himpunan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b), | a, b \in \mathbb{Z}\}$, himpunan ini adalah takberhingga. Seperti dalam Contoh 4.1.1, operasi pada himpunan ini didefinisikan secara komponen yang bersesuaian. Maka sifat tertutup dipenuhi, elemen netral adalah $(0, 0)$ dan invers dari (a, b) adalah $(-a, -b)$. ●

Contoh 4.1.3 Tinjau himpunan $\mathbb{Z}_2 \times S_3 = \{(a, \sigma) \,|\, a \in \mathbb{Z}_2, \sigma \in S_3\}$. Disini operasi juga diberlakukan secara komponen yang bersesuaian, yaitu:

$$(a, \sigma) * (b, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} (a + b, \sigma \circ \tau).$$

Misalnya $([1]_2, \rho) * ([1]_2, \mu_1) = ([0]_2, \rho\mu_1) = ([0]_2, \mu_3)$. Elemen netral adalah $([0]_2, \rho_0)$ dan $([1]_2, \rho)^{-1} = ([1]_2, \rho_2), ([1]_2, \mu_i)^{-1} = ([1]_2, \mu_i)$. ●

Untuk sebarang grup G_1 dan G_2, mengikuti pembahasan contoh-contoh yang telah diberikan, maka himpunan pasangan dari elemen G_1 dan G_2 membentuk suatu grup sebagaimana dibuktikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.1 Misalkan $\langle G_1, \circ \rangle$ dan $\langle G_2, \diamond \rangle$ grup dan

$$G = G_1 \times G_2 = \{(a_1, a_2) \,|\, a_1 \in G_1, a_2 \in G_2\}.$$

Didefinisikan operasi $*$ pada $G_1 \times G_2$ secara komponen yang bersesuaian oleh

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \circ b_1, a_2 \diamond b_2), \ \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2.$$

Maka $\langle G, * \rangle$ adalah suatu grup.

Bukti (Tertutup) Diberikan $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$, dengan sifat tertutup untuk G_1 dan G_2 didapat $a_1 \circ b_1 \in G_1$ dan $a_2 \diamond b_2 \in G_2$. Jadi

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \diamond b_2) \in G_1 \times G_2.$$

(Asosiatif) Diberikan sebarang $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ dan (c_1, c_2) di $G_1 \times G_2$, menggunakan sifat asosiatif untuk G_1 dan G_2 didapat

$$\begin{aligned}
[(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] * (c_1, c_2) &= (a_1 \circ b_1, a_2 \diamond b_2) * (c_1, c_2) \\
&= ((a_1 \circ b_1) \circ c_1, (a_2 \diamond b_2) \diamond c_2) \\
&= (a_1 \circ (b_1 \circ c_1), a_2 \diamond (b_2 \diamond c_2)) \\
&= (a_1, a_2) * ((b_1 \circ c_1), (b_2 \diamond c_2)) \\
&= (a_1, a_2) * [(b_1, b_2) * (c_1, c_2)]
\end{aligned}$$

(Elemen netral) Misalkan e_1 elemen netral dari G_1 dan e_2 elemen netral dari G_2. Maka diberikan sebarang elemen $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ didapat

$$(e_1, e_2) * (a_1, a_2) = (e_1 \circ a_1, e_2 \diamond a_2) = (a_1, a_2) = (a_1 \circ e_1, a_2 \diamond e_2) = (a_1, a_2) * (e_1, e_2).$$

Jadi (e_1, e_2) adalah elemen netral dari $G_1 \times G_2$. (invers) Diberikan sebarang $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$, misalkan a_1^{-1} invers dari a_1 di G_1 dan a_2^{-1} adalah elemen invers dari a_2 di G_2. Didapat

$$(a_1, a_2) * (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 \circ a_1^{-1}, a_2 \diamond a_2^{-1}) = (e_1, e_2) = (a_1^{-1} \circ a_1, a_2^{-1} \diamond a_2) = (a_1^{-1}, a_2^{-1}) * (a_1, a_2).$$

Jadi invers dari (a_1, a_2) adalah (a_1^{-1}, a_2^{-1}). ✓

Definisi 4.1.1 Diberikan dua grup G_1 dan G_2, grup $G_1 \times G_2$ dengan operasi didefinisikan sebagaimana dalam Teorema 4.1.1 dinamakan **produk langsung** dari G_1 dan G_2. ✓

Pengkonstruksian produk langsung dapat dilakukan pada lebih dari dua grup. Bila G_1, G_2 dan G_3 adalah grup, maka dari Teorema 4.1.1 didapat $G_1 \times G_2$ adalah suatu grup terhadap operasi komponen yang bersesuaian. Lagi, Teorema 4.1.1 dapat digunakan pada dua grup $G_1 \times G_2$ dan G_3, didapat $(G_1 \times G_2) \times G_3$ terhadap operasi komponen yang bersesuaian adalah suatu grup. Proses dapat dilanjutkan untuk sebanyak berhingga grup sebagaimana dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.1.1 Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$ dengan n berhingga adalah grup. Maka

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in G_i, 1 \le i \le n\}$$

adalah grup terhadap operasi komponen yang bersesuaian

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) * (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 b_1, a_2 b_2 \ldots, a_n b_n).$$

Bukti Dilakukan secara induksi untuk$n$. Untuk $n = 1$ tidak ada yang perlu dibuktikan. Untuk $n = 2$ sudah terbukti dalam Teorema 4.1.1. Misalkan benar untuk $n = k$, maka $G = G_1 \times G_2 \times \cdots G_k$ adalah grup. Selanjutnya tinjau grup G dan G_{k+1}, maka menurut Teorema 4.1.1 didapat $G \times G_{k+1}$ adalah grup atau

$$(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k) \times G_{k+1} = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k \times G_{k+1}$$

adalah grup. Jadi pernyataan benar untuk $n = k + 1$. ✓

Perlu diperhatikan bahwa dalam pembahasan produk langsung berkaitan dengan sebanyak berhingga grup. Untuk sebanyak takhingga grup, konstruksi dapat dilakukan dengan cara yang sama. Tentunya hal ini lebih kompleks.

Berikut ini dibahas sifat-sifat dasar dari produk langsung $G_1 \times G_2$.

Proposisi 4.1.2 Misalkan G_1 dan G_2 adalah grup. Maka $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

Bukti Misalkan pemetaan $\phi : G_1 \times G_2 \to G_2 \times G_1$ didefinisikan oleh

$$\phi((a,b)) = (b,a),\ \forall (a,b) \in G_1 \times G_2.$$

Pemetaan ϕ adalah homomorpisma, sebab untuk sebarang $(a,b),(c,d) \in G_1 \times G_2$ didapat

$$\phi((a,b)(c,d)) = \phi((ac,bd)) = (bd,ac) = (b,a)(d,c) = \phi((a,b))\phi((c,d)).$$

Pemetaan ϕ satu-satu, sebab untuk $(a,b) \in \ker(\phi)$ bila dan hanya bila $(b,a) = (e_2,e_1)$. Jadi $\ker(\phi) = \{(e_1,e_2)\}$. Pemetaan ϕ adalah pada, hal ini langsung dari definisi ϕ. ✓

Proposisi yang baru saja dibahas menjelaskan bahwa urutan untuk produk langsung tidak jadi masalah. Hal ini benar untuk mengkonstruksi produk langsung lebih dari dua grup. Proposisi berikut menjelaskan syarat untuk grup produk langsung adalah komutatif.

Proposisi 4.1.3 Misalkan G_1 dan G_2 adalah grup. Maka $G_1 \times G_2$ komutatif bila dan hanya bila G_1 dan G_2 keduanya komutatif.

Bukti Diberikan sebarang (a,b) dan (c,d) di $G_1 \times G_2$, maka $(a,b)(c,d) = (ac,bd)$ dan $(c,d)(a,b) = (ca,db)$. Jadi untuk semua pasangan dari elemen-elemen di $G_1 \times G_2$,

$$(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b)$$

bila dan hanya bila $ac = ca$ untuk semua pasangan dari elemen-elemen di G_1 dan $bd = db$ untuk semua pasangan elemen-elemen di G_2. ✓

Contoh berikut membahas subgrup dari produk langsung $G_1 \times G_2$.

Contoh 4.1.4 Tinjau lagi grup $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ yang diberikan dalam Contoh 4.1.3. Misalkan $H = \mathbb{Z}_2 \times \{\rho_0\}$, dimana ρ_0 adalah elemen netral dari S_3 Jadi $H = \{([0]_2,\rho_0),([1]_2,\rho_0)\}$, dimana $([0]_2,\rho_0)$ adalah elemen netral dari $\mathbb{Z}_2 \times S_3$. Karena $([1]_2,\rho_0)([1]_2,\rho_0) = ([0]_2,\rho_0)$, maka H adalah suatu subgrup dari $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, faktanya adalah subgrup normal, sebab bila $(a,\sigma) \in \mathbb{Z}_2 \times S_3$, maka

$$\begin{aligned}(a,\sigma)([0]_2,\rho_0)(-a,\sigma^{-1}) &= ([0]_2,\rho_0) \in H\\(a,\sigma)([1]_2,\rho_0)(-a,\sigma^{-1}) &= ([1]_2,\rho_0) \in H\end{aligned}$$

Juga dapat dikonstruksi himpunan

$$K = \{[0]_2\} \times S_3 = \{([0]_2,\rho_0),([0]_2,\rho),([0]_2,\rho^2),([0]_2,\mu_1),([0]_2,\mu_2),([0]_2,\mu_3)\}.$$

Himpunan K adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_2 \times S_3$, sebab untuk sebarang $([0]_2,\sigma_1),([0]_2,\sigma_2) \in K$ didapat

$$([0]_2,\sigma_1)([0]_2,\sigma_2)^{-1} = ([0]_2,\sigma_1)([0]_2,\sigma_2^{-1}) = ([0]_2,\sigma_1\sigma_2^{-1}) \in K.$$

Selanjutnya, untuk sebarang $([0]_2, \sigma) \in K$ dan sebarang $(a, \tau) \in \mathbb{Z}_2 \times S_3$ didapat

$$(a, \tau)([0]_2, \sigma)(a, \tau)^{-1} = (a, \tau)([0]_2, \sigma)(-a, \tau^{-1}) = ([0]_2, \tau\sigma\tau^{-1}) \in K.$$

Jadi K adalah subgrup normal dari $\mathbb{Z}_2 \times S_3$. ●

Subgrup khusus dari produk langsung yang dibahas dalam Contoh 4.1.4 selalu merupakan subgrup normal. Hal ini ditunjukkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.1.4 Diberikan grup G_1 dan G_2 dengan e_i adalah elemen netral dari G_i untuk $i = 1, 2$. Maka

(1) $G_1 \times \{e_2\} \lhd G_1 \times G_2$ dan $\{e_1\} \times G_2 \lhd G_1 \times G_2$

(2) $(G_1 \times G_2)/(G_1 \times \{e_2\}) \cong G_2$ dan $(G_1 \times G_2)/(\{e_1\} \times G_2) \cong G_1$

Bukti

(1) Misalkan $H = G_1 \times \{e_2\}$ dan $(a, e_2), (b, e_2) \in H$. Maka

$$(a, e_2)(b, e_2)^{-1} = (a, e_2)(b^{-1}, e_2) = (ab^{-1}, e_2) \in H.$$

Jadi H adalah suatu subgrup dari $G_1 \times G_2$. Selanjutnya misalkan sebarang elemen $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ dan sebarang elemen $(b, e_2) \in H$, didapat

$$(a_1, a_2)(b, e_2)(a_1, a_2)^{-1} = (a_1, a_2)(b, e_2)(a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 b a^{-1}, e_2) \in H.$$

Jadi $H \lhd G_1 \times G_2$. Sejalan dengan apa yang telah dilakukan dapat ditunjukkan $\{e_1\} \times G_2 \lhd G_1 \times G_2$.

(2) Tinjau pemetaan $\phi : G_1 \times G_2 to G_2$ didefinisikan oleh $\phi((a_1, a_2)) = a_2$, $\forall (a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$. Maka ϕ adalah suatu homomorpisma, sebab untuk sebarang $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ didapat

$$\phi((a_1, a_2)(b_1, b_2)) = \phi((a_1 b_1, a_2 b_2)) = a_2 b_2 = \phi((a_1, a_2))\phi((b_1, b_2)).$$

Pemetaan ϕ adalah pada, sebab diberikan sebarang $y \in G_2$ dapat dipilih $(x, y) \in G_1 \times G_2$ untuk semua $x \in G_1$ yang memenuhi $\phi((x, y)) = y$. Terakhir, $(a_1, a_2) \in \ker(\phi)$ bila dan hanya bila $a_2 = e_2$ bila dan hanya bila $(a_1, a_2) \in G_1 \times \{e_2\}$. Dengan demikian $\ker(\phi) = H$. Jadi, dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama didapat $(G_1 \times G_2)/\ker(\phi) \cong G_2$. Bukti bagian kedua dapat dilakukan dengan cara yang sama. ✓

Latihan

Latihan 4.1.1 Untuk sebarang dua grup berhinggagrup!berhingga G_1 dan G_2, maka tentukan order dari $G_1 \times G_2$.

Latihan 4.1.2 Misalkan V adalah grup-4 Klein.Tunjukkan bahwa $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Latihan 4.1.3 Tunjukkan bahwa D_4 dan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ tidak isomorpik.

Latihan 4.1.4 Tunjukkan bahwa A_4 dan $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ tidak isomorpik.

Latihan 4.1.5 Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\left\langle(1,1)\right\rangle \cong \mathbb{Z}$. (Catatan bahwa: $\left\langle(1,1)\right\rangle = \{(a,a) \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$).

Latihan 4.1.6 Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\left\langle(1,2)\right\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Latihan 4.1.7 Dalam grup produk langsung $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ dapatkan suatu subgrup H sedemikian hingga $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Latihan 4.1.8 Dalam D_4 dapatkan suatu subgrup H yang memenuhi $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Latihan 4.1.9 Dalam $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ dapatkan subgrup H dan K yang mempunyai order 4 yang memenuhi H tidak isomorpik dengan K, tetapi $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/H \cong (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/K$.

Latihan 4.1.10 Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\left\langle(1,1,1)\right\rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Latihan 4.1.11 Misalkan $G_1, G_2, \ldots, G_n$ adalah grup dan ϕ suatu permutasi di S_n. Tunjukkan bahwa

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \cong G_{\phi(1)} \times G_{\phi(2)} \times \cdots \times G_{\phi(n)}.$$

Latihan 4.1.12 Misalkan G_1 dan G_2 adalah grup. Tunjukkan bahwa

$$Z(G_1 \times G_2) \cong Z(G_1) \times Z(G_2).$$

Latihan 4.1.13 Misalkan $H \lhd G_1$ dan $K \lhd G_2$. Tunjukkan bahwa

(a) $H \times K$ adalah suatu subgrup dari $G_1 \times G_2$.

(b) $H \times K \lhd G_1 \times G_2$.

(c) $(G_1 \times G_2)/(H \times K) \cong G_1/H \times G_2/K$.

Latihan 4.1.14 Dapatkan suatu subgrup bormal dari $\mathbb{Z}_4 \times Q_8$.

Latihan 4.1.15 Misalkan $\text{fpb}(r,s) = 1$. Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(rs) \cong \mathbb{U}(r) \times \mathbb{U}(s)$.

Latihan 4.1.16 Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(105) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

Latihan 4.1.17 Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Latihan 4.1.18 Dapatkan bilangan bulat r, s, t, u yang memenuhi

$$\mathbb{U}(360) \cong \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s \times \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_u.$$

4.2 Komputasi Order

Sebagaimana telah diketahui dalam Bab 3, bila dua grup adalah isomorpik maka kedua grup tersebut mempunyai banyak elemen yang sama dengan suatu order yang diberikan. Maka dari itu penting untuk mengetahui order elemen dari suatu grup. Dalam bagian ini dibahas bagaimana menghitung order dari suatu elemen dalam produk langsung dari berbagai grup dengan istilah order dari komponen.

Contoh 4.2.1 Dalam $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ tinjau elemen $([2]_4, [5]_6)$. Order elemen ini adalah bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $n([2]_4, [5]_6) = ([2n]_4, [5n]_6) = ([0]_4, [0]_6)$. Jadi $[2n]_4 = [0]_4$ dan $[5n]_6 = [0]_6$. tetapi $|[2]_4| = 2$, maka dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.1 didapat 2 membagi n. Juga karena $|[5]_6| = 6$, maka 6 membagi n. Jadi n adalah kelipatan persekutan dari 2 dan 6. Didapat

$$n = k_1\,\mathrm{kpk}(2,6) = k_1\,6, \;\; k_1 = 1, 2, \ldots$$

Tetapi

$$6|([2]_4, [5]_6) = ([12]_4, [30]_6) = ([0]_4, [0]_6),$$

maka dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.1 didapat n membagi 6 atau

$$6 = k_2 n, \;\; k_2 = 1, 2, \ldots$$

Sehingga didapat

$$\cancel{6} = k_2 n = k_2 k_1\,\cancel{6}, \;\; k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$$

Akibatnya

$$1 = k_2 k_1, \;\; k_1, k_2 = 1, 2, \ldots.$$

Jadi $k_1 = k_2 = 1$. Dengan demikian $n = k_1\,6 = 6$. Dengan demikian

$$|([2]_4, [5]_6)| = n = 6. \qquad \bullet$$

Contoh 4.2.2 Dalam $S_3 \times S_5$, tinjau elemen $(\rho, \sigma) \in S_3 \times S_5$, dimana $\rho = (1\ 2\ 3) \in S_3$ dan $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5) \in S_5$, maka $|\rho| = 3$ dalam S_3 dan $|\sigma| = 6$ dalam S_5. Seperti halnya dalam contoh sebelumnya, didapat $|(\rho, \sigma)| = \mathrm{kpk}(3, 6) = 6$. $\bullet$

Teorema 4.2.1 Misalkan G_1dan G_2 adalah grup dan $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$. Maka

$$|(a_1, a_2)| = \mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|).$$

Bukti Misalkan $n = |(a_1, a_2)|$ dan $r = \mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|)$. Karena $|a_1|$ membagi r dan juga $|a_2|$ membagi r, maka

$$(a_1, a_2)^r = (a_1^r, a_2^r) = (e_1, e_2).$$

Dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.1 didapat n membagi r. Jadi

$$r = k_1 n, \quad k_1 = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Dilain pihak
$$(a_1^n, a_2^n) = (a_1, a_2)^n = (e_1, e_2).$$
Didapat $a_1^n = e_1$ dan $a_2^n = e_2$, hal ini berakibat $|a_1|$ membagi n dan $|a_2|$ membagi n. Jadi n adalah kelipatan persekutuan dari $|a_1|$ dan $|a_2|$. Dengan demikian

$$n = k_2\,\mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|) = k_2 r, \quad k_2 = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Dari Persamaan (4.1) dan (4.2) didapat

$$\cancel{r} = k_1 n = k_1 k_2 \cancel{r}, \quad k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$$

Akibatnya $1 = k_1 k_2, \; k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$. Didapat $k_1 = k_2 = 1$, dengan demikian

$$\mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|) = r = k_1 n = n.$$

Kesimpulan 4.2.1 Misalkan $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ adalah produk langsung dari sebanyak berhingga grup. Maka order suatu elemen dalam G diberikan oleh

$$|(a_1, a_2, \ldots, a_n)| = \mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

Bukti Digunakan induksi untuk n. Untuk $n = 1$ tidak ada yang perlu dibuktikan. Untuk $n = 2$ sudah dibuktikan dalam Teorema 4.2.1. Jadi, misalkan Kesimpulan benar untuk produk dari k grup, dan tinjau suatu produk $k + 1$ grup berikut

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k \times G_{k+1} = (G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k) \times G_{k+1}.$$

Untuk melengkapi bukti, dari Teorema 4.2.1 didapat

$$\begin{aligned} |(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})| &= \mathrm{kpk}(|(a_1, a_2, \ldots, a_k)|, |a_{k+1}|) \\ &= \mathrm{kpk}(\mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|), |a_k|) \quad \text{(benar untuk produk dari } k \text{ grup)} \\ &= \mathrm{kpk}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|, |a_{k+1}|). \end{aligned}$$

Contoh 4.2.3 Misalnya akan ditentukan order $|([10]_{12}, [10]_{18})$ dalam $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$. Pertama secara terpisah ditentukan dulu order dari komponen-komponennya. Dengan menggunakan Teorema 2.3.2 didapat

$$|[10]_{12}| = 12/\mathrm{fpb}(12, 10) = 12/2 = 6$$

dan
$$|[10]_{18}| = 18/\mathrm{fpb}(18, 10) = 18/2 = 9.$$

Selanjutnya, gunakan Teorema 4.2.1 didapat

$$|([10]_{12}, [10]_{18})| = \mathrm{kpk}(6, 9) = 18.$$

Kesimpulan 4.2.2 Misalkan sebarang elemen $(r,s) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Maka

$$|(r,s)| = \text{kpk}(n/\text{fpb}(n,r), m/\text{fpb}(m,s)).$$

Bukti Hal ini langsung didapat dari Teorema 2.3.2 dan Teorema 4.2.1. ✓

Kesimpulan 4.2.3 Misalkan sebarang elemen $(r,s) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Maka

$$|(r,s)| \leq |([1]_n, [1]_m)| = \text{kpk}(n,m).$$

Bukti Dalam $\mathbb{Z}_n$, maka $|r|$ membagi n dan dalam $\mathbb{Z}_m$, $|s|$ membagi m. Jadi sebarang kelipatan persekutuan dari n dan m adalah suatu kelipatan persekutuan dari $|r|$ dan $|s|$, didapat

$$|(r,s)| = \text{kpk}(|r|, |s|) \leq \text{kpk}(n,m).$$

Selain itu, $|[1]_n| = n$ dan $|[1]_m| = m$, sehingga dengan menggunakan Teorema 4.2.1 didapat $|([1]_n, [1]_m)| = \text{kpk}(|[1]_n|, |[1]_m|) = \text{kpk}(n,m)$. ✓

Teorema berikut hasil dari beberapa kesimpulan yang telah dibahas dan memainkan suatu peranan yang penting dalam mengklasifikasikan grup komutatif berhingga.

Teorema 4.2.2 Grup produk langsung $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ isomorpik dengan grup siklik $\mathbb{Z}_{nm}$ bila dan hanya $\text{fpb}(n,m) = 1$.

Bukti $(\Rightarrow)$ Bila $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$, maka $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ adalah siklik. Dari Kesimpulan 4.2.3 didapat $([1]_n, [1]_m)$ adalah suatu generator dari $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Jadi haruslah $|([1]_n, [1]_m)| = nm$. Tetapi, lagi digunakan Kesimpulan 4.2.3 didapat

$$|([1]_n, [1]_m)| = \text{kpk}(n,m) = nm/\text{fpb}(n,m),$$

dari yang didapat ini haruslah $\text{fpb}(n,m) = 1$. $(\Leftarrow)$ Bila $\text{fpb}(n,m) = 1$, maka

$$|([1]_n, [1]_m)| = \text{kpk}(n,m) = nm/\text{fpb}(n,m) = nm,$$

terlihat bahwa elemen $([1]_n, [1]_m)$ membangun keseluruhan elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Jadi $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ adalah siklik. Dengan demikian isomorpik dengan grup $\mathbb{Z}_{nm}$. ✓

Kesimpulan 4.2.4 $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s} \cong \mathbb{Z}_{n_1 n_2 \cdots n_s}$ bila dan hanya bila untuk semua $1 \leq i < j \leq s$, $\text{fpb}(n_i, n_j) = 1$.

Bukti Sebagai latihan (lihat Latihan 4.2.8). ✓

Contoh 4.2.4 Tinjau grup kuasi $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\langle([1]_4, [1]_4)\rangle$. Karena $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4| = 16$ dan

$$|\langle([1]_4, [1]_4)\rangle| = |([1]_4, [1]_4)| = \text{kpk}(4,4) = 4,$$

didapat

$$|(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\langle([1]_4, [1]_4)\rangle| = 16/4 = 4.$$

Jadi kemungkinannya $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\langle([1]_4, [1]_4)\rangle$ isomorpik dengan $\mathbb{Z}_4$ atau dengan grup-4 Klein V. Tetapi elemen $([1]_4, [0]_4) + \langle([1]_4, [1]_4)\rangle$ bila dihitung beroder 4. Jadi grup kuasi $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\langle([1]_4, [1]_4)\rangle$ adalah siklik, dengan demikian isomorpik dengan $\mathbb{Z}_4$. ●

Contoh 4.2.5 Diberikan
$$\mathbb{U}(10) = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$$
dan
$$\mathbb{U}(12) = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\},$$
jadi $|\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12)| = 16$. Misalkan $H = \langle([7]_{10}, [7]_{12})\rangle$ subgrup dari $\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12)$. Didapat
$$H = \{([1]_{10}, [1]_{12}), ([7]_{10}, [7]_{12}), ([9]_{10}, [1]_{12}), ([3]_{10}, [7]_{12})\}$$
dan
$$|(\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12))/H| = 16/4 = 4$$
Bila dihitung didapat
$$(\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12))/H = \{H, ([3]_{10}, [1]_{12})H, ([3]_{10}, [5]_{12})H, ([3]_{10}, [11]_{12})H\}$$
dan
$$([3]_{10}, [1]_{12})^2 = ([3]_{10}, [5]_{12})^2 = ([3]_{10}, [11]_{12})^2 = ([9]_{10}, [1]_{12}) \in H.$$
Jadi semua elemen di $(\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12))/H$ yang bukan H mempunyai order 2. Dengan demikian
$$(\mathbb{U}(10) \times \mathbb{U}(12))/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Latihan

Latihan 4.2.1 Dapatkan order elemen dari grup berikut.

(a) $([4]_6, [6]_8) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$.

(b) $([15]_{20}, [15]_{27}) \in \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{27}$.

(c) $(\rho, [7]_{12}) \in S_3 \times \mathbb{U}_{12}$.

(d) $(\rho, [7]_{12}) \in D_4 \times \mathbb{U}_{12}$.

(e) $(\rho, \mathbf{i}) \in S_3 \times Q_8$.

(f) $((2\ 3\ 4), [15]_{18}) \in A_4 \times \mathbb{Z}_{18}$.

Latihan 4.2.2 Dapatkan semua koset yang berbeda dari subgrup dalam grup berikut.

(a) $H = \langle([8]_{10}, [2]_4)\rangle$ dalam $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4$.

(b) $H = \langle([3]_{10}, [5]_{12})\rangle$ dalam $\mathbb{U}_{10} \times \mathbb{U}_{12}$.

(c) $H = \langle(6, 8)\rangle$ dalam $3\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$.

(d) $H = \langle(\rho, \tau)\rangle$ dalam $D_4 \times D_4$.

Latihan 4.2.3 Dapatkan order elemen dari grup kuasi berikut.

(a) $([1]_{10}, [1]_4) + \langle([8]_{10}, [2]_4)\rangle$ dalam $(\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4)/\langle([8]_{10}, [2]_4)\rangle$.

(b) $([7]_{10}, [7]_{12})\langle([3]_{10}, [5]_{12})\rangle$ dalam $(\mathbb{U}_{10} \times \mathbb{U}_{12})/\langle([3]_{10}, [5]_{12})\rangle$.

(c) $(3, 2) + \langle(6, 8)\rangle$ dalam $(3\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})/\langle(6, 8)\rangle$.

(d) $(\rho^3, \tau)\langle(\rho, \tau)\rangle$ dalam $(D_4 \times D_4)/\langle(\rho, \tau)\rangle$.

Latihan 4.2.4 Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9$ tidak isomorpik dengan $\mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_3$.

Latihan 4.2.5 Tunjukkan bahwa $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Latihan 4.2.6 Dapatkan oder terbesar dari sebarang elemen di $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{35}$.

Latihan 4.2.7 Dapatkan semua elemen yang berorder 4 dalam $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

Latihan 4.2.8 Buktikan Kesimpulan 4.2.4.

Latihan 4.2.9 Dapatkan semua homomorpisma grup dari $\mathbb{Z}_6$ ke $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dan tentukan yang mana merupakan isomorpisma.

Latihan 4.2.10 Tunjukkan bahwa bila G adalah suatu grup berhingga sedemikian hingga untuk semua $g \in G$ didapat $g^2 = e$, maka

(a) G komutatif.

(b) $|G| = 2^n$ untuk beberapa bilangan bulat positip n.

(c) $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n}$.

4.3 Jumlahan Langsung

Telah dibahas produk langsung untuk mengkonstruksi grup baru. Berikut ini digunakan istilah yang mirip yaitu jumlahan langsung dan mendekomposisi beberapa grup untuk dijadikan sebagai jumlahan langsung dari subgrup normal tertentu. Hal ini akan meningkatkan pemahaman mengenai grup tersebut.

Sebagaimana akan dibahas dalam bagian ini, dekomposisi yang dibicarakan dapat digunakan secara lengkap untuk mengkarakteristik semua grup komutatif berhingga.

Pertama, diberikan ilustrasi dari pengertian melalui suatu contoh.

Contoh 4.3.1 Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, misalkan subgrup

$$H = \langle [3]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$$

dan

$$K = \langle [4]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}.$$

Karena $\mathbb{Z}_{12}$ komutatif, maka H dan K keduanya subgrup normal dari $\mathbb{Z}_{12}$. Menurut Proposisi 3.3.3, maka

$$H + K = \{h + k \,|\, h \in H, k \in K\}$$

adalah subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$. Perlu diperhatikan bahwa $H \cap K = \{[0]_{12}\}$ dan menggunakan Teorema 3.3.5 didapat

$$|H + K| = |H|\,|K|/|H \cap K| = 4(3)/1 = 12.$$

Jadi $\mathbb{Z}_{12} = H + K$. Lagi pula, fakta bahwa $H \cap K = \{[0]_{12}\}$ berakibat bahwa setiap elemen $a \in \mathbb{Z}_{12}$ dapat dituliskan secara tunggal sebagai $a = h + k$ dimana $h \in H$ dan $k \in K$. Sebab bila $a = h_1 + k_1 = h_2 + k_2$, maka $h_1 - h_2 = k_2 - k_1 \in H \cap K = \{[0]_{12}\}$. Akibatnya $h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$. Faktanya dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_{12} \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$. Berikutnya, misalkan subgrup

$$L = \langle [2]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [2]_{12}, [4]_{12}, [6]_{12}, [8]_{12}, [10]_{12}\}.$$

Dengan mudah bisa diselidiki bahwa $\mathbb{Z}_{12} = H + L$. Dengan demikian setiap elemen $a \in \mathbb{Z}_{12}$ dapat ditulis sebagai $a = h + l$ dimana $h \in H$ dan $l \in L$. Tetapi penulisan ini tidak tunggal, misalnya

$$[7]_{12} = [3]_{12} + [4]_{12} = [9]_{12} + [10]_{12},$$

dimana $[3]_{12}, [9]_{12} \in H$ dan $[4]_{12}, [10]_{12} \in L$. Dalam kasus ini perhatikan bahwa

$$H \cap L = \{[0]_{12}, [6]_{12}\} \neq \{[0]_{12}\}.$$

Contoh 4.3.2 Dalam S_3 subgrup A_3 adalah subgrup normal. Bila $H = A_3$ dan $K = \langle \mu_1 \rangle$, maka lagi gunakan Proposisi 3.3.3 didapat HK adalah subgrup dari S_3. Juga, lagi gunakan Teorema 3.3.5 didapat

$$|HK| = |H|\,|K|/|H \cap K| = 3(2)/1 = 6.$$

Jadi $S_3 = HK$. Tetapi, jelas bahwa S_3 tidak isomorpik dengan $H \times K \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, sebab S_3 tidak komutatif. Apa yang "salah" dalam kasus ini adalah bahwa $K = \langle \mu_1 \rangle$ bukan subgrup normal dari S_3.

Teorema berikut memberikan karakterisasi yang terbaik dalam pemahaman pengertian yang telah dikenalkan lewat dua contoh. Pertama dibutuhkan suatu lemma sederhana berikut.

Lemma 4.3.1 Misalkan G adalah suatu grup, H dan K adalah subgrup dari G yang memenuhi

(1) $H \lhd G$ dan $K \lhd G$.

(2) $H \cap K = \{e\}$.

Maka untuk semua $h \in H$ dan $k \in K$ didapat $hk = kh$.

Bukti Akan ditunjukkan $hk = kh$, untuk semua $h \in H$ dan $k \in K$, untuk itu tinjau elemen $y = hkh^{-1}k^{-1}$. Karena $H \lhd G$, maka $kh^{-1}k^{-1} \in H$. Jadi $y = h(kh^{-1}k^{-1}) \in H$. Karena $K \lhd G$, maka $hkh^{-1} \in K$. Jadi $y = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$. Dengan demikian

$$hkh^{-1}k^{-1} = y \in H \cap K = \{e\},$$

akibatnya $hkh^{-1}k^{-1} = e$ atau $hk = kh$. ✓

Teorema 4.3.1 G adalah suatu grup berhingga, H dan K adalah subgrup dari G yang memenuhi

(1) $H \lhd G$ dan $K \lhd G$.

(2) $H \cap K = \{e\}$.

(3) $|HK| = |G|$.

Maka $G \cong H \times K$.

Bukti definisikan suatu pemetaan $\phi : H \times K \to G$ oleh $\phi((h,k)) = hk$, $\forall (h,k) \in H \times K$. Pemetaan ϕ adalah homomorpisma, sebab dari Lemma 4.3.1 didapat

$$\phi((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \phi((h_1h_2,k_1k_2)) = h_1h_2k_1k_2 = (h_1k_1)(h_2k_2) = \phi((h_1,k_1))\phi((h_2,k_2)).$$

Pemetaan ϕ adalah satu-satu, sebab bila $\phi((h_1,k_1)) = \phi((h_2,k_2))$, maka $h_1k_1 = h_2k_2$. Hal ini berakibat bahwa $h_1^{-1}h_2 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ atau $h_1 = h_2$ dan $k_1 = k_2$. Juga, pemetaan ϕ adalah pada sebab dari teorema isomorpisma pertama didapat

$$|\phi(H \times K)|/|\ker(\phi)| = |H|\,|K|/1 = |HK| = |G|. \quad ✓$$

Pada akhir bagian ini kosentrasi pembahasan pada grup komutatif dimana kondisi (1) dalam Teorema 4.3.1 selalu dipenuhi. Misalkan H_1 dan H_2 adalah subgrup dari suatu grup komutatif G, maka H_1 dan H_2 adalah subgrup normal dari G; dan $H_1 + H_2$ adalah suatu subgrup dari G. Tambahan pula, bila $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, maka setiap elemen x di $H_1 + H_2$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $x = h_1 + h_2$, dimana $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$. Dalam hal ini $H_1 + H_2$ dinamakan jumlahan langsung dari H_1 dan H_2 dan ditulis $H_1 \oplus H_2$. Berikut ini secara formal dinyatakan definisi jumlahan langsung dari sebanyak berhingga subgrup.

Definisi 4.3.1 Misalkan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ adalah subgrup dari suatu grup komutatif G. Maka

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n$$

dinamakan suatu **jumlahan langsung** dan ditulis sebagai

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n,$$

bila untuk sebarang $x \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ didapat

$$x = h_1 + h_1 + \cdots + h_n = h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n,$$

dimana $h_i, h'_i \in H_i$ bila dan hanya bila $h_i = h'_i$ untuk semua i, $1 \leq i \leq n$. ✓

Jadi dalam suatu jumlahan langsung $H \oplus K$, sebarang elemen x secara tunggal disajikan sebagai $x = h + k$, dimana $h \in H$ dan $k \in K$. Dalam Contoh 4.3.1, $\mathbb{Z}_{12} = H \oplus K$, tetapi $\mathbb{Z}_{12} = H + L$ bukan jumlahan langsung.

Diberikan beberapa definisi yang ekivalen dari jumlahan langsung yang akan membuat pengertian lebih jelas.

Teorema 4.3.2 Misalkan G adalah suatu grup komutatif dan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ adalah subgrup dari G. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

(1) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ adalah suatu jumlahan langsung.

(2) $(H_1 + H_2 + \cdots + H_{i-1} + H_{i+1} + \cdots + H_n) \cap H_i = \{0\}$, untuk semua i, $2 \leq i < n$.

(3) $(H_1 + H_2 + \cdots + H_{i-1}) \cap H_i = \{0\}$, untuk semua i, $2 \leq i \leq n$.

(4) bila $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = e$, dimana $h_i \in H_i$ untuk semua i, $1 \leq i \leq n$, maka $h_i = 0$ untuk semua i, $1 \leq i \leq n$.

Bukti $(1 \Rightarrow 2)$ Misalkan $x \in (H_1 + H_2 + \cdots + H_{i-1} + H_{i+1} + \cdots + H_n) \cap H_i$. Maka

$$x = h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1} + h_{i+i} + \cdots + h_n,$$

untuk beberapa $h_j \in H_j$, $j \neq i$. Karena $x \in H_i$, didapat dua penyajian dari $0 \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$, yaitu

$$0 = h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1} + (-x) + h_{i+1} + \cdots + h_n = 0 + 0 + \cdots + \cdots + 0.$$

Dengan definisi jumlahan langsung, maka masing-masing $h_j = 0$ juga, khususnya $x = 0$.
$(2 \Rightarrow 3)$ Hal ini langsung dari fakta

$$(H_1 + H_2 + \cdots + H_{i-1}) \cap H_i \subseteq (H_1 + H_2 + \cdots + H_{i-1} + H_{i+1} + \cdots + H_n) \cap H_i.$$

$(3 \Rightarrow 4)$ Bila $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$, dimana $h_i \in H_i$ akan ditunjukkan $h_i = 0$ untuk semua i. Asumsikan sebaliknya yaitu beberapa h_i tidak nol dan tinjau bilangan bulat terbesar $k, 1 \leq k \leq n$ yang memenuhi $h_k \neq 0$. Jadi $h_{k+1} = \cdots = h_n = 0$ dan $0 = h_1 + \cdots + h_{k}$,. Didapat

$$h_k = -h_1 - h_2 - \cdots - h_{k-1} \in (H_1 + H_2 + \cdots H_{k-1}) \cap H_k = \{0\}.$$

Jadi $h_k = 0$, kontradiksi dengan asumsi $h_k = 0$. Jadi suatu k yang ditentukan tidak ada dengan demikian $h_i = 0$ untuk semua $i, 1 \leq i \leq n$. $(4 \Rightarrow 1)$ Ingin ditunjukkan bahwa sebarang x di $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ dapat disajikan secara tunggal sebagai suatu jumlah dari elemen-elemen subgrup. Jadi, misalkan

$$x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n,$$

dimana $h_i, h'_i \in H_i$. Didapat

$$(h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) + \cdots + (h_n - h'_n) = 0,$$

dimana $(h_i - h'_i) \in H_i$. Jadi $(h_i - h'_i) = 0$ untuk semua $i, 1 \leq i \leq n$. Dengan demikian $h_i = h'_i$ untuk semua $i, 1 \leq i \leq n$. ✓

Kesimpulan 4.3.1 Misalkan G adalah grup komutatif berhingga, H dan K subgrup dari G yang memenuhi

(1) $H \cap K = \{0\}$.

(2) $|H + K| = |G|$.

Maka $G = H \oplus K \cong H \times K$.

Bukti Karena G komutatif, maka $H \lhd G$ dan $K \lhd G$. Dengan menggunakan Teorema 4.3.1 didapat $G \cong H \times K$ dan menggunakan Teorema 4.3.2 didapat $H + K$ adalah suatu jumlahan langsung $H \oplus K$. Juga $H \oplus K$ adalah suatu subgrup dari G dengan $|H \oplus K| = |H + K| = |G|$. Jadi $H \oplus K = G$. ✓

Teorema 4.3.3 Misalkan G grup komutatif yang memenuhi $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$. Maka $G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$.

Bukti Didefinisikan suatu pemetaan $\phi : H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \rightarrow H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ oleh

$$\phi(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_n),\ \forall h_1 + h_2 + \cdots + h_n \in H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n.$$

Pemetaan ϕ terdefinisi secara baik, sebab bila

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n,$$

maka $h_i = h'_i$ untuk semua i dan $(h_1, h_2, \ldots, h_n) = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_n)$. Pemetaan ϕ adalah suatu homomorpisma, sebab

$$\begin{aligned}
\phi((h_1 + h_2 + \cdots + h_n) + (h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n)) &= \phi((h_1 + h'_1) + (h_1 + h'_2) + \cdots + (h_n + h'_n)) \\
&= (h_1 + h'_1, h_2 + h'_2, \ldots, h_n + h'_n) \\
&= (h_1, h_2, \ldots, h_n) + (h'_1, h'_2, \ldots, h'_n) \\
&= \phi(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) + \phi(h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n).
\end{aligned}$$

Pemetaan ϕ, jelas dari definisi adalah satu-satu pada. ✓

Kesimpulan 4.3.2 Misalkan G suatu grup komutatif berhingga yang memenuhi

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n.$$

Maka $|G| = |H_1|\,|H_2| \cdots |H_n|$.

Bukti Hal ini didapat langsung dari Teorema 4.3.3, yaitu $G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$. Akibatnya $|G| = |H_1|\,|H_2| \cdots |H_n|$. ✓

Kesimpulan berikut suatu akibat penting dari penyajian $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ untuk $x \in H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$.

Kesimpulan 4.3.3 Bila G suatu grup komutatif berhingga sedemikian hingga $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ dan $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ suatu elemen di G dimana $h_i \in H_i$ untuk i, $1 \leq i \leq n$. Maka

$$|x| = \text{kpk}(|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|).$$

Bukti Dari Teorema 4.3.3 didapat

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$$

dengan demikian elemen $x = x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ di G berkaitan dengan elemen $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ di $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$. Gunakan Kesimpulan 4.2.1 didapat

$$|(h_1, h_2, \ldots, h_n)| = \text{kpk}(|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|).$$

Jadi

$$|x| = |h_1 + h_2 + \cdots + h_n| = \text{kpk}(|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|).$$ ✓

Kesimpulan 4.3.4 Bila $G = G_1 \oplus G_2$ dimana G_1 siklik berorder n dan G_2 siklik berorder m, maka $G \cong \mathbb{Z}_{nm}$ bila dan hanya bila $\text{kpk}(n, m) = 1$.

Bukti Dari Teorema 4.3.3 didapat

$$G_1 \oplus G_2 \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$$

dan menggunakan Kesimpula 4.2.2 didapat

$$G_1 \oplus G_2 \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$$

bila dan hanya bila $\text{kpk}(n, m) = 1$. ✓

Lemma 4.3.2 Misalkan G suatu grup komutatif sedemikian hingga

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n,$$

K_i adalah subgrup dari H_i untuk semua $i,\ 1 \leq i \leq n$ dan

$$K = K_1 + K_2 + \cdots + K_n.$$

Maka

$$K = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n.$$

Bukti Tinjau sebarang elemen $x \in K$. Bila

$$x = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k_1' + k_2' + \cdots + k_n',$$

dimana $k_i, k_i' \in K_i$ untuk semua $i,\ 1 \leq i \leq n$ dan karena K_i subgrup dari H_i, maka $k_i, k_i' \in H_i$. Juga karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, maka haruslah $k_i = k_i'$ untuk semua $i,\ 1 \leq i \leq n$. Jadi

$$K = K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n. \quad ✓$$

Proposisi 4.3.1 Misalkan G suatu grup komutatif sedemikian hingga

$$G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n,$$

K_i adalah subgrup dari H_i untuk semua $i,\ 1 \leq i \leq n$ dan

$$K = K_1 \cdots + K_n.$$

Maka

$$G/K = G/(K_1 \oplus \cdots \oplus K_n) \cong H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n.$$

Bukti Dari Lemma 4.3.2 didapat

$$K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n.$$

definisikan pemetaan $\phi : G \to H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n$ oleh

$$\phi(x) = \phi(h_1 + \cdots + h_n) = (h_1 + K_1, \ldots, h_n + K_n),\ \forall x \in G,$$

dimana $x = h_1 + \cdots + h_n$ dengan $h_i \in H_i$ untuk semua $i,\ 1 \leq i \leq n$. Karena representasi sebarang x di G adalah tunggal, maka pemetaan ϕ terdefinisi secara baik. Pemetaan ϕ adalah suatu homomorpisma, sebab untuk sebarang $x = h_1 + \cdots + h_n$ dan $x' = h_1' + \cdots + h_n'$ di G didapat

$$\begin{aligned}
\phi((h_1 + \cdots + h_n) + (h_1' + \cdots + h_n')) &= \phi((h_1 + h_1') + \cdots + (h_n + h_n') \\
&= ((h_1 + h_1') + K_1, \ldots, (h_n + h_n') + K_n) \\
&= (h_1 + K_1, \ldots, h_n + K_n) + (h_1' + K_1, \ldots, h_n' + K_n) \\
&= \phi((h_1 + \cdots + h_n)) + \phi((h_1' + \cdots + h_n')).
\end{aligned}$$

Elemen netral $H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n$ adalah $(K_1, \ldots, K_n)$. Dengan demikian bila $x = h_1 + \cdots + h_n$, maka $x \in \ker(\phi)$ bila dan hanya bila $h_i + K_i = K_i$ hal ini berarti bahwa $h_i \in K_i$

untuk semua i, $1 \leq i \leq n$. Tetapi kondisi ini ekivalen dengan $x \in K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$. Jadi $\ker(\phi) = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n = K$. Pemetaan ϕ adalah pada, sebab diberikan sebarang $y = (h_1 + K_1, \ldots, h_n + K_n)$ di $H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n$, dapat dipilih $x = h_1 + \cdots + h_n$ di G yang memenuhi

$$\phi(x) = \phi(h_1 + \cdots + h_n) = (h_1 + K_1, \ldots, h_n + K_n) = y.$$

Dengan menggunakan teorema isomorpisma pertama didapat

$$G/\ker(\phi) \cong H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n$$

atau

$$G/K = G/(K_1 \oplus \cdots \oplus K_n) \cong H_1/K_1 \times \cdots \times H_n/K_n. \quad ✓$$

Pengkonstruksian jumlahan langsung yang telah dibahas pada bagian ini adalah suatu yang esensial untuk pengkajian grup komutatif berhingga dan dibahas pada bagian berikutnya.

Latihan

Latihan 4.3.1 Dapatkan subgrup sejati tak-trivial H dan K dari grup G berikut yang memenuhi $G \cong H \oplus K$.
1. $\mathbb{Z}_{10}$. 2. $\mathbb{Z}_{15}$. 3. $\mathbb{Z}_{18}$. 4. $\mathbb{Z}_{20}$. 5. $\mathbb{Z}_{36}$. ✓

Latihan 4.3.2 Jelaskan mengapa tidak ada subgrup sejati tak-trivial H dan K dalam $\mathbb{Z}_9$ yang memenuhi $\mathbb{Z}_9 = H \oplus K$. ✓

Latihan 4.3.3 Jelaskan mengapa tidak ada subgrup sejati tak-trivial H dan K dalam $\mathbb{Z}_8$ yang memenuhi $\mathbb{Z}_8 = H \oplus K$. ✓

Latihan 4.3.4 Bila mungkin dapatkan subgrup sejati tak-trivial H_1, H_2, H_3 dalam $\mathbb{Z}_{60}$ yang memenuhi $\mathbb{Z}_{60} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. ✓

Latihan 4.3.5 Jelaskan mengapa tidak ada subgrup sejati tak-trivial H_1, H_2 dan $H - 3$ dalam $\mathbb{Z}_{36}$ yang memenuhi $\mathbb{Z}_{36} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. ✓

Latihan 4.3.6 Dapatkan subgrup sejati tak-trivial H dan K dalam $\mathbb{U}(12)$ yang memenuhi $HK = \mathbb{U}(12)$. ✓

Latihan 4.3.7 Dapatkan subgrup sejati tak-trivial H dan K dalam $\mathbb{U}(15)$ yang memenuhi $HK = \mathbb{U}(15)$. ✓

Latihan 4.3.8 Tunjukkan bahwa tidak ada subgrup sejati tak-trivial H dan K dalam $\mathbb{U}(10)$ yang memenuhi $HK = \mathbb{U}(10)$. ✓

Latihan 4.3.9 Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G yang memenuhi $G = H \oplus K$, dimana H siklik berorder 4 dan K siklik berorder 35. Tunjukkan bahwa $G \cong \mathbb{Z}_{140}$.

Latihan 4.3.10 Misalkan H dan K adalah subgrup dari grup G yang memenuhi $G = H \oplus K$, dimana H siklik berorder 6 dan K siklik berorder 15. Tunjukkan bahwa G suatu grup komutatif tidak siklik berorder 90.

Latihan 4.3.11 Misalkan G suatu grup berhingga dan H_i, untuk i, $1 \leq i \leq n$ adalah subgrup dari G yang memenuhi

(1) $H_i \lhd G$ untuk semua i, $1 \leq i \leq n$.

(2) $(H_1 H_2 \cdots H_{i-1}) \cap H_i = \{e\}$ untuk semua i, $2 \leq i \leq n$.

(3) $|G| = |H_1|\,|H_2| \cdots |H_n|$.

Tunjukkan bahwa $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$.

Latihan 4.3.12 Misalkan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ dan $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n \in G$. Tunjukkan bahwa $|x| = \text{kpk}(|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|)$.

Latihan 4.3.13 Misalkan $G = H \oplus K$ dimana H siklik berorder n dan K berorder m. Tunjukkan bahwa $G \cong \mathbb{Z}_{nm}$ bila dan hanya bila $\text{kpk}(n, m) = 1$.

Latihan 4.3.14 Misalkan $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ dan didefinisikan suatu pemetaan $\phi : G \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ oleh $\phi((h_1, h_2)) = ([h_1]_3, [h_2]_4)$ untuk sebarang $h_1 \in \mathbb{Z}_6$ dan $h_2 \in \mathbb{Z}_8$.

(a) Tunjukkan bahwa ϕ suatu homomorpisma.

(b) Dapatkan $\ker(\phi)$

(c) Dapatkan $\text{Im}(\phi) = \phi(G)$.

Latihan 4.3.15 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup komutatif G dan $\phi : G \to H$ adalah suatu homomorpisma yang memenuhi

(1) $\phi(h) = h$ untuk semua $h \in H$.

(2) $\ker(\phi) = K$.

Tunjukkan bahwa $G = H \oplus K$.

Latihan 4.3.16 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup komutatif G dan $\phi : G \to H$ adalah suatu homomorpisma yang memenuhi

(1) $\phi(h) = h$ untuk semua $h \in H$.

(2) $\ker(\phi) = K$.

Tunjukkan bahwa ada suatu homomorpisma $\psi : G \to K$ yang memenuhi

(1) $\psi(k) = k$ untuk semua $k \in K$.

(2) $\ker(\psi) = H$.

Latihan 4.3.17 Misalkan H dan K adalah subgrup dari suatu grup komutatif G. Tunjukkan bahwa $G = H \oplus K$ bila dan hanya bila ada suatu homomorpisma $\phi : G \to H$ yang memenuhi

(1) $\phi(h) = h$ untuksemua $h \in H$.

(2) $\ker(\phi) = K$.

Latihan 4.3.18 Misalkan H dan K adalah subgrup normal dari suatu grup G dan $\phi : G \to H$ adalah suatu homomorpisma yang memenuhi

(1) $\phi(h) = h$ untuk semua $h \in H$.

(2) $\ker(\phi) = K$.

Tunjukkan bahwa $G \cong H \times K$.

Latihan 4.3.19 Misalkan G adalah suatu grup komutatif dan $\phi : G \to G$ adalah suatu homomorpisma yang memenuhi $\phi(\phi(g)) = g$ untuk semua $g \in G$ (homomorpisma ini dinamkan suatu **proyeksi**). Tunujkkan bahwa $G \cong \phi(G) \times \ker(\phi)$.

Latihan 4.3.20 Misalkan G adalah suatu grupdengan $|G| = nm$ dimana $\text{kpk}(n, m) = 1$. Asumsikan bahwa G mempunyai tepat satu subrup H beroder n dan mempunyai tepat satu subgrup K berorder m. Tunjukkan bahwa $G \cong H \times K$.

Latihan 4.3.21 Tunjukkan bahwa setiap grup berorder 9 adalah komutatif.

Latihan 4.3.22 Tunjukkan bahwa setiap grup berorder p^2 adalah komutatif untuk p prima.

4.4 Teorema Fundamental dari Grup Abelian Berhingga

Pada bagian ini ditunjukkan grup komutatif berhingga secara lengkap dapat diuraikan dalam istilah produk langsung dari beberapa grup siklik. Dimulai dengan mendaftar semua grup komutatif dari suatu grup berhingga yang diberikan. Karena telah diketahui bagaimana mengkonstruksi subgrup dari grup siklik dan bagaimana menghitung order elemen dalam grup siklik hal ini akan bisa dilakukan yang sama untuk sebarang grup komutatif berhingga.

Telah diketahui bahwa grup siklik G dengan $|G| = n$ isomorpik dengan $\mathbb{Z}_n$ dan produk langsung dari grup $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ adalah suatu grup komutatif. Teorema yang akan dibuktikan membahas bahwa sebarang grup komutatif somorpik dengan suatu produk langsung dari grup siklik.

Contoh 4.4.1 Misalkan G adalah suatu grup komutatif dengan $|G| = 24$, $H = \{x \in G \,|\, |x| = 1, 2, 4 \text{ atau } 8\}$ dan $K = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 3\}$. Karena G komutatif digunakan penjumlahan sebagai operasi. Perlu diperhatikan bahwa H dan K keduanya subgrup dari G. Hal ini bisa terlihat sebagai berikut, $x \in H$ bila hanya $8x = 0$, jadi bila $x, y \in H$, maka $8(x - y) = 8x - 8y = 0 - 0 = 0$. Dengan demikian $x - y \in H$, jadi H subgrup dari G. Sejalan dengan hal ini, untuk $x \in K$ bila hanya $3x = 0$, jadi bila $x, y \in K$, maka $3(x - y) = 3x - 3y = 0 - 0 = 0$. Dengan demikian $x - y \in K$, jadi K subgrup dari G. Selanjutnya untuk sebarang $g \in G$, karena $1 = 2(8) - 5(3)$ didapat $g = (2(8) - 5(3))g = 2(8g) - 5(3g)$. Karena $|G| = 24$, maka dengan Teorema Lagrange didapat $3(16g) = 0$ dan $16g \in K$ begitu juga $8(15g) = 0$ dan $15g \in H$. Jadi $g \in H + K$ dan $H + K = G$. Karena $H \cap K = \{0\}$, maka $G = H \oplus K$ dan $24 = |G| = |H|\,|K|$. Juga dari Teorema 3.4.4, 3 tidak membagi $|H|$, sebab bila tidak maka H mempunyai elemen yang beroder 3. Hal yang sama, juga 2 tidak membagi $|K|$. Jadi $|H| = 8$ dan $|K| = 3$.

Proposisi 4.4.1 Misalkan G suatu grup berhingga berorder $p^r m$ dimana p prima tidak membagi m. Misalkan $H = \{x \in G \,|\, |x| = p^s, 0 \leq s \leq r\}$ dan $K = \{x \in G \,|\, |x| \text{ mebagi } m\}$. Maka

(1) $G = H \oplus K$.

(2) $|H| = p^r$ dan $|K| = m$.

Bukti

(1) Pertama ditunjukkan bahwa H dan K keduanya subgrup dari G. Untuk $x \in H$ bila dan hanya bila $p^r x =$. Jadi bila $x, y \in H$, maka $p^r(x - y) = p^r x - p^r y = 0 - 0 = 0$ dan $x - y \in H$. Dengan demikian H adalah subgrup dari G. Untuk $x \in K$ bila dan hanya bila $mx =$. Jadi bila $x, y \in H$, maka $m(x - y) = mx - my = 0 - 0 = 0$ dan $x - y \in K$. Dengan demikian K adalah subgrup dari G. Karena p^r dan m prima relatif, maka dengan menggunakan Teorema 1.3.6 didapat $1 = up^r + vm$ untuk beberapa bilangan bulat u dan v. Dengan demikian untuk sebarang $g \in G$ didapat

$$g = 1(g) = (up^r + vm)g = (up^r)g + (vm)g.$$

Karena $|G| = p^r m$, didapat $p^r(vm)g = 0$ hal ini berakibat $(vm)g \in H$ dan $m(up^r)g = 0$ hal ini berakibat $(up^r)g \in K$. Jadi $G = H + K$. Selanjutnya bila $x \in H \cap K$, maka order dari x harus membagi p^r dan m dengan demikian juga membagi $\text{kpk}(p^r, m) = 1$. Jadi $|x| = 1$ dengan demikian $x = 0$, didapat $H \cap K = \{0\}$. Krena $G = H + K$ dan $H \cap K = \{0\}$, maka $G = H \oplus K$.

(2) Grup G adalah komutatif, maka subgrup K adalah komutatif. Dengan menggunakan Teorema 3.4.4 (Teorema Cauchy) didapat bila p membagi $|K|$, maka K memuat suatu elemen berorder p, hal ini tidak mungkin terjadi. Jadi p tidak membagi $|K|$. Sejalan dengan hal ini didapat $|H|$ tidak dapat dibagi oleh bilangan prima selain p. Karena $|G| = p^r m$ dan $|G| = |H|\,|K|$, maka yang mungkin adalah $|H| = p^r$ dan $|K| = m$.

Contoh 4.4.2 Misalkan G adalah suatu grup komutatif berorder $900 = 4(9)(25) = 2^2\,3^2\,5^2$, $H = \{x \in G\,|\,|x| = 1, 2,$ atau $4\}$ dan $K = \{x \in G\,|\,|x|$ membagi $3^2 5^2 = 225\}$. Maka dengan menggunakan Proposisi 4.4.1 didapat $G = H \oplus K$. Selanjutnya, misalkan $L = \{x \in G\,|\,|x| = 1, 3,$ atau $9\}$ dan $M = \{x \in G\,|\,|x| = 1, 5,$ atau $25\}$. Lagi dengan menggunakan Proposisi 4.4.1 didapat $K = L \oplus M$. Jadi $G = H \oplus L \oplus M$.

Diberikan G suatu grup komutatif dengan $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, dimana p_i adalah bilangan prima yang berbeda untuk i, $1 \le i \le k$. Misalkan $G(p_i^{a_i}) = \{x \in G\,|\,|x| = p_i^s, 0 \le s \le a_i\}$. Suatu akibat langsung dari Proposisi 4.4.1 didapat kesimpulan berikut.

Kesimpulan 4.4.1 Misalkan G adalah suatu grup komutatif dengan $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, dimana p_i adalah bilangan prima yang berbeda untuk semua i, $1 \le i \le k$. Maka

(1) $G = G(p_1^{a_1}) \oplus G(p_2^{a_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_k^{a_k})$.

(2) $|G(p_i^{a_i})| = p_i^{a_i}$, untuk semua i, $1 \le i \le k$.

Bukti Hal ini langsung dari Proposisi 4.4.1.

Definisi 4.4.1 Diberikan G suatu grup komutatif berhingga dan p bilangan prima. Maka G dinamakan suatu p-**grup** bila $|G| = p^r$ untuk beberapa bilangan bulat r.

Kesimpulan 4.4.1 menyatakan bahwa sebarang grup komutatif berhingga dapat didekomposisi sebagai jumlahan langsung dari p-grup. Dalam pembahasan berikutnya ditunjukkan bahwa setiap grup komutatif berhingga adalah suatu jumlahan langsung grup siklik melalui p-grup dan ditunjukkan bahwa setiap p-grup adalah jumlahan langsung dari grup siklik.

Pembuktian proposisi berikut merupakan kerja keras, untuk itu sebelumnya diberikan suatu contoh yang menguraikan ide yang tercakup didalam suatu kasus ringkas dan sederhana.

Contoh 4.4.3 Diberikan G grup komutatif berorder 8, $a \in G$ suatu elemen yang berorder maksimal, yaitu suatu elemen yang memenuhi $|x| \le |a|$ untuk semua $x \in G$. Didapat $|a| = 8, 4$ atau 2.

Kasus 1 $|a| = 8$, maka $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_8$.

Kasus 2 $|a| = 4$. Maka $H = \langle a \rangle$ adalah suatu subgrup sejati dari G. Pilih $b \in G, b \notin \langle a \rangle$ adalah suatu elemen di G yang berorder minimal yaitu $|y| \ge |b|$ untuk setiap $y \in G$ dan $y \notin \langle a \rangle$. Bila $|b| = 4$, maka H dan $K = \langle b \rangle$ akan mempunyai elemen yang berorder 2. Sehingga didapat $2a = 2b$ hal ini berakibat $|a + b| = 2$. Karena $a + b \notin \langle a \rangle$, maka suatu hal yang tidak mungkin $|a + b| = 2$ sebab b telah diplih dengan order minimal. Jadi haruslah $|b| = 2$ dan $H \cap K = \{0\}$. Dalam kasus ini maka $G = H \oplus K \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Kasus 3 $|a| = 2$. Maka, pilih $b \in G$ dengan $b \notin \langle a \rangle$ didapat $|b| = 2$. Misalkan $H = \langle a \rangle$ dan $K = \langle b \rangle$. Maka $H \cap K = \{0\}$. dan $|H \oplus K| = 4$. Selanjutnya pilih $c \in G$ dengan $c \notin H \oplus K$. Didapat $|c| = 2$ dan bila $L = \langle c \rangle$, maka $(H \oplus K) \cap L = \{0\}$ dan $G = H \oplus K \oplus L \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ●

Dalam Contoh 4.4.3 telah ditunjukkan bagaimana mendapatkan semua grup komutatif berorder 8 dan didapat ada tepat tiga macam grup yang berbeda sesuai dengan pengertian isomorpisma. Pada saat yang sama dalam Contoh 4.4.3 dijelaskan dua ide utama yang akan diberikan dalam proposisi berikut, yaitu mengenai pilihan suatu elemen a dengan order maksimal dan suatu elemen $b \notin \langle a \rangle$ dengan order terkecil.

Proposisi 4.4.2 Diberikan p adalah bilangan bulat prima dan G adalah suatu p-grup komutatif berhingga. Misalkan a suatu elemen di G dengan order maksimal. Maka $G = \langle a \rangle \oplus H$ untuk beberapa H subgrup dari G.

Bukti Misalkan $G = p^n$. Digunakan induksi pada n. Bila $n = 1$, maka G siklik dan $G = \langle a \rangle \oplus \langle 0 \rangle$. Jadi asumsikan proposisi benar untuk semua grup komutatif berorder p^k dimana $k < n$. Misalkan $a \in G$ elemen berorder maksimal, jadi $|a| = p^r$ dimana $r \leq n$ dan $|x| \leq p^r$ untuk semua $x \in G$. Catatan bila $r = n$, maka $G = \langle a \rangle$ dan bukti selesai. Jadi misalkan $r < n$ dan pilih $b \in G$ adalah elemen dengan order minimal dan $b \notin \langle a \rangle$. Hal ini berarti bila $x \in G$ dan $|x| < |b|$, maka $x \in \langle a \rangle$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. Tinjau elemen $pb \in G$, maka $|pb| = |b|/\mathrm{fpb}(|b|, p) = |b|/p < |b|$, jadi $pb \in \langle a \rangle$ akibatnya $pb = ma$ untuk beberapa bilangan bulat m. Karena $|a| = p^r$ dan a dipilih dengan order maksimal, maka $0 = p^r b = p^{r-1}(pb) = p^{r-1}(ma)$. Jadi $|ma| \leq p^{r-1}$ dan ma bukan generator dari $\langle a \rangle$. Dengan menggunakan Kesimpulan 2.3.4 didapat $\mathrm{fpb}(p^r, m) \neq 1$, jadi p membagi m. Misalkan $m = ps$, didapat $pb = ma = psa$. Tinjau elemen $-sa + b \in G$, jelas bahwa $p(-sa + b) = 0$. Karena $b \notin \langle a \rangle$, maka $-sa + b \notin \langle a \rangle$. Jadi $|-sa + b| = p$. Karena dipilih $b \in G$ dan $b \notin \langle a \rangle$ dengan order minimal, maka haruslah $|b| = p$. Dengan demikian $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. Tinjau grup kuasi $G' = G/\langle b \rangle$. Karena $|G'| = p^{n-1}$, dengan menggunakan hipotesis induksi, proposisi dipenuhi untuk G'. Misalkan $a' = a + \langle b \rangle \in G'$. Order elemen a' adalah bilangan bulat positip k yang memenuhi $ka \in \langle b \rangle$. Karena $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$,maka $|a'| = |a|$. Misalkan homomorpisma $\phi : G \to G/\langle b \rangle = G'$, dimana $\phi(a) = a'$, $\forall a \in G$. Dengan menggunakan Proposisi 3.2.2 bagian (4) didapat a' adalah pembangun dari G'. Akibatnya a' adalah elemen di G' dengan order maksimal. Jadi dengan hipotesis induksi didapat $G' = \left\langle a' \right\rangle \oplus H'$ untuk beberapa H' subgrup dari G'. Selanjutnya, misalkan $H = \phi^{-1}(H')$, maka dengan Proposisi 3.2.2 bagian (6) didapat H adalah subgrup dari G dengan $H/\langle b \rangle = H'$. Jadi $|H| = \left|H'\right| p$ dan

$$|G| = \left|G'\right| |\langle b \rangle| = \left|G'\right| p = \left|\left\langle a' \right\rangle\right| \left|H'\right| p = p^r \left|H'\right| p = p^r |H| = |\langle a \rangle| \, |H|.$$

Akhirnya untuk menunjukkan $G = \langle a \rangle \oplus H$, dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.1 cukup ditunjukkan $\langle a \rangle \cap H = \{0\}$. Untuk itu, misalkan $x \in \langle a \rangle \cap H$. Karena$G' = \left\langle a' \right\rangle \oplus H'$, maka $x + \langle b \rangle \in \left\langle a' \right\rangle \cap H' = \{\langle b \rangle\}$. Jadi $x \in \langle b \rangle$, akibatnya $x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Karena $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$, maka $x = 0$. Jadi $\langle a \rangle \cap H = \{0\}$, dengan demikian $G = \langle a \rangle \oplus H$. ●

Bukti Proposisi 4.4.2 cukup panjang, tetapi akan terlihat dalam contoh berikut betapa berdaya gunanya proposisi ini yang berkaitan dengan langkah-langkah yang telah dibahas.

Contoh 4.4.4 Diberikan G suatu grup komutatif dengan $|G| = 27 = 3^3$ dan misalkan $a \in G$ suatu elemen dengan order maksimal. Maka $|a| = 3, 3^2$ atau 3^3.

Kasus 1 $|a| = 3^3$, maka $G \cong \mathbb{Z}_{27}$.

Kasus 2 $|a| = 3^2$, maka $G = \langle a \rangle \oplus H$, dimana H adalah subgrup dari G. Dalam kasus ini didapat $G \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$.

Kasus 3 $|a| = 3$, maka $G \cong \langle a \rangle \oplus H$, dimana H suatu subgrup berorder 9. Karena $a \in G$ berorder maksimal, maka H tidak akan mempunyai elemen yang berorder lebih besar dari 3. Gunakan Proposisi 4.4.2 pada H, didapat $H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Jadi $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Catatan, $\mathbb{Z}_{27}$ tidak isomorpik dengan $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. ●

Proposisi 4.4.3 Misalkan p bilangan bulat prima dan G suatu p-grup berhingga. Maka

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_s,$$

dimana masing-masing G_i adalah siklik dan $|G_1| \geq |G_2| \geq \cdots \geq |G_2|$.

Bukti Digunakan induksi pada $|G|$. Bila $|G| = 1, 2$ atau 3, maka tidak ada yang peluh dibuktikan. Jadi diasumsikan proposisi benar untuk semua grup komutatif berhingga berorder lebih kecil dari $|G|$. Dengan menggunakan Proposisi 4.4.2 didapat $G = \langle a_1 \rangle \oplus H$, dimana $a_1 \in G$ beroder maksimal. Jadi bila $a_2 \in H$ berorder maksimal, maka $|a_1| \geq |a_2|$. Misalkan $G_1 = \langle a_1 \rangle$, dan gunakan hipotisisi induksi pada H didapat $H = G_2 \oplus \cdots \oplus G_s$, dimana masing-masing G_i adalah siklik dan $|G_2| \geq \cdots \geq |G_s|$. Dengan demikian didapat

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_s,$$

dimana masing-masing G_i adalah siklik dan $|G_1| \geq |G_2| \geq \cdots \geq |G_2|$. ●

Contoh 4.4.5 Misalkan G dan H grup komutatif berorder 2^4. Misalkan, $G = G_1 \oplus G_2$, dimana G_1 dan G_2 siklik berorder 4, jadi $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Misalkan, $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ dimana H_1 adalah siklik berorder 4, H_2 dan H_3 siklik berorder 2, jadi $H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Selanjutnya, dihitung banyaknya elemen-elemen berorder 1 atau 2 di G dan di H. Misalkan $G^{(2)} = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$. Bila $x, y \in G^{(2)}$, maka $2(x - y) = 2x - 2y = 0 - 0 = 0$, jadi $(x - y) \in G^{(2)}$. Dengan demikian $G^{(2)}$ adalah subgrup dari G. Bila $x = g_1 + g_2$, dimana $g_1 \in G_1$ dan $g_2 \in G_2$, maka dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.3 didapat $|x|$ membagi 2 bila dan hanya bila $|g_1|$ dan $|g_2|$ keduanya membagi 2. Hal ini berarti $G^{(2)} = G_1^{(2)} + G_2^{(2)}$, dimana $G_i^{(2)} = G^{(2)} \cap G_i = \{x \in G_i \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$. Dengan menggunakan Lemma 4.3.2, maka jumlahan $G^{(2)} = G_1^{(2)} + G_2^{(2)}$ adalah jumlahan langsung dan dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.2 didapat $\left|G^{(2)}\right| = \left|G_1^{(2)}\right| \left|G_2^{(2)}\right|$. Tetapi himpunan elemen-elemen berorder 1 atau 2 dalam suatu grup siklik dengan order membagi 2 adalah suatu grup siklik tunggal berorder 2. Jadi $\left|G_1^{(2)}\right| = \left|G_2^{(2)}\right| = 2$ dan $\left|G^{(2)}\right| = 2^2$. Dengan cara perhitungan yang sama, didapat bila $H^{(2)} = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$, maka $\left|H^{(2)}\right| = \left|H_1^{(2)}\right| \left|H_2^{(2)}\right| \left|H_3^{(2)}\right| = 2^3$.Karena banyaknya himpunan dalam $G^{(2)}$ dan $H^{(2)}$ yang elemen-elemennya berorder 2 tidak sama, maka G dan H tidak akan isomorpik. Jadi $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ tidak isomorpik dengan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ●

Contoh 4.4.6 Misalkan $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ dengan $G_1 \cong \mathbb{Z}_8, G_2 \cong \mathbb{Z}_4$ dan $G_3 \cong \mathbb{Z}_4$. Juga, misalkan $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ dengan $H_1 \cong \mathbb{Z}_8, H_2 \cong \mathbb{Z}_8$ dan $H_3 \cong \mathbb{Z}_2$. Selanjutnya, misalkan $G^{(2)} = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$ dan $H^{(2)} = \{x \in H \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$. Maka, suatu perhitungan seperti dilakukan dalam contoh sebelumnya menunjukkan bahwa $\left|G^{(2)}\right| = 2^3$ dan $\left|H^{(2)}\right| = 2^3$. Dengan demikian tidak bisa dibedakan elemen-elemen berorder 2 dalam G dan H. Apapun hal ini, tinjau grup kuasi $G/G^{(2)}$ dan gunakan Proposisi 4.3.1 didapat

$$G/G^{(2)} = G_1/G_1^{(2)} \oplus G_2/G_2^{(2)} \oplus G_3/G_3^{(2)},$$

dimana sebagaimana dalam contoh sebelumnya

$$G_i^{(2)} = G^{(2)} \cap G_i = \{x \in G_i \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 2\}$$

adalah subgrup siklik dari G_i berorder 2 dan $\left|G_i/G_i^{(2)}\right| = |G_i|/2$. Jadi $G/G^{(2)} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dengan argumen yang sama didapat $H/H^{(2)} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \{0\} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Sebagaimana dalam contoh sebelumnya, maka $G/G^{(2)}$ dan $H/H^{(2)}$ tidak akan isomorpik. Dengan demikian G dan H tidak isomorpik. Jadi $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$. ●

Proposisi 4.4.4 Misalkan p bilangan bulat prima dan G adalag p-grup komutatif berhingga. Bila

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_r \text{ dan } G = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_s,$$

dimana G_i dan H_i adalah siklik dengan

$$|G_1| \geq |G_2| \geq \cdots \geq |G_r| \text{ dan } |H_1| \geq |H_2| \geq \cdots \geq |H_s|.$$

Maka

(1) $r = s$.

(2) $G_i \cong H_i$.

Bukti

(1) Misalkan $G^{(p)} = \{x \in G \mid |x| = 1 \text{ atau } p\}$ dan untuk sebarang K subgrup dari G $K \cap G^{(p)} = \{x \in K \mid |x| = 1 \text{ atau } p\}$. Bila $x, y \in G^{(p)}$, maka $p(x-y) = px - py = 0 - 0 = 0$. Jadi $(x-y) \in G^{(p)}$, dengan demikian $G^{(p)}$ suatu subgrup dari G. Bila $x = g_1 + g_2 + \cdots + g_r$, dimana $g_i \in G_i$ untuk semua i, $1 \leq i \leq r$, maka dengan Kesimpulan 4.3.3 $|x|$ membagi p bila dan hanya bila $|g_i|$ membagi p untuk semua i. Hal ini berarti $G^{(p)} = G_1^{(p)} + G_2^{(p)} + \cdots + G_r^{(p)}$ dan dengan menggunakan Lemma 4.3.2, maka jumlahan tersebut adalah jumlahan langsung. Dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.2 didapat $\left|G^{(p)}\right| = \left|G_1^{(2)}\right| \left|G_2^{(p)}\right| \left|G_r^{(p)}\right|$. Tetapi himpunan elemen-elemen berorder 1 atau p dalam suatu grup siklik dengan order membagi p adalah suatu subgrup siklik tunggal berorder p. Jadi $\left|G_i^{(p)}\right| = p$ untuk semua i dan $\left|G^{(p)}\right| = p^r$. Sejalan dengan perhitungan ini untuk G_i diganti H_i didapat $\left|G^{(p)}\right| = p^s$. Akibatnya $p^r = p^s$, jadi $r = s$.

(2) Untuk menunjukkan $G_i \cong H_i$ untuk semua i, $1 \leq i \leq r$ digunakan induksi pada n, dimana $|G| = p^n$. Bila $n = 1$, maka G adalah siklik dengan demikian tidak ada yang dibuktikan. Misalkan proposisi benar untuk semua p-grup komutatif berorder p^r dengan $r < n$. Tinjau grup kuasi $G/G^{(p)}$, dengan menggunakan Proposisi 4.3.1 didapat
$$G/G^{(p)} \cong G_1/G_1^{(p)} \oplus G_2/G_2^{(p)} \oplus \cdots \oplus G_r/G_r^{(p)}$$
dan
$$G/G^{(p)} \cong H_1/H_1^{(p)} \oplus H_2/H_2^{(p)} \oplus \cdots \oplus H_r/H_r^{(p)}.$$
Terlihat ada dua dekomposisi dari p-grup komutatif $G/G^{(p)}$ dimana ordernya lebih kecil dari p^n. Dengan hipotesis induksi $G_i/G_i^{(p)} \cong H_i/H_i^{(p)}$ untuk semua i. Sebagaimana telah dibuktikan pada bagian (1) bahwa $\left|G_i^{(p)}\right| = \left|H_i^{(p)}\right| = p$ untuk semua i, jadi $|G_i| = |H_i|$ dan karena G_i dan H_i siklik, maka $G_i \cong H_i$ untuk semua i. ✓

Sebagai ringkasan dari apa yang telah dibahas baik dari beberapa contoh, proposisi dan kesimpulan diberikan teorema berikut sehingga bukti dengan mudah didapat.

Teorema 4.4.1 (**Fundamental Grup Komutatif Berhingga**) Misalkan G adalah suatu grup komutatif berhingga. Maka

(1) $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_s^{a_s}}$, dimana p_i adalah prima tidak perlu berbeda.

(2) Produk langsung adalah tunggal, kecuali urutan dari faktor.

Bukti Misalkan G grup komutatif berhingga dimana
$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$
Maka dengan menggunakan Kesimpulan 4.4.1 didapat
$$G \cong G(p_1^{a_1}) \oplus G(p_2^{a_2}) \oplus \cdots \oplus G(p_k^{a_k}),$$

dimana $\left|G(p_i^{a_i})\right| = p_i^{a_i}$. Dengan menggunakan Proposisi 4.4.3 didapat

$$G(p_i^{a_i}) \cong \mathbb{Z}_{p_i^{t_1}} \times \mathbb{Z}_{p_i^{t_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_i^{t_s}},$$

dimana $a_i = t_1 + t - 2 + \cdots + t_2$. Dengan demikian telah terbukti bagian (1). Bukti bagian (2) didapat dari Proposisi 4.4.4. ✓

Contoh 4.4.7 Akan ditentukan semua grup komutatif beroder 180 yang berbeda dengan makna isomorpik. Untuk grup G yang demikian didapat $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{a_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{a_k}}$, dimana $|G| = 180 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ dan p_i adalah bilangan bulat prima yang tidak harus berbeda. Dalam hal ini $180 = 2^2\, 3^2\, 5$. Jadi G adalah grup yang isomorpik dengan grup-grup berikut

$$\begin{array}{rcl}
G & \cong & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{180} \\
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90} \\
G & \cong & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{60} \\
G & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30}.
\end{array}$$

Catatan bahwa hasil semua grup tidak saling isomorpik, digunakan teorema fundamental grup komutatif dan Teorema 4.2.2 yaitu $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ bila dan hanya bila $\text{fpb}(n, m) = 1$.

Diakhir bagian ini, diberikan akibat langsung dari teorema fundamental grup komutatif berhingga.

Definisi 4.4.2 Suatu grup G dikatakan **terdekomposisi** bila G adalah jumlahan langsung dari dua subgrup sejati tak-trivial. Bila tidak dikatakan **tak-terdekomposisi**. ✓

Teorema 4.4.2 Diberikan G suatu grup komutatif berhingga. Maka G tak-terdekomposisi bila dan hanya bila G isomorpik dengan $\mathbb{Z}_{p^r}$ untuk bebarapa bilangan prima p dan bilangan bulat positip r.

Bukti Bila G tak-terdekomposisi, langsung dari Teorema 4.4.1, maka $G \cong \mathbb{Z}_p^r$. Sebaliknya, bila $G \cong \mathbb{Z}_p^r$, maka dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.4 G tak-terdekomposisi. ✓

Dalam kasus G suatu grup siklik berhingga, diketahui bahwa bila m membagi $|G|$, maka G mempunyai suatu subgrup tunggal berorder m. Selanjutnya dapat dibuktikan sebagai pembanding untuk grup komutatif berhingga.

Teorema 4.4.3 Bila m membagi order dari suatu grup komutatif berhingga G, maka G mempunyai suatu subgrup berorder m.

Bukti Dari Kesimpulan 4.4.1 didapat didapat $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k$, dimana G_i suatu subgrup siklik yang berorder $p_i^{a_i}$ untuk semua i, $1 \leq i \leq k$ dan $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Karena

m membagi $|G|$, maka m dapat ditulis sebagai $m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$ dimana $b_i \leq a_i$ untuk semua i. Untuk masing-masing i subgrup siklik G_i berorder $p_i^{a_i}$ mempunyai suatu subgrup H_i berorder $p_i^{b_i}$. Tinjau jumlahan $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_k$, dengan menggunakan Lemma 4.3.2, maka jumlahan tersebut adalah jumlahan langsung, sehingga dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.2 didapat $|H| = |H_1|\,|H_2| \cdots |H_k| = m$. ✓

Teorema 4.4.4 Diberikan bilangan bulat $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ dimana p_i adalah bilangan prima yang berbeda untuk semua i, $1 \leq i \leq k$. Maka sebarang grup komutatif berorder m adalah siklik.

Bukti Karena $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ dimana p_i adalah bilangan prima yang berbeda untuk semua i, $1 \leq i \leq k$, maka dengan menggunakan Teorema 4.4.1 didapat

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k},$$

dan dengan menggunakan Kesimpulan 4.3.4 didapat

$$\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k} \cong \mathbb{Z}_{p_1 p_2 \cdots p_k} = \mathbb{Z}_m.$$

Jadi $G \cong \mathbb{Z}_m$, dengan demikian G adalah siklik. ✓

Latihan

Latihan 4.4.1 Dapatkan semua grup komutatif yang berorder n.

1. $n = 6$	2. $n = 9$	3. $n = 10$	4. $n = 12$	5. $n = 16$
6. $n = 20$	7. $n = 60$	8. $n = 80$	9. $n = 72$	10. $n = 108$. ✓

Latihan 4.4.2 Dapatkan semua grup komutatif yang berorder 32 dan tepat mempunyai dua subgrup berorder 4. ✓

Latihan 4.4.3 Dapatkan semua grup komutatif berorder 32 dan tidak mempunyai elemen berorder 4. ✓

Latihan 4.4.4 Tunjukkan bahwa setiap grup komutatif berorder 6 memuat suatu elemen yang berorder 6. ✓

Latihan 4.4.5 Misalkan p adalah suatu bilangan prima. Tentukan berapa banyak grup komutatif yang berorder p^5. ✓

Latihan 4.4.6 Misalkan p dan q adalah bilangan prima yang berbeda. Tentukan berapa banyak grup komutatif yang mempunyai order berikut.

(a) pq

(b) pq^2

(c) p^2q^2.

Latihan 4.4.7 Misalkan p adalah bilangan prima. Tentukan semua grup komutatif berorder p^n dan memuat suatu elemen berorder p^{n-2}.

Latihan 4.4.8 tentukan apakah pasngan grup berikut isomorpik atau tidak.

(a) $\mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_{42} \times \mathbb{Z}_{35}$ dan $\mathbb{Z}_{315} \times \mathbb{Z}_{140} \times \mathbb{Z}_{6}$.

(b) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{70} \times \mathbb{Z}_{14}$ dan $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{25}$.

Latihan 4.4.9 Misalkan p dan q adalah bilangan prima yang berbeda, G grup komutatif berorder n dimana p dan q keduanya membagi n. Tunjukkan bahwa G memuat suatu subgrup siklik berorder pq.

Latihan 4.4.10 Diberikan G adalah suatu grup komutatif berhingga dan p suatu bilangan prima yang memenuhi untuk semua $x \in G, x \neq e, |x| = p^r$ untuk beberapa bilangan bulat positip r. Tunjukkan bahwa G adalah suatu p-grup.

Latihan 4.4.11 Misalkan G adalah suatu p-grup komutatif berhingga untuk beberapa bilangan prima p. Tinjau

$$G^{(p)} = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } p\},$$

dan misalkan H suatu subgrup siklik tak-trivial dari G. Tunjukkan bahwa

$$\left|G^{(p)} \cap H\right| = p.$$

Latihan 4.4.12 Tentukan semua grup komutatif berorder 625. Untuk masing-masing grup komutatif tersebut, maka

(a) hitung $\left|G^{(5)}\right|$ dimana $G^{(5)} = \{x \in G \,|\, |x| = 1 \text{ atau } 5\}$.

(b) Dapatkan $G/G^{(5)}$.

Latihan 4.4.13 Misalkan G adalah p-grup komutatif berhingga untuk beberapa bilangan prima p. Misalkan $G^{(p)}$ sebagaimana dalam Latihan 4.4.11 dan $pG = \{pg \,|\, g \in G\}$. Tunjukkan bahwa

(a) pG adalah suatu subgrup dari G.

(b) $pG \cong G/G^{(p)}$.

Latihan 4.4.14 Misalkan G_1 dan G_2 grup komutatif berhingga. Tunjukkan bahwa G_1 dan G_2 mepunyai elemen-elemen berorder n dengan jumlah yang sama untuk semua n bila dan hanya bila $G_1 \cong G_2$.

Latihan 4.4.15 Misalkan H dan K adalah p-grup komutatif berhingga. Tunjukkan bahwa $H \times H \cong K \times K$ bila dan hanya bila $H \cong K$.

Bab 5

Tindakan Grup

Dalam bab ini dibahas konsep dari suatu tindakan grup pada suatu himpunan. Hal yang penting dari pengertian ini akan tampak sepanjang bab ini melalui berbagai aplikasi. Hal ini meliputi masalah enumerasi (aplikasi toerema Burnside) dan analisisi struktur grup berorder pq atau p^2q dimana p dan q adalah bilangan prima (aplikasi teorema sylow). Kajian topik ini menggunakan konsep dari tidakan suatu grup.

5.1 Tindakan Grup dan Teorema cayley

Konsep yang dikenalkan dalam bagian ini meliputi dua obyek yaitu suatu grup G dan suatu himpunan $X \neq \emptyset$. Masing-masing elemen dari grup G akan menentukan suatu permutasi dari elemen-elemen himpunan X. Operasi pada X akan sesuai dengan komposisi dari permutasi yang terkait dari X. Contoh berikut secara visual membantu untuk memahami konsep baru ini.

Contoh 5.1.1 Diberikan sebarang $\theta \in \mathbb{R}$, tinjau matriks

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Misalkan $G = \{A(\theta) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Dengan operasi perkalian matriks dapat ditunjukkan G adalah subgrup dari $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Misalkan X adalah bidang $\mathbb{R}^2$. Dinyatakan representasi dari suatu titik sebagai suatu vektor kolom dan digunakan koordinat polar:

$$P(r, \phi) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Jadi $X = \{P(r, \phi) \,|\, r, \phi \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$. Untuk sebarang $A(\theta) \in G$ dan sebarang $P(r, \phi) \in X$

didapat

$$\begin{aligned} A(\theta)P(r,\phi) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos(\phi+\theta) \\ r\sin(\phi+\theta) \end{bmatrix} = P(r,\phi+\theta). \end{aligned}$$

Perlu diperhatikan bahwa, titik $P(r,\phi+\theta)$ diperoleh dari titik $P(r,\phi)$ melalui rotasi bidang pada titik asal dengan sudutsebesar θ. Juga matriks berikut:

(1) Matriks

$$A(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

adalah matriks identitas dalam G. Dengan demikian didapat untuk sebarang titik $P(r,\phi) \in X$,

$$A(0)P(r,\phi) = P(r,\phi+0) = P(r,\phi).$$

(2) Untuk perkalian matriksdidapat

$$\begin{aligned} A(\theta)A(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi & -\cos\theta\sin\psi - \sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\psi) & -\sin(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi) & \cos(\theta+\psi) = A(\theta+\psi). \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi

$$(A(\theta)A(\psi))P(r,\phi) = P(r,\phi+\theta+\psi) = A(\theta)(A(\psi)P(r,\phi)).$$

Hal ini berarti bahwa bila terlebih dahulu dilakukan perkalian dua matriks kemudian merotasi titik melalui hasil perkalian matriks tersebut atau bila dilakukan lebih dulu merotasi titik melalui satu matriks dan kemudian hasilnya dirotasi lagi dengan matriks yang lainnya didapat hasil yang sama.

(3) Diberikan dua titik $P(r,\phi)$ dan $P(s,\psi)$ di X, maka dapat dipilih matriks $A(\theta)$ di G yang memenuhi $A(\theta)P(r,\phi) = P(s,\psi)$ bila dan hanya bila $s = r$. Yaitu bila dan hanya bila dua titik tersebut terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. ●

Untuk sebarang himpunan tak-kosong X dan grup G tinjau pemetaan dari $G \times X$ ke X yang ditulis sebagai $(g,x) \to g.x$, dimana $g \in G$ dan $x \in X$. Apapun hal ini G ditinjau sebagai suatu grup dan bukan sekedar himpunan. Berkaitan dengan pemetaan tersebut dalam hal makna tertentu dapat disesuaikan dengan struktur grup G.

Definisi 5.1.1 Suatu **tindakan grup** G pada suatu himpunan tak-kosong X adalah suatu pemetaan $G \times X$ ke X dengan sifat berikut:

(1) $e.x = x$ untuk semua $x \in X$ dan e adalah elemen netral di G.

(2) $g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$ untuk semua $g_1, g_2 \in G$ dan semua $x \in X$. Bila tindakan tersebut ada, maka dikatakan grup G **bertindak** pada X dan X adalah $G-$ **set**. ✓

Dalam Contoh 5.1.1 menjelaskan suatu tindakan grup. Difinisi 5.1.1 dapat diilustrasikan oleh berbagai contoh nyata berikut.

Contoh 5.1.2 Grup *additive* $\mathbb{R}$ bertindak pada bidang $\mathbb{R}^2$ melalui tranlasi horizontal

$$(a, (x, y)) \to (x + a, y)$$

dan suatu tindakan yang lain translasi vertikal

$$(b, (x, y)) \to (x, (y + b)).$$

Contoh 5.1.3 Misalkan $G = \{e, g\}$ adalah grup siklik berorder 2 dan himpunan $X = \mathbb{C}$. Maka G bertindak pada himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ melalui tindakan $(e, x + iy) \to x + iy$ dan $(g, x + iy) \to x - iy$.

Contoh 5.1.4 Setiap subgrup H dari suatu grup G (termasuk G sendiri) bertindak pada G melalui **perkalian kiri**. Tindakan ini adalah $H \times G \to G$, dimana $(h, g) \to hg$ untuk semua $h \in H$ dan semua $g \in G$.

Contoh 5.1.5 Setiap subgrup H dari suatu grup G (termasuk G sendiri) bertindak pada G melalui **konjugasi**. Tindakan ini adalah $H \times G \to G$, dimana $(h, g) \to hgh^{-1}$ untuk semua $h \in H$ dan semua $g \in G$. Sifat (1) jelas, sedangkan sifat (2) dari persamaan $(h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1} = h_1(h_2gh_2^{-1})h_1^{-1}$.

Konjugasi adalah suatu tindakan yang sangat penting yang akan dibahas lebih dekat dalam suatu bagian kemudian. Contoh berikut juga merupakan suatu contoh fundamental.

Contoh 5.1.6 Misalkan $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan S_n adalah grup permutasi dari n elemen. Maka S_n bertindak pada X sebagai berikut: $(\tau, i) \to \tau(i)$, dimana τ suatu permutasi di S_n dan $i \in X$. Sifat (1) mengikuti definisi permutasi identitas dan sifat (2) dari definisi perkalian permutasi sebagai komposisi dari fungsi.

Contoh 5.1.6 adalah fundamental sebab tindakan dari sebarang grup G pada himpunan tak-kosong X terkait dekat dengan tindakan grup simetri dari X yaitu S_X pada X sebagaimana telah dibahas dalam contoh. Keterkaitan ini dibahas pada proposisi berikut.

Proposisi 5.1.1 Misalkan G adalah suatu grup bertindak pada suatu himpunan tak-kosong X. Maka

(1) untuk masing-masing $g \in G$ pemetaan $\tau_g : X \to X$ didefinisikan oleh $\tau_g(x) = g.x$ adalah suatu permutasi dari X.

(2) Pemetaan $\chi : G \to S_X$ didefinisikan oleh $\chi(g) = \tau_g$ adalah suatu homomorpisma.

Bukti

(1) Ditunjukkan bahwa $\tau_g : X \to X$ adalah suatu permutasi dari X atau τ_g adalah bijektif. Pemetaan τ_g adalah satu-satu sebab bila $\tau_g(x) = \tau_g(y)$, maka $g.x = g.y$. Didapat $g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(g.y)$. Jadi

$$x = e.x = (g^{-1}g).x = g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(g.y) = (g^{-1}g).y = e.y = y.$$

Pemeteaan τ_g pada, sebab bila $w \in X$ dapat dipilih $g^{-1}.w \in X$ yang memenuhi

$$\tau_g(g^{-1}.w) = g.(g^{-1}.w) = (gg^{-1}).w = e.w = w.$$

(2) Diberikan sebarang $g-1, g_2 \in G$ dan sebarang $x \in X$ didapat

$$\begin{aligned}
\chi(g_1g_2)(x) &= (g_1g_2).x \\
&= g_1.(g_2.x) \\
&= \tau_{g_1}(\tau_{g_1}(x)) \\
&= (\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(x) \\
&= \chi(g_1) \circ \chi(g_2)(x)
\end{aligned}$$

Jadi $\chi(g_1g_2) = \chi(g_1) \circ \chi(g_2)$.

Kebalikan dari Proposisi 5.1.1 juga benar sebagaimana ditunjukkan oleh proposisi berikut.

Proposisi 5.1.2 Diberikan suatu homomorpisma grup $\psi : G \to S_X$, maka pemetaan $G \times X \to X$ didefinisikan oleh $(g, x) \to g.x = \psi(g)(x)$ adalah suatu tindakan dari G pada X.

Bukti Ditunjukkan berdasarkan Definisi 5.1.1 memenuhi sifat:

(1) $e.x = \psi(e)(x) = \text{id}(x) = x$, dimana id $\in S_X$ adalah permutasi identitas.

(2) $g_1.(g_2.x) = \psi(g_1)((\psi(g_2)(x)) = (\psi(g_1) \circ \psi(g_2))(x) = \psi(g_1g_2)(x) = (g_1g_2).x.$

Akan menjadi jelas kemudian ketika diinginkan mengkonstruksi suatu contoh dari suatu grup bahwa bukan grup komutatif. Sering dicari subgrup dari beberapa S_n yang memenuhi kondisi yang diinginkan. Grup S_n tampaknya memberikan suatu sumber persediaan yang tak-habis-habisnya untuk membuat contoh. Alasan ini menjadi jelas sebagaimana ditunjukkan dalam hasil berikut.

Teorema 5.1.1 (**Teorema Cayley**) Setiap grup isomorpik dengan suatu subgrup dari suatu grup permutasi.

Bukti Misalkan G sebarang grup dan bertindak pada dirinya sendiri melalui perkalian kiri. Dengan demikian didapat $G \times G \to G$, dimana $(g, x) \to gx$. Dengan Proposisi 5.1.1 ada suatu homomorpisma grup $\chi : G \to S_G$ didefinisikan oleh $\chi(g) = \tau_g \in S_G$, dimana $\tau_g(x) = gx$ untuk semua $x \in G$. Kernel dari χ adalah himpunan semua $g \in G$ yang memenuhi $\tau_g = \text{id}$. Jadi $\ker(\chi) = \{g \in G \,|\, gx = x \text{ untuk semua } x \in G\} = \{e\}$. Jadi χ adalah satu-satu, dengan demikian G isomorpik dengan $\text{im}(\chi)$. Tetapi $\text{im}(\chi)$ adalah subgrup dari S_G. Jadi G isomorpik dengan suatu subgrup dari suatu grup permutasi. ✓

Definisi 5.1.2 Homomorpisma $\chi : G \to S_X$ dikaitkan dengan suatu tindakan dari suatu grup G pada suatu himpunan tak-kosong X disebut **representasi permutasi** dari tindakan. ✓

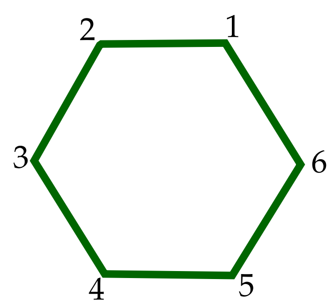
Contoh 5.1.7 Sudah diberikan suatu representasi permutasi dari grup D_4 dalam Contoh 2.4.11. Secara lebih umum, tindakan dari grup dihedral D_n pada segi-n beraturan memberikan suatu representasi dari grup dihedral D_n sebagai suatu subgrup dari grup simetri S_n.

Definisi 5.1.3 Grup G dikatakan **secara tepat** bertindak pada himpunan tak-kosong X bila $\ker(\chi) = \{e\}$ dengan kata lain elemen di G yang menjadikan setiap elemen dari X tetap hanya elemen netral e. Jadi G secara tepat bertindak pada X bila dan hanya bila χ adalah satu-satu, dalam hal yang demikian grup G isomorpik dengan subgrup $\text{im}(\chi)$ dari S_X. ✓

Contoh 5.1.8 Tindakan dari dihedral grup

$$D_n = \{e, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \ldots, \rho^{n-1}\tau\}$$

pada segi-n beraturan adalah setia. Misalkan $G = \{e, g, g^2\}$ siklik berorder 3 dan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah himpunan enam titik sudut dari segi-6 beraturan, sebagaimana diberikan oleh Gambar 5.1. Misalkan G bertindak pada X melalui rotasi g sebesar



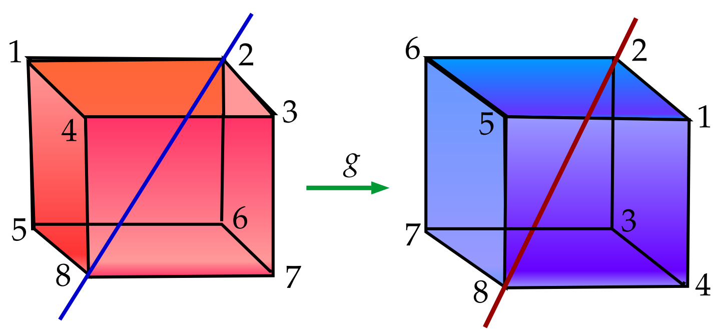
Gambar 5.1: Segi-6 beraturan

120° berlawanan arah jarum jam pada segi-6 beraturan. Jadi $G = \{e, \rho^2, \rho^4\}$ adalah subgrup dari D_6 dimana ρ adalah rotasi sebesar 60° berlawanan arah jarum jam. Dengan demikian G secara tepat bertindak pada X dan dapat direpresentasikan oleh subgrup

$$\{e, (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)\}$$

dari grup simetri S_6, dimana generator g adalah permutasi $g = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$.

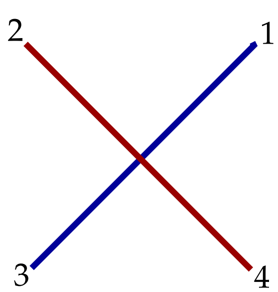
Contoh 5.1.9 Misalkan $G = \{e, g, g^2\}$ grup siklik berorder 3 dan $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ adalah himpunan titik sudut dari suatu kubus. Misalkan G bertindak pada X melalui rotasi g yaitu rotasi pada garis melalui titik sudut 2 dan 8. Jadi $g.1 = 3, g.2 = 2, g.3 = 6, g.4 = 7, g.5 = 4, g.6 = 1, g.7 = 5$ dan $g.8 = 8$ sebagai mana diberikan oleh Gambar 5.2. Tindakan G pada X adalah tepat, sebab G dapat direpresentasikan oleh subgrup



Gambar 5.2: Tindakan G pada Kubus

$$\{e, (1\ 3\ 6)(4\ 7\ 5), (1\ 6\ 3)(4\ 5\ 7)\}$$

dari grup simetri S_8. Dalam kasus ini generator dari G direpresentasikan oleh elemen $g = (1\ 3\ 6)(4\ 7\ 5)$.



Gambar Diagonal Persegi

Contoh 5.1.10 Sebagaimana telah diketahui tindakan dari dihedral grup D_4 pada himpunan titik sudut $\{1, 2, 3, 4\}$ dari persegi adalah tindakan tepat. Tetapi sebagai pengganti, bila D_4 bertindak pada himpunan $\{d_1, d_2\}$ dari diagonal persegi, dimana d_1 adalah diagonal $1 - 3$ dan d_2 diagonal $2 - 4$ (lihat gambar sebelah). Dalam hal ini, tindakan tidak tepat, sebab $\rho^2.d_1 = d_1$ dan $\rho^2.d_2 = d_2$, dimana $\rho = (1\ 2\ 3\ 4) \in D_4$.

Latihan

Latihan 5.1.1 Tunjukkan bahwa G sebagaimana didefinisikan dalam Contoh 5.1.1 adalah suatu subgrup dari $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Latihan 5.1.2 Lagi, dengan G sebagaimana didefinisikan dalam Contoh 5.1.1, tunjukkan bahwa untuk sebarang titik P dan Q dalam bidang $\mathbb{R}^2$ ada suatu matriks $A \in G$ dengan $A.P = Q$ bila dan hanya bila P dan Q keduanya adalah titik yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ untuk beberapa $r > 0$.

Latihan 5.1.3 Untuk latihan berikut (a) Tunjukkan bahwa X dapat dianggap sebagai suatu $G-$set dalam suatu cara yang wajar, yaitu uraikan suatu tindakan grup G pada X dengan cara yang wajar. (b) Tunjukkan bahwa tindakan memenuhi sifat dua sifat definisi dari suatu tindakan. (c) Berikan suatu representasi permutasi dari tindakan.

(1) $G = \{e, g\}$ grup siklik berorder 2 dan X himpunan titik dari suatu segitiga sama sisi.

(2) $G = \{e, g, g^2\}$ grup siklik berorder 3 dan X himpunan titik dari suatu segitiga sama sisi.

(3) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grup tak-siklik berorder 4 dan X himpunan titik sudut dari suatu persegi.

(4) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grup tak-siklik berorder 6 dan X himpunan titik sudut dari suatu segi-6 beraturan.

(5) $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dan X himpunan titik sudut dari suatu persegi.

Latihan 5.1.4 Misalkan $G = \mathbb{Z}$ dan X adalah himpunan koset dari $5\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$. Berikan suatu contoh dari suatu tindakan G pada X didefinisikan dengan cara yang wajar tetapi bukan tindakan tepat.

Latihan 5.1.5 Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah suatu $G-$ set dengan tindakan translasi horizontal sebagaimana diberikan dalam Contoh 5.1.2.

Latihan 5.1.6 Misalkan G suatu grup dan X adalah himpunan dari semua subgrup dari G. Tunjukkan bahwa X adalah suatu $G-$set terhadap konjugasi : $(g, H) \to gHg^{-1}$.

Latihan 5.1.7 Misalkan $G = S_3$ dan X himpunan semua subgrup dari S_3. Tulis tabel untuk menunjukkan tindakan dari G pada X melalui konjugasi seperti Latihan 5.1.6. Apakah tindakan ini suatu tindakan tepat?

Latihan 5.1.8 Misalkan G dan X seperti dalam Latihan 5.1.6 dengan G bertindak pada X melalui konjugasi. Uraikan kernel dari χ sebagaimana dalam Proposisi 5.1.1 dimana G adalah suatu grup komutatif.

Latihan 5.1.9 Misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G dan X himpunan semua koset kiri dari H dalam G. Tunjukkan bagaimana X dapat dibuat sebagai suatu $G-$set dengan cara yang wajar.

Latihan 5.1.10 Misalkan X_1 dan X_2 adalah $G-$set untuk grup G dan $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Tunjukkan bagaimana himpunan $X_1 \cup X_2$ dapat menjadi suatu $G-$set dalam suatu cara yang wajar.

Latihan 5.1.11 Untuk latihan berikut, misalkan H adalah suatu subgrup dari suatu grup G dan himpunan $X = \{xH \,|\, x \in G\}$. Misalkan G bertindak pada X melalui perkalian kiri $(g, xH) \rightarrow gxH \in X$.

(1) Tunjukkan bahwa tindakan tersebut adalah suatu tindakan grup.

(2) Bila $\chi : G \rightarrow S_X$ adalah suatu representasi permutasi dari tindakan G. Maka

- **(a)** Tentukan $K = \ker(\chi)$.
- **(b)** Tunjukkan bahwa $K \subset H$.
- **(c)** Tunjukkan bahwa bila N adalah suatu subgrup normal dari G dan $N \subset H$, maka $N \subset K$. Dengan kata lain, tunjukkan bahwa K adalah subgrup normal terbesar dari G yang termuat dalam H.

(3) Tunjukkan bagaimana teorema Cayley dalam latihan yang baru dibahas tersebut.

(4) Misalkan $i = [G : H]$ adalah ideks dari H dalam G. Maka

- **(a)** Tunjukkan bahwa bila χ satu-satu, maka $|G|$ membagi $i!$
- **(b)** Tunjukkan bahwa bila $|G|$ tidak membagi $i!$, maka K adalah tak-trivial.
- **(c)** Tunjukkan bahwa bila $|G|$ tidak membagi $i!$, maka G mempunyai suatu subgrup normal sejati tak-trivial.

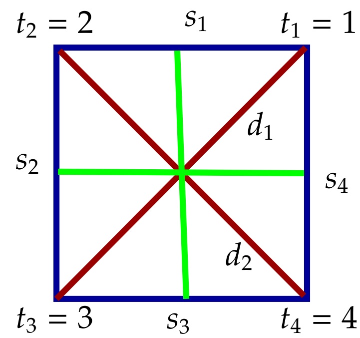
5.2 Stabiliser dan Orbit dalam suatu Tindakan Grup

Dalam bagian ini ditunjukkan bahwa suatu tindakan grup menentukan suatu relasi ekivalen pada X sebagai $G-$set. Dalam hal ini X dipartisi menjadi klas-klas ekivalen yang dinamakan orbit. Selanjutnya dibuktikan teorema utama yang menentukan banyaknya elemen dari masing-masing orbit. Teorema ini akan digunakan berkali-kali pada bab ini untuk berbagai tindakan grup. Contoh berikut diharapkan memberikan kemudahan untuk memahami beberapa pengertian beberapa definisi dan sifat-sifat terkait yang dibahas dalam bagian ini.

Contoh 5.2.1 Tinjau Dihedral grup D_4 bertindak dengan cara yang wajar pada himpunan

$$X = \{t_1, t_2, t_3, t_4, s_1, s_2, s_3, s_4, d_1, d_2\},$$

dimana $t_i = i,\ i = 1, 2, 3, 4$ adalah titik sudut dari persegi, $s_1 = 1 - 2, s_2 = 2 - 3, s_3 = 3 - 4, s_4 = 4 - 1$ adalah sisi-sisi persegi dan $d_1 = 1 - 3, d_2 = 2 - 4$ adalah diagonal persegi (lihat gambar sebelah). Tabel 5.1 menguraikan tindakan D_4 pada X akan membantu untuk mempermudah memahami beberapa definisi baru yang diberikan dalam bagian ini.



Gambar Persegi dari grup D_4.

Tabel 5.1: Tindakan D_4 pada X

	1	2	3	4	t_1	t_2	t_3	t_4	d_1	d_2
ρ_0	1	2	3	4	t_1	t_2	t_3	t_4	d_1	d_2
ρ	2	3	4	1	t_2	t_3	t_4	t_1	d_2	d_1
ρ^2	3	4	1	2	t_3	t_4	t_1	t_2	d_1	d_2
ρ^3	4	1	2	3	t_4	t_1	t_2	t_3	d_2	d_1
τ	2	1	4	3	t_1	t_4	t_3	t_2	d_2	d_1
$\rho\tau$	3	2	1	4	t_2	t_1	t_4	t_3	d_1	d_2
$\rho^2\tau$	4	3	2	1	t_3	t_2	t_1	t_4	d_2	d_1
$\rho^3\tau$	1	4	3	2	t_4	t_3	t_2	t_1	d_1	d_2

Proposisi 5.2.1 Misalkan X adalah $G-$ set dan untuk sebarang $x \in X$ didefinisikan himpunan

$$G_x = \{g \in G \,|\, g.x = x\}.$$

Maka G_x adalah subgrup dari G.

Bukti Cukup ditunjukkan bahwa bila $g \in G_x$, maka $g^{-1} \in G_x$ dan bila $g_1, g_2 \in G_x$, maka $g_1 g_2 \in G_x$. Bila $g \in G_x$, maka $g.x = x$. Jadi

$$g^{-1}.x = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $g^{-1} \in G_x$. Selanjutnya, bila $g_1, g_2 \in G_x$, maka

$$(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x) = g_1.x = x.$$

Jadi $g_1 g_2 \in G_x$. ✓

Definisi 5.2.1 Grup G_x dinamakan **stabilizer** dari x dalam G. Subgrup G_x juga dinamakan subgrup **isotropy** dari G untuk elemen $x \in X$.

Contoh 5.2.2 Dalam Contoh 5.2.1 tidakan dari D_4 pada X dan dari Tabel 5.1 didapat untuk $g.2 = 2$ maka $g = \rho_0$ atau $g = \rho\tau$. Jadi $G_2 = \{\rho_0, \rho\tau\}$. untuk $g.d_1 = d_1$ maka $g = \rho_0, \rho^2, \rho\tau$ atau $g = \rho^3\tau$. Jadi $G_{d_1} = \{\rho_0, \rho^2, \rho\tau, \rho^3\tau\}$. Untuk $g.t_4 = t_4$ maka $g = \rho_0$ atau $g = \rho^2\tau$. Jadi $G_2 = \{\rho_0, \rho^2\tau\}$.

Berikut ini ditunjukkan bagaimana cara dari tindakan suatu grup G pada himpunan tak-kosong X yang mempartisi X menjadi klas-klas yang ekivalen.

Proposisi 5.2.2 Misalkan G adalah suatu grup bertindak pada suatu himpunan tak-kosong X. Relasi pada X didefinisikan oleh

$$a \sim b \text{ bila dan hanya bila } a = g.b \text{ untuk beberapa } g \in G \text{ dan } a, b \in X.$$

Maka relasi $\sim$ adalah relasi ekivalen.

Bukti Sifat refleksif, untuk sebarang $a \in X$, didapat $a = e.x$. Jadi $a \sim a$. Sifat simetri, untuk sebarang $a, b \in X$. Bila $a \sim b$ maka dapat dipilih $g \in G$ yang memenuhi $a = g.b$. Jadi

$$g^{-1}.a = g^{-1}.(g.b) = (g^{-}g).b = e.b = b.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $b \sim a$. Sifat transitif, untuk sebarang $a, b, c \in X$. Bila $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka dapat dipilih $g, h \in G$ yang memenuhi $a = g.b$ dan $b = h.c$. Didapat

$$a = g.b = g.(h.c) = (gh).c.$$

Jadi $a \sim c$.

Definisi 5.2.2 Diberikan grup G bertindak pada himpunan tak-kosong X. Maka himpunan klas ekivalen

$$O_a = \{b \in X \,|\, a \sim b\}$$

dinamakan **orbit** dari a dalam X.

Contoh 5.2.3 Tinjau lagi Contoh 5.2.1 tindakan dari D_4 pada X. Dari Tabel 5.1 dapat dilihat bahwa ada tiga himpunan orbit, yaitu himpunan titik sudut, himpunan sisi dan himpunan diagonal. Jadi

$$O_2 = \{1, 2, 3, 4\}, O_{d_1} = \{d_1, d_2\} \text{ dan } O_{t_4} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}.$$

Sudah ditunjukkan bahwa G_2 subgrup berorder 2, sedangkan O_2 mempunyai 4 elemen. Begitu juga G_{d_1} subgrup berorder 4, sedangkan O_{d_1} mempunyai 2 elemen. Serta, G_{t_4} subgrup berorder 2, sedangkan O_{t_4} mempunyai 4 elemen.

Dalam Contoh 5.2.3, didapat $|G_a|\,|O_a| = |G|$ untuk setiap kasus. Hal ini dibuktikan oleh teorema berikut untuk sebarang tindakan grup.

Teorema 5.2.1 (**Hubungan Orbit-Stabilizer**) Diberikan grup G bertindak pada suatu himpunan tak-kosong X dan a adalah sebarang elemen di X. Bila G adalah berhingga, maka $|O_a| = |G|/|G_a|$.

Bukti Indeks $[G : G_a]$ adalah banyaknya koset dari G_a dalam G. Sebagaimana telah diketahui bahwa bila $|G|$ berhingga, maka $[G : G_a] = |G|/|G_a|$. Diberikan sebarang $b \in O_a$, dapat dipilih suatu $g \in G$ yang memenuhi $b = g.a$. Dengan demikian didefinisikan pemetaan $\tau : O_a \to H$ dimana $H = \{gG_a \,|\, g \in G\}$ oleh $b = g.a \to gG_a$, $\forall b \in O_a$. Pemetaan τ terdefinisi secara baik, sebab bila $b = g_1.a$ dan $b = g_2.a$, maka

$$(g_1^{-1}g_2).a = g_1^{-1}.(g_2.a) = g_1^{-1}.b = g_1^{-1}.(g_1.a) = (g_1^{-1}g_1).a = e.a = a.$$

Jadi $g_1^{-1}g_2 \in G_a$ akibatnya $g_1G_a = g_2G_a$. Pemetaan τ adalah satu-satu, sebab $\tau(b_1) = \tau(b_2)$ bila dan hanya bila $g_1G_a = g_2G_a$ dimana $b_1 = g_1.a$ dan $b_2 = g_2.a$. Tetapi $g_1G_a = g_2G_a$ bila dan hanya bila $g_1 = g_2h$ untuk beberapa $h \in G_a$, dalam hal ini didapat

$$b_1 = g_1.a = (g_2h).a = g_2.(h.a) = g_2.a = b_2.$$

Pemetaan τ adalah pada, sebab diberikan sebarang koset kiri $g'G_a \in H$ dapat dipilih $g'.a \in O_a$ yang memenuhi $\tau(g'.a) = g'G_a$. Karena τ satu-satu dan pada, maka $|O_a| = |H| = [G : G_a]$. Jadi $|O_a| = |G|/|G_a|$. ✓

Contoh 5.2.4 Misalkan $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $G = S_n$. Diberikan sebarang $i, j \in X$ dapat dipilih suatu permutasi $\tau \in S_n$ yang memenuhi $\tau(i) = j$. Jadi melalui tindakan S_n didapat hanya satu orbit. Bila dipilih $x = 3 \in X$, maka O_3 adalah X dan stabilizer G_3 isomorpik dengan S_{n-1}. Sehingga didapat $|S_n| = |O_3|\,|G_3| = n|S_{n-1}|$. ●

Definisi 5.2.3 Diberikan grup G bertindak pada suatu himpunan tak-kosong X. Tindakan dari G pada X dinamakan **transitif** bila hanya ada satu orbit dalam tindakan G pada X, yaitu untuk sebarang dua elemen $a, b \in X$ ada beberapa $g \in G$ yang memenuhi $g.a = b$. ✓

Contoh 5.2.5 Dalam Contoh 5.1.2 tindakan grup *additive* $\mathbb{R}$ pada bidang $\mathbb{R}^2$ melalui translasi horizontal bukan tindakan transitif. Sebab orbit dari sebarang titik (a, b) adalah garis horizontal $y = b$ yang tidak sama dengan bidang $\mathbb{R}^2$. ●

Contoh 5.2.6 Misalkan $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ adalah himpunan dari n titik sudut dari segi-n beraturan dengan $n \geq 3$. Tindakan grup dihedral D_n (dalam Contoh 2.1.16) pada X adalah transitif. Jadi untuk sebarang $a \in X$, orbit O_a mempunyai elemen sebanyak n. Bila dipilih $a = 1$ dan sebarang $\sigma \in G_1$, maka $\sigma(2) = 2$ dalam hal ini σ adalah identitas atau $\sigma(2) = n$, dimana n adalah titik sudut yang terletak pada sisi $1 - n$ dalam kasus ini σ adalah suatu pencerminan pada sumbu melalui titik pusat segi-n beraturan dan titik sudut 1. Sehingga didapat $\sigma(1) = 1$ dan $\sigma(i) = n - i + 2$ untuk semua $i \in X$ dengan $i \neq 1$. Jadi $|G_1| = 2$ dan $|D_n| = |O_1|\,|G_1| = n \cdot 2 = 2n$. ●

Contoh 5.2.7 Misalkan G adalah grup rotasi pada suatu kubus. Tindakan G pada delapan titik sudut dari kubus adalah transitif. Bila dipilih titik sudut 3 dan sebarang $\tau \in G_2$, maka $\tau(3) = 3$ dalam kasus ini τ adalah identitas. Bila $\tau(3) = 6$, maka dalam kasus ini $\tau(6) = 1, \tau(1) = 3$. Bila $\tau(3) = 1$, maka dalam kasus ini $\tau(1) = 6, \tau(6) = 3$. (Lihat gambaran ini dalam Contoh 5.1.9.) Jadi $|G_2| = 3$ dan $|G| = |O_2|\,|G_2| = 8(3) = 24$. ●

Pada akhir pembahasan ini diberikan suatu akibat langsung dari Proposisi 5.2.2 dan Teorema 5.2.1 yang berperanan sebagai suatu aturan dasar pada bab ini.

Teorema 5.2.2 Misalkan X adalah suatu $G-$set dan N adalah banyaknya orbit dalam tindakan. Bila $a_1, a_2, \ldots, A_N$ adalah representasi yang berbeda dari himpunan orbit yaitu setiap elemen dari X berada secara tepat dalam satu orbit O_{a_i}. Maka

$$|X| = \sum_{i=1}^{N} [G : G_{a_i}],$$

dimana G_{a_i} adalah stabilizer dari a_i.

Bukti Dari Proposisi 5.2.2 didapat bahwa tindakan G pada X mempartisi X menjadi orbit-orbit O_{a_i}, $i = 1, 2, \ldots, N$ yang berbeda dan dengan menggunakan Teorema 1.2.2 didapat

$$|X| = \sum_{i=1}^{N} |O_{a_i}|.$$

Tetapi dari Teorema 5.2.1 didapat $|O_{a_i}| = [G : G_{a_i}]$. Jadi

$$|X| = \sum_{i=1}^{N} [G : G_{a_i}]. \quad ✓$$

Latihan

Latihan 5.2.1 Untuk latihan berikut : (a) dapatkan stabilizer G_a untukmasing-masing a, dapatkan orbit O_a, (c) selidiki bahwa $|O_a| = [G : G_a]$, (d) tentukan apakah tindakan transitif dan (e) tentukan apakah G bertindak pada X secara tepat. Dimana X, G dan a diberikan sebagai berikut.

1. $X = \{1, 2, 3\}$; $G = S_3$; $a = 1, 2, 3$.
2. $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $G = A_3 \subset S_3$; $a = 1, 2, 3$.
3. $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $G = S_4$; $a = 1, 3, 4$.
4. $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $G = A_4 \subset S_4$; $a = 1, 3, 4$.

5. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $G = \{\rho_0, (1\,2\,3\,4)(5\,7), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,3)(5\,7)\} \subset S_7$, dimana ρ_0 adalah permutasi identitas; $a = 1, 3, 6, 7$.

6. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ himpunan titik sudut dari persegi; $G = D_4$; $a = 1, 2, 3$.

7. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ himpunan titik sudut dari persegi; $G = \langle \rho \rangle \subset D_4$, ρ adalah rotasi 90°; $a = 1, 3$.

8. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ himpunan titik sudut dari persegi; $G = \langle \rho^2, \tau \rangle \subset D_4$; $a = 1, 3$.

Latihan 5.2.2 Misalkan $X = \mathbb{C} - \{0, -1\}$. Untuk $z \in X$, misalkan

$$T_0(z) = z, T_1(z) = -1/(1+z), T_2 = (1-z)/-z$$

dan $G = \{T_0, T_1, T_2\}$.

(a) Tunjukkan bahwa G adalah grup terhadap komposisi fungsi.

(b) Tunjukkan bahwa G bertindak pada X secara wajar.

(c) Dapatkan semua $a \in X$ yang memenuhi $G_a = G$.

Latihan 5.2.3 Untuk $a, b \in \mathbb{R}$, misalkan $g(a, b) \in M(2, \mathbb{R})$ adalah matriks

$$g(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Misalkan $G = \{g(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ dengan operasi perkalian matriks dan $X = \mathbb{R}$. Untuk $g = g(a, b) \in G$ dan $x =\in X$ didefinisikan $g.x = ax + b$.

(a) Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

(b) Tunjukkan $g.x = ax + b$ mendefinisikan suatu tindakan G pada X.

(c) Dapatkan G_0 dan O_0.

(d) Apakah G brtindak secara tepat pada X?

(e) Apakah tindakan transitif?

Latihan 5.2.4 Misalkan H suatu subgrup dari suatu grup G dan $X = \{xH \,|\, x \in G\}$. Misalkan G bertindak pada X melalui perkalian kiri, yaitu $g.xH = gxH$ untuk $g \in G$ dan $xH \in X$.

(a) Tunjukkan bahwa G_{xH} stabilizer dari $xH \in X$ adalah subgrup xHx^{-1} dari G.

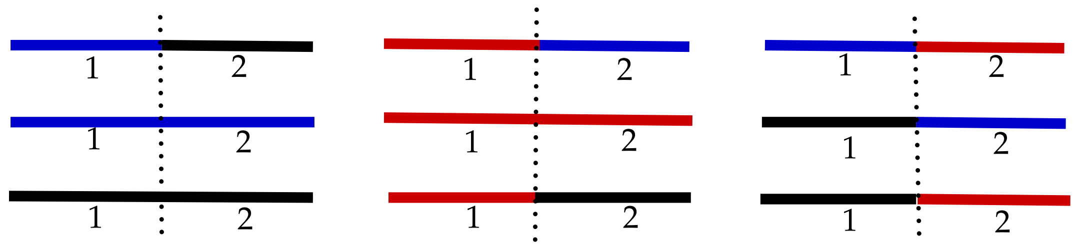
(b) Tunjukkan bahwa untuk sebarang $xH \in X$, $|O_{xH}| = [G : H]$.

Latihan 5.2.5 Diberikan G adalah suatu grup berhingga dengan $|G| = n$ dan misalkan p adalah bilangan prima terkecil membagi n. Tunjukkan bahwa bila H adalah suatu subgrup dari G dengan $[G : H] = p$, maka $H \lhd G$.

5.3 Teorema Burside dan Aplikasi

Pada bagian ini diaplikasikan hubungan orbit-stabilizer (Teorema 5.2.1) yang telah dibahas pada bagian sebelumnya untuk membuktikan teorema Burnside. Teorema ini memberikan metode konting banyaknya orbit dari suatu himpunan melalui tindakan suatu grup simetri. Juga diilustrasikan bagaimana teorema Burnside dapat diaplikasikan untuk berbagai masalah konting, yaitu untuk menentukan banyaknya disain "yang secara esensial berbeda".

Contoh 5.3.1 Suatu tongkat teridiri dari dua bagian, yaitu bagian 1 dan bagian 2. Bila pada masing-masing bagian akan diwarnai dengan tiga warna berbeda, yaitu merah, hitam dan biru sebagaimana diberikan oleh Gamabr 5.3. Maka berapakah banyaknya



Gambar 5.3: Pewarnaan Tongkat

cara yang berbeda dari dari pewarnaan tongkat tersebut bila aturan perwarnaan adalah satu bagian dari tongkat hanya diwarnai oleh satu warna? Persoalan ini bisa dijawab sebagai berikut. Ada sebanyak $3^2 = 9$ cara perwarnaan, yaitu

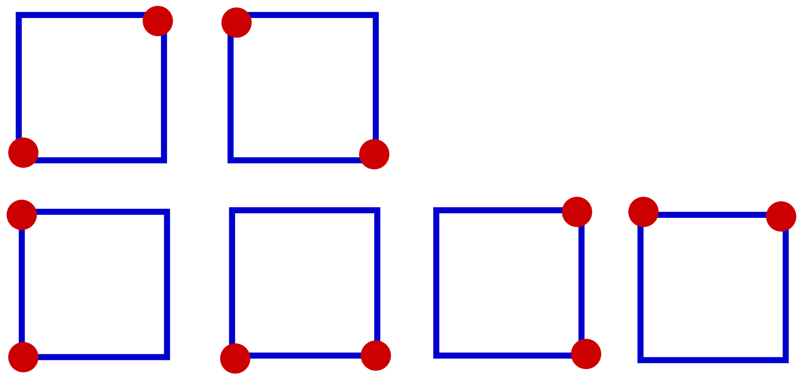
$$x_1 = bh, x_2 = mb, x_3 = bm, x_4 = bb, x_5 = mm, x_6 = hb, x_7 = hh, x_8 = mh, x_9 = hm,$$

dimana $m = \text{merah}, b = \text{biru}$ dan $h = \text{hitam}$. Jadi $x_1 = bh$ artinya bagian tonkat 1 berwarna biru bagian 2 tongkat berwarna hitam. Juga $x_6 = hb$, artinya bagian tonkat 1 berwarna hitam bagian 2 tongkat berwarna biru. Tetapi secara esensial tongkat yang berwarna x_1 dan x_6 adalah sama. Begitu juga tongkat yang berwarna $x_2 = mb$ dan yang berwarna $x_3 = bm$ secara esensial adalah sama. Jadi ada sebanyak enam perwarnaan yang berbeda pada tongkat yaitu: biru-biru, merah-merah, hitam-hitam, biru-merah, biru-hitam dan merah-hitam. Masalah ini bisa dianalisa dengan menggunakan pengertian tindakan grup. Misalkan

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$$

dan $G = \langle \tau \rangle$ adalah subgrup dari S_2 dimana τ adalah pencerminan tongkat pada garis yang melewati pusat tongkat. Jadi $G = \{e, \tau\}$. Dengan demikian bila G bertindak secara wajar pada X, maka X memuat enam orbit yang berbeda yaitu $O_{x_1} = \{x_1, x_6\}$ sebab $x_1 = \tau.x_6$, $O_{x_2} = \{x_2, x_3\}$ sebab $x_2 = \tau.x_3$, $O_{x_4} = \{x_4\}$ sebab $x_4 = \tau.x_4$, $O_{x_5} = \{x_5\}$ sebab $x_5 = \tau.x_5$, $O_{x_7} = \{x_7\}$ sebab $x_7 = \tau.x_7$ dan $O_{x_8} = \{x_8, x_9\}$ sebab $x_8 = \tau.x_9$.

Contoh 5.3.2 Tinjau semua cara yang mungkin untuk mewarnai titik sudut persegi dengan dua warna merah, maka banyaknya cara perwarnaan yang mungkin diberikan oleh koefisien binomial $4!/2!(4-2)! = 6$. Hasil ini bisa dilihat pada Gambar 5.4. Dari semua pewarnaan ini terdapat hanya dua pewarnaan yang berbeda. Pada Gambar 5.4



Gambar 5.4: Pewarnaan Titik Sudut Persegi

terlihat bahwa hasil pewarnaan titik sudut persegi dengan dua warna merah, dikelompokkan pada dua baris. Baris pertama secara esensial menghasilkan pewarnaan benda yang sama. Begitu juga baris kedua secara esensial menghasilkan pewarnaan benda yang sama. Hasil ini bisa dilakukan menggunakan pengertian tindakan suatu grup. Misalkan $G = \langle \rho \rangle$ adalah subgrup dari D_4, dimana ρ adalah rotasi pada pusat persegi sebesar 90° berlawanan arah dengan arah jarum jam. Jadi $G = \{\rho_0, \rho, \rho_2, \rho_3\}$. Misalkan X adalah himpunan dari hasil pewarnaan yang diberikan oleh Gambar 5.4. Bila G bertindak pada X secara wajar, maka X memuat dua orbit yang berbeda yaitu baris pertama pada Gambar 5.4 dan baris kedua pada Gambar 5.4. Dua hasil pewarnaan pada baris pertama Gambar 5.4 ekivalen pewarnaan yang satu bisa diperoleh dari pewarnaan yang lain dengan melakukan tindakan dari ρ pada masing-masing pewarnaan. Empat hasil pewarnaan pada baris kedua Gambar 5.4 adalah ekivalen satu dengan yang lainnya. Sebab hasil pewarnaan kedua, ketiga dan keempat dapat diperoleh dari tindakan ρ, ρ^2 dan ρ^3 pada hasil pewarnaan yang pertama pada baris kedua Gambar 5.4. ●

Masalah-masalah yang dibahas dalam bagian ini, himpunan X memuat hasil disain berbeda dan dua disain A dan B dalam A dikatakan secara esensial sama bila A dan B adalah ekivalen melalui tindakan suatu grup permutasi yang sesuai G pada X. Dengan kata lain A dan B terletak pada satu orbit yang sama. Jadi bila diinginkan untuk menghitung banyaknya disain yang secara esensial berbeda, maka hal ini sama saja menentukan banyaknya orbit pada X. Teorema berikut memberikan suatu cara untuk menentukan banyaknya orbit yang berbeda pada X. Namum sebelumnya diberikan suatu definisi sebagai berikut.

Definisi 5.3.1 Misalkan G bertindak pada suatu himpunan tak-kosong X dan $a \in X$, telah dikenalkan notasi G_a yang menyatakan stabilizer dari a dan merupakan subgrup dari G. Juga notasi O_a adalah orbit dari a yang mana merupakan himpunan bagian dari X. Selanjutnya untuk $g \in G$ dikenalkan suatu notasi $X_g = \{x \in X \,|\, g.x = x\}$ yaitu himpunan elemen-elemen di X yang dijadikan **tetap** oleh g.

Teorema 5.3.1 (**Burnside**) Misalkan G adalah suatu grup berhingga bertindak pada suatu himpunan tak-kosong berhingga X. Bila N adalah banyaknya orbit dalam X oleh tindakkan dari G, maka

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Bukti Definisikan suatu fungsi

$$T : G \times X \rightarrow \{0, 1\} \text{ oleh } T(g, a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{bila } g.a = a \\ 0, & \text{bila } g.a \neq a. \end{cases}$$

Ada dua hal penting bagi T, pertama untuk sebarang g tetap di G didapat

$$|X_g| = \sum_{a \in X} T(g, a).$$

Kedua, untuk sebarang $a \in X$ dimana a tetap, didapat

$$|G_a| = \sum_{g \in G} T(g, a).$$

Selanjutnya, misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_N$ adalah representasi dari N orbit dari G dalam X. Didapat

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} \left|X_g\right| &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{a \in X} T(g, a) \right) \\
&= \sum_{a \in X} \left(\sum_{g \in G} T(g, a) \right) \\
&= \sum_{a \in X} |G_a| = \sum_{a \in X} \frac{|G|}{|O_a|} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{a \in O_{a_i}} \frac{|G|}{|O_a|} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{a \in O_{a_i}} \frac{|G|}{\left|O_{a_i}\right|} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \cancel{\left|O_{a_i}\right|} \frac{|G|}{\cancel{\left|O_{a_i}\right|}} \\
&= \sum_{i=1}^{N} |G| = N\,|G|.
\end{aligned}$$

Jadi

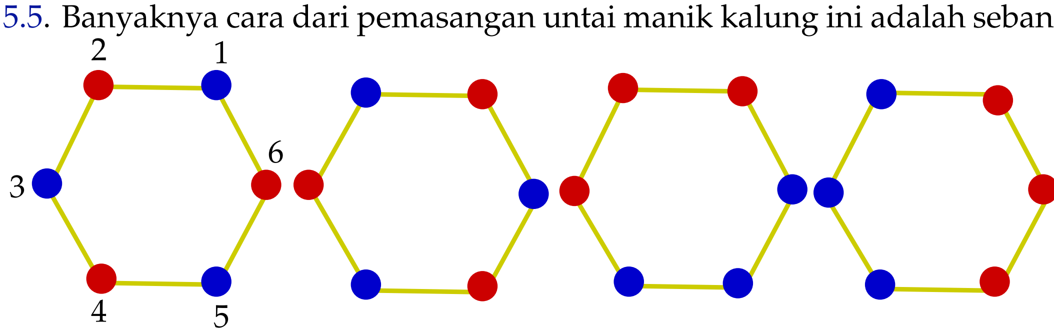
$$\boxed{\mathbf{N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|X_g\right|.}}$$

Aplikasi

Diberikan ilustrasi bagaimana menerapkan teorema Burnside untuk masalah konting tertentu. Pada semua masalah konting ini, dihitung banyak orbit dari beberapa tindakan grup. Pertama diperlukan himpunan tertentu X dan grup G bertindak pada X, kemudian ditentukan $\left|X_g\right|$ untuk semua $g \in G$.

Menentukan struktur molekul adalah satu dari berbagai contoh penggunaan teorema Burnside. Struktur Elektronik dari suatu molekul dapat ditentukan melalui struktur geometrinya. Untuk hal ini ditinjau simetri dari suatu molekul karena dapat mengungkapkan tentang sifat-sifatnya yaitu: strukur, spektra, polaritas dan lain sebagainya.

Contoh 5.3.3 (**Masalah Kalung**) Tiga untai manik merah dan biru dirangkai untuk membentuk sebuah kalung, yang dapat diputar dan dibalik. Dengan asumsi bahwa manik-manik dengan warna yang sama bisa dibedakan. Berapa banyak jenis kalung dapat dibuat?
Untuk menjawab masalah ini 3 untai manik biru dan merah dilekatkan pada enam titik sudut segi enam beraturan contoh hasil disain perangkain kalung diberikan oleh Gambar 5.5. Banyaknya cara dari pemasangan untai manik kalung ini adalah sebanyak



Gambar 5.5: Penempatan Untai Kalung

$6!/3!(6-3)! = 20$ cara. Jadi Himpunan X terdiri dari 20 disain. Karena kalung dapat diputar dan dibalik, grup G yang bertindak pada X adalah grup dihedral

$$D_6 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^5, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \ldots, \rho^5\tau\},$$

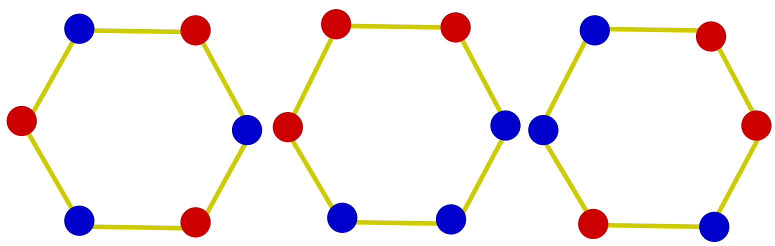
dimana $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ adalah rotasi sebesar 60° berlawanan arah jarum jam dan $\tau = (2\,6)(3\,5)$ adalah pencerminan pada garis melaui titik 1 dan 4. Bila dihitung $\left|X_g\right|$ untuk setiap $g \in G$ hasilnya diberikan dalam Tabel 5.2. Selanjutnya dengan menggunakan teorema Burnside didapat

$$N = 1/12(20 + 2(2) + 3(4)) = 4.$$

Tabel 5.2: Tindakan dari D_6 pada X

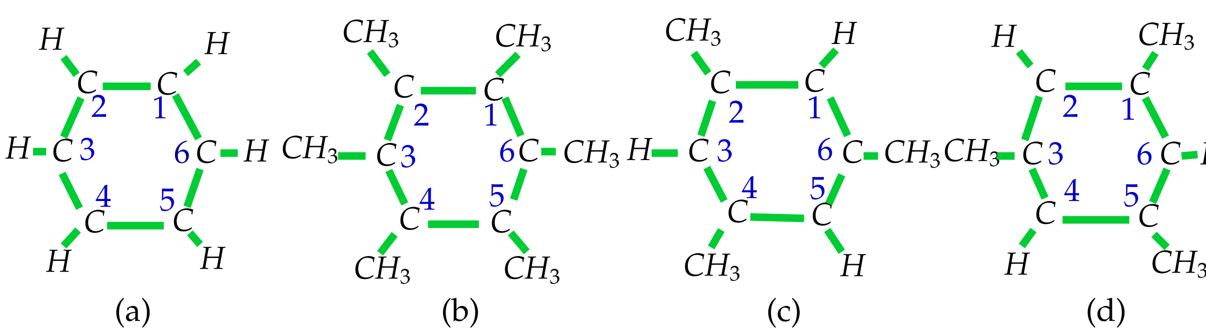
g	$\lvert X_g\rvert$	g	$\lvert X_g\rvert$
ρ_0 = identitas	20	$\tau = (2\ 6)(3\ 5)$	4
$\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$	0	$\rho\tau = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$	0
$\rho^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$	2	$\rho^2\tau = (1\ 3)(4\ 6)$	4
$\rho^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$	0	$\rho^3\tau = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$	0
$\rho^4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$	2	$\rho^4\tau = (1\ 5)(2\ 4)$	4
$\rho^5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$	0	$\rho^5\tau = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$	0

Jadi banyaknya hasil disain kalung yang berbeda adalah tiga sebagaimana diberikan oleh Gambar 5.6



Gambar 5.6: Hasil Untain Manik yang berbeda

Contoh 5.3.4 Menentukan ada berapa banyak senyawa organik yang terjadi dari suatu proses kimia yang mungkin. Dari satu rantai karbon terdiri dari enam atom karbon C dikaitkan dengan satu atom hidrogen H dan satu molekul CH_3. Ada sebanyak $2^6 = 64$ pola senyawa molekul yang mungkin. Beberapa diantaranya membentuk senyawa yang



Gambar 5.7: Pola senyawa rantai karbon C

sama. Sebagai contoh, dalam Gambar 5.7 bagian (c) dan (d) adalah pola molekul yang sama sebab yang satu dapat diperoleh dari yang lainnya melalui putaran berlawanan arah jarum jam sebesar 60°. Sedangkan pada bagian (a), (b) dan (c) adalah tiga pola molekul yang berbeda, sebab yang satu tidak bisa didapat dari yang lainnya dengan

Tabel 5.3: Pola senyawa rantai karbon C

g	$\|X_g\|$	g	$\|X_g\|$
ρ_0 = identitas	64	$\tau = (2\ 6)(3\ 5)$	16
$\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$	2	$\rho\tau = (1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$	8
$\rho^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$	4	$\rho^2\tau = (1\ 3)(4\ 6)$	16
$\rho^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$	8	$\rho^3\tau = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$	8
$\rho^4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$	4	$\rho^4\tau = (1\ 5)(2\ 4)$	16
$\rho^5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$	2	$\rho^5\tau = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$	8

melakukan putaran atau pencerminan pada sumbu yang ditentukan. Jadi dalam hal ini himpunan X adalah himpunan semua pola senyawa yang terjadi dengan $|X| = 64$, sedangkan grup G adalah grup dihedral

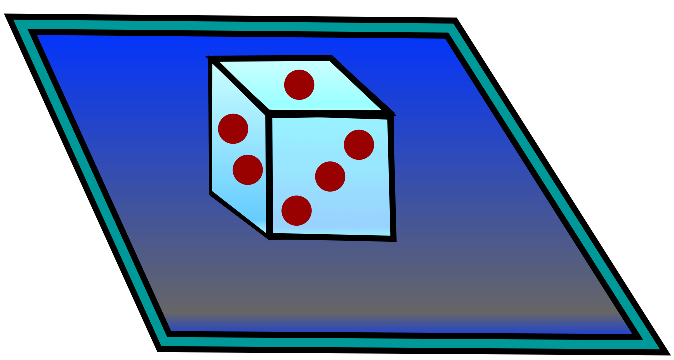
$$D_6 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^5, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \ldots, \rho^5\tau\},$$

dimana $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ adalah rotasi sebesar 60° berlawanan arah jarum jam dan $\tau = (2\ 6)(3\ 5)$ adalah pencerminan pada garis diagonal tetap melaui titik 1 dan 4, juga $\rho^2\tau, \rho^4\tau$ adalah pencerminan pada garis diagonal tetap masing-masing melalui titik 2 dan 5; dan 3 dan 6. Sedangkan $\rho\tau, \rho^3\tau$ dan $\rho^5\tau$ adalah pencerminan pada garis bisektor masing-masing sisi segi-6 beraturan. Bila dihitung $\left|X_g\right|$ untuk setiap $g \in G$ hasilnya diberikan dalam Tabel 5.3. Selanjutnya dengan menggunakan teorema Burnside didapat

$$N = 1/12(64+2+4+8+4+2+16+8+16+8+16+8) = 156/12 = 13.$$

Jadi banyaknya pola senyawa yang berbeda adalah 13. ●

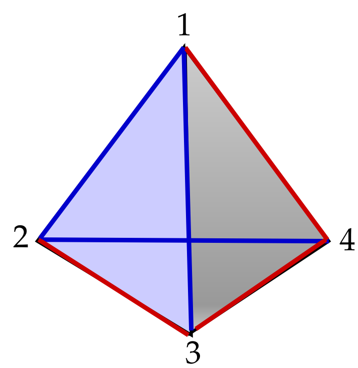
Contoh 5.3.5 (**Masalah Dadu**) Suatu kubus diletakan pada suatu meja. Misalkan



Gambar 5.8: Permukaan Dadu

masing-masing enam sisi permukaan kubus dinamakan sisi bawah, atas, depan, belakang, kiri dan kanan. Selanjutnya dihitung banyaknya cara yang berbeda untuk menandai enam permukaan kubus dengan titik merah untuk memperoleh suatu dadu (lihat Gambar 5.8). Untuk sisi atas kubus dapat ditandai sebarang titik merah sebanyak satu sampai enam titik yang mungkin. Untuk sisi bawah dapat ditandai titik merah dari sisanya sebanyak lima yang mungkin, penandaan ini dilakukan pada semua enam sisi kubus. Dengan demikian ada sebanyak $6! = 720$ cara penandaan kubus yang mungkin. Dalam hal ini X adalah himpunan penandaan kubus dengan $|X| = 720$. Untuk menentukan grup G bertindak pada X dalam contoh ini, ditinjau semua cara yang mungkin suatu kubus diletakkan pada suatu meja. Sebarang satu sisi kubus dari enam sisi yang ada dapat diletakkan pada sisi bawah dan kubus dapat diputar sehingga sebarang permukaan yang tegak dapat ditempatkan pada sisi depan. Dalam hal ini ada empat cara yang mungkin, tetapi banyaknya sisi kubus adalah enam. Jadi $|G| = 4(6) = 24$. Bila $g \in G$ dan $g \neq e$, maka $\left|X_g\right| = 0$ sebab tidak ada dua sisi kubus yang bertanda sama. Jadi banyaknya dadu secara esensi berbeda adalah $N = 1/24\,(720) = 30$.

Contoh 5.3.6 Misalkan akan diwarnai rusuk tetrahedron teratur. Rusuk tetrahedron diwarnai merah atau biru. Ada sebanyak 6 rusuk, dengan demikian bila himpunan X adalah semua cara pewarnaan rusuk yang mungkin, maka $|X| = 2^6 = 64$. Sebarang satu sisi tetrahedron dari empat sisi yang ada dapat diletakkan di bagian bawah sedangkan sebarang satu dari tiga sisi sisanya dapat diletakan di bagian belakang dengan melakukan rotasi tetrahedron (lihat Gambar 5.9). Maka dari itu grup G mempunyai



Gambar 5.9: Pewarnaan Rusuk Tetrahedron

sebanyak $4(3) = 12$ elemen. Sebelum menghitung $\left|X_g\right|$ untuk masing-masing $g \in G$, maka ditentukan dulu 12 elemen dari G. Elemen-elemen dari G adalah ρ_0 merupakan elemen identitas, tiga elemen berorder 2 yaitu

$$\rho_1 = (1\ 2)(3\ 4), \qquad \rho_2 = (1\ 3)(2\ 4), \qquad \rho_3 = (1\ 4)(2\ 3)$$

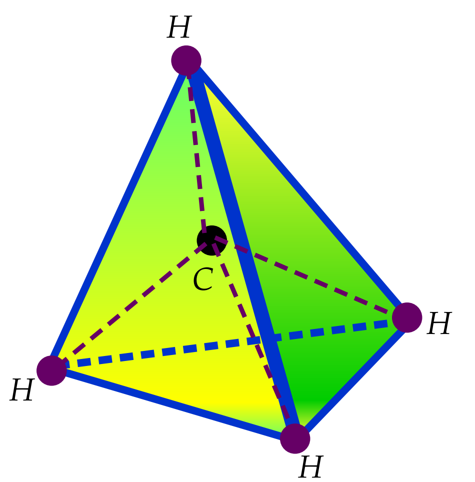
dan 8 elemen beroder 3, yaitu

$$\begin{array}{ll} \tau_1 = (1\ 3\ 4), & \tau_2 = (4)1\ 3 \\ \tau_3 = (1\ 2\ 4), & \tau_4 = (1\ 2\ 3) \\ \tau_1^{-1} = (2\ 4\ 3), & \tau_2^{-1} = (1\ 4\ 3), \\ \tau_3^{-1} = (1\ 4\ 2), & \tau_4^{-1} = (1\ 3\ 2). \end{array}$$

Faktanya, grup G isomorpik dengan grup alternating A_4. Selanjutnya ditentukan $\left|X_g\right|$ untuk masing-masing $g \in G$. Tinjau rotasi $\tau_1 = (2\ 3\ 4)$ dan misalkan suatu pewarnaan khusus di X_{τ_1}. Maka rusuk yang melalui 2-3, 3-4 dan 4-2 semuanya harus berwarna sama dan begitu juga rusuk yang melalui 1-2, 1-3 dan 1-4. Jadi $\left|X_{\tau_1}\right| = 2^2 = 4$. Perlakuan yang sama dapat dilakukan untuk sebarang 8 rotasi berorder 3. Berikutnya tinjau rotasi $\rho_1 = (1\ 2)(3\ 4)$. Karena rusuk 1-2 dan 3-4 tetap didapat $2^2 = 4$ pilihan pewarnaan. Untuk empat rusuk sisanya yaitu 1-3 dan 1-4 berubah, maka harus mempunyai warna yang sama. Hal yang sama untuk rusuk 2-3 dan 2-4. Jadi $\left|X_{\rho_1}\right| = 2^2\,2\,2 = 16$. Lagi dengan argumen yang sama berlaku untuk sebarang 3 rotasi berorder 2. Tentunya untuk identitas ρ_0 didapat $\left|X_{\rho_0}\right| = 64$. Dengan demikian didapat

$$N = 1/12(64 + 3(16) + 8(4)) = 12.$$

Contoh 5.3.7 Molekul methane CH_4 terdiri dari sauatu atom Carbon pada pusat suatu tetrahedron reguler yang masing-masing titik sudutnya melekat empat atom Hidrogen (lihat Gambar 5.10). Bila pada empat titik sudut tetrahedron dilekatkan H, CH_3, Cl atau C_2H_5, maka banyaknya konfigurasi senyawa kimia yang mungkin terjadi sebanyak $4^4 =$ 256 molekul. Jadi himpunan X adalah himpunan semua senyawa kimia yang mungkin terjadi dari dari tetrahedron dengan lengan atom C yang keempat lengannya dapat mengikat H, CH_3, Cl atau C_2H_5 dimana $|X| = 256$. Selanjutnya untuk menentukan grup

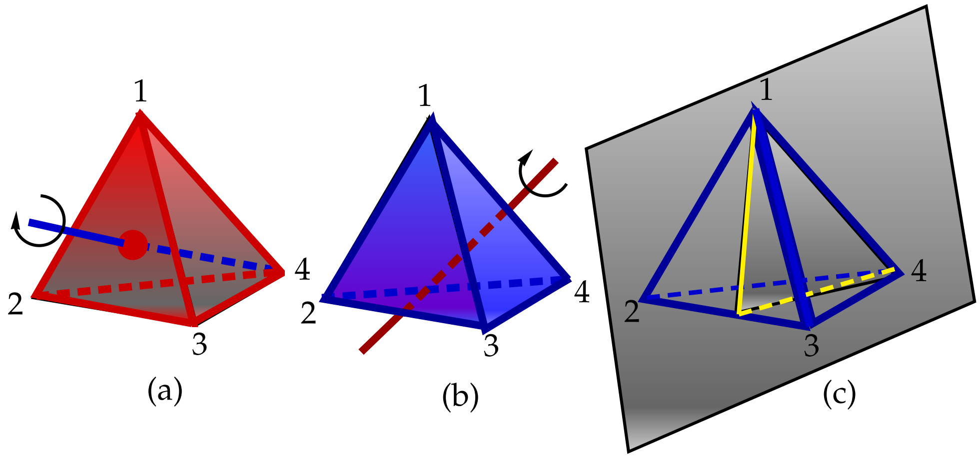


Gambar 5.10: Molekul Methane CH_4

tetrahedron G yang bertindak pada X, diperlukan elemen-elemen dari grup G. Untuk mempermudah bagimana memperoleh elemen-elemen dari G diberikan Gambar 5.11 sehingga didapat elemen-elemen dari G sebagai berikut:

(a) Satu elemen identitas $\rho_0 = ()$.

(b) Delapan rotasi 120° dan 240° berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu yang melalui titik sudut dan titik pusat permukaan (lihat Gambar 5.11 bagian (a)).



Gambar 5.11: Rotasi dan Refleksi Tetrahedron

Karena ada empat titik sudut, maka banyaknya rotasi 120° adalah 4, salah satu rotasi ini adalah (1 2 3), Dengan cara yang sama ada sebanyak 4 rotasi 240°,salah satu rotasi ini adalah (1 3 2).

(c) Tiga rotasi 180° terhadap sumbu yang melalui titik tengah rusuk yang saling berhdapan (lihat Gambar 5.11 bagian (b)). Salah satu contoh rotasi ini adalah (2 3)(1 4). Karena ada 3 pasang rusuk yang berhadapan, maka banyaknya rotasi ini adalah tiga.

(d) Enam refleksi pada bidang tegak lurus sisi (lihat Gambar 5.11 bagian (c)). Salah satu contoh refleksi ini adalah (2 3).

(e) Enam kombinasi rotasi dan refleksi, salah satu contohnya adalah (1 2 3 4).

Faktanya Grup G isomorpik dengan grup simetri S_4. Dengan demikian didapat banyaknya senyawa yang berbeda adalah

$$N = 1/24(4^4 + 6(4^3) + 11(4^2) + 6(4)) = 1/24(840) = 35.$$

Contoh 5.3.8 Berapa banyaknya cara essensial berbeda yang dapat terjadi dari pewarnaan 8 titik sudut suatu kubus denganontoh n warna? Dalam hal ini himpunan X adalah memenuhi $|X| = n^8$. Sebagaimana telah dibahas dalam Contoh 5.2.7 bahwa $|G| = 24$. Selanjutnya untuk masing-masing $g \in G$ ditentukan $\left|X_g\right|$. Sebagaimana dalam Contoh 5.1.9, bila $g \in G$ adalah suatu rotasi ρ sebesar 90° atau 270° pada sumbu melalui pusat dua sisi yang berlawanan, misalnya (1 2 3 4)(5 6 7 8), maka disain dalam X_ρ semua titik 1,2,3,4 harus berwarna sama begitu juga untuk titik 5,6,7,8. Jadi banyaknya disain yang mungkin dalam X_ρ adalah n^2. Bila $g \in G$ adalah suatu rotasi σ sebesar 180° pada sumbu yang serupa, misalnya (1 3)(2 4)(5 7)(6 8), maka pasangan titik 1,3 dan 2,4 harus berwarna sama begitu juga untuk pasangan titik 5,7 dan 6,8. Maka banyaknya disain dalam X_σ yang mungkin adalah n^4. Bila $g \in G$ adalah rotasi τ sebesar 180° pada suatu sumbu yang melalui titi tengah dua rusuk yang berlawanan misalnya (1 5)(2 8)(3 7)(4 6), maka dengan argumen yang sama didapat sebanyak n^4 yang mungkin untuk disain dalam X_τ. Bila $g \in G$ adalah rotasi ϕ sebesar 120° atau 240° pada suatu sumbu yang melalui dua titi sudut yang berlawanan, misalnya (2 4 5)(3 8 6), maka titik 2,4 dan 5 harus diberi warna yang sama begitu juga untuk titik 3,8 dan 6. Sedangkan titik tetap 1 dan 7 bisa diwarnai dengan pilihan yang sebarang. Untuk hal ini banyaknya disain dalam X_ϕ yang mungkin adalah n^4. Semua hasil penghitungan yang dilakukan diringkas dalam Tabel 5.4

Tabel 5.4: Rotasi Kubus dengan n pewarnaan

Macam Rotasi	e	ρ	σ	τ	ϕ
Banyaknya Rotasi	1	6	3	6	8
$\lvert X_g \rvert$	n^8	n^2	n^4	n^4	n^4

Dengan demikian banyaknya pewarnaan yang berbeda adalah

$$N = 1/24(n^8 + 17n^4 + 6n^2).$$

Latihan

Latihan 5.3.1 Dapatkan banyaknya cara yang berbeda untuk soal berikut.

1. Dari suatu permukaan sisi regular tetrahedron dibuat dadu dengan menandai satu, dua, tiga atau empat titik pada sisi permukaannya. Masing-masing penandaan titik hanya tepat terlihat satu kali.

2. Pewarnaan pada empat sisi suatu persegi bila diwarnai dengan enam warna dan satu warna hanya boleh digunakan sekali.

3. Pwewarnaan dua sisi permukaan suatu tetrahedron reguler dengan warna merah dan dua sisi permukaan yang diwarnai hijau.

4. Pewarnaan dua sisi permukaan kubus dengan warna merah, dua sisi permukaan yang diwarnai biru dan sisa dua sisi permukaan diwarnai hijau.

5. Pewarnaan enam permukaan sisi suatu kubus dengan enam warna berbeda bila tujuh warna digunakan. Aturannya adalah satu warna hanya boleh digunakan satu kali.

6. Perangkaian manik-manik pada suatu kalung tiga diberi warna kuning dan enam merah dengan asumsi kalung dapat dibalik serta diputar. Manik-manik dengan warna yang sama tidak dapat dibedakan.

7. Perangkaian manik-manik pada suatu kalung satu diberi warna kuning, dua merah dan tiga biru dengan asumsi kalung dapat dibalik serta diputar. Manik-manik dengan warna yang sama tidak dapat dibedakan. ✓

Latihan 5.3.2 Misalkan X adalah suatu himpunan dengan empat elemen. Dapatkan banyaknya relasi ekivalen pada X yang tidak ekivalen terhadap sebarang permutasi dalam S_4. ✓

5.4 Klas Konjugasi dan Persamaan Klas

Dalam bagian ini dibahas satu tindakan grup khusus yaitu tindakan grup G pada dirinya sendiri melalui konjugasi atau dengan kata lain tindakan $G \times G \to G$ melalui $(g, a) = gag^{-1}$. Dalam bagian sebelumnya telah dibahas formula konting Burnside yang berkaitan dengan orbit dalam suatu himpunan berhingga X yang dikenakan tindakan oleh grup berhingga G dan digunakan formula ini pada berbagai masalah. Dalam bagian ini dibahas formula konting lain yang penting berkenaan dengan orbit dalam tindakan suatu grup pada dirinya sendiri. Formula ini sangat penting dalam memahami struktur dari suatu grup berhingga dan digunakan formula ini untuk mengkaji grup dengan order pangkat dari suatu bilangan prima p.

Konjugasi

Contoh 5.4.1 Diberikan grup $G = S_3 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ bertindak pada dirinya sendiri melalui konjugasi yaitu tindkan $G \times G \to G$ didefinisikan oleh $(g, a) \to gag^{-1}$ (lihat Contoh 5.1.5). Melalui tindakan ini, orbit tindakan adalah

$$\begin{array}{rcl} O_{\rho_0} & = & \{\rho_0\} \\ O_{\rho} & = & O_{\rho^2} = \{\rho, \rho^2\} \\ O_{\mu_1} & = & O_{\mu_2} = O_{\mu_3} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}. \end{array}$$

Stabiliser terkait adalah

$$G_{\rho_0} = G, \quad G_{\rho} = G_{\rho^2} = \{\rho_0, \rho, \rho^2\} \quad \text{dan} \quad G_{\mu_i} = \{\rho_0, \mu_i\}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3.$$

Perlu diperhatikan bahwa

(1) $|G| = 6 = \left|O_{\rho_0}\right| + \left|O_{\rho}\right| + \left|O_{\mu_1}\right|$.

(2) $|G| = 6 = |O_a|\ |G_a|$ untuk semua $a \in G$.

Hasil yang diperoleh bukan suatu kejutan sebab sudah dibuktikan dalam Proposisi 5.2.2 dan Teorema 5.2.1.

Berikut ini didefinisikan istilah yang digunakan.

Definisi 5.4.1 Bila G adalah suatu grup dan $a, b \in G$, maka a dan b **berkonjuget** dalam G bila ada suatu $g \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$ atau dengan kata lain bila a dan b adalah dalam orbit yang sama oleh tindakan G pada dirinya sendiri melalui konjugasi. **Klas konjugasi** dari suatu $a \in G$ yaitu $K_G(a) = \{gag^{-1} \,|\, g \in G\}$ adalah himpunan semua konjuget dari a atau dengan kata lain orbit dari a dalam tindakan tersebut. Ingat bahwa, sentralisir dari $a \in G$

$$C_G(a) = \{g \in G \,|\, ga = ag\} = \left\{g \in G \,|\, gag^{-1}a\right\}$$

adalah himpunan dari semua elemen yang komutatif dengan a atau secara ekivalen stabiliser dari a dalam tindakan tersebut. Bila konteks grup G jelas yang dimaksud, maka indeks dihapus dan hanya ditulis $K(a)$ dan $C(a)$. ✓

Proposisi 5.4.1 Misalkan G adalah suatu grupbertindak pada dirinya sendiri melalui konjugasi dan $a \in G$. Maka banyaknya klas konjugasi dari a sama dengan indeks dari sentralisir dari a yaitu $|K(a)| = [G : C(a)]$. Bila G berhingga maka $|K(a)| = |G|/|C(a)|$.

Bukti Pernyataan dalam proposisi adalah berkaitan dengan Teorema 5.2.1 yang istilih-istilahnya diberikan dalam definisi sebelumnya. ✓

Berikut ini diberikan teorema utama dalam bagian ini.

Teorema 5.4.1 (**Persamaan Klas**) Diberikan grup berhingga G, $Z(G)$ adalah senter dari G dan misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah elemen-elemen tidakdi $Z(G)$ membentuk suatu himpunan dari representasidari klas konjugasi yang tak-termuat di $Z(G)$. Hal berarti bahwa tidak ada dua dari a_i berkonjuget satu dengan yang lainnya, tetapi setiap elemen tidak di senter dari satu diantara keduanya. Maka

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)] \,.$$

Bukti Bila $b_1, b_2, \ldots, b_s$ adalah elemen-elemen di $Z(G)$, karena masing-masing b_j berkonjuget dengan dirinya sendiri, maka b_j dan a_i bersama-sama adalah suatu himpunan lengkap dari representasi semua klas konjugasi. Berdasarkan Teorema 5.2.2 didapat

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} [G : C(b_i)] + \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)] \,,$$

dimana untuk menyesuaikan dengan Proposisi 5.4.1 $\left[G : G_g\right]$ diganti dengan $[G : C(g)]$. Tetapi untuk masing-masing b_i dalam senter, $C(b_i)$ adalah G sendiri. Jadi $[G : C(b_i)] = 1$, dengan didapat persamaan klas

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)] \,.$$ ✓

Contoh 5.4.2 Diberikan grup dihedral D_4. Untuk menentukan klas konjugasi dilakukan hal berikut:

$$\begin{aligned}
\tau\rho\tau^{-1} &= (\tau\rho)\tau = (\rho^3\tau)\tau = \rho^3\tau^2 = \rho^3 \\
\rho\tau\rho^{-1} &= \rho(\tau\rho^3) = \rho(\rho\tau) = \rho^2\tau \\
\rho(\rho\tau)\rho^{-1} &= \rho(\rho\tau)\rho^3 = \rho^2(\tau\rho^3) = \rho^2(\rho\tau) = \rho^3\tau.
\end{aligned}$$

Dari fakta penghitungan yang dilakukan didapat Tabel 5.5.

Tabel 5.5: Klas Konjugasi dalam D_4

Sentralisir	Klas Konjugasi	Indeks
$Z(D_4) = \{\rho_0, \rho^2\}$	$K(e) = \{e\}, K(\rho^2) = \{\rho^2\}$	
$C(\rho) = C(\rho^3) = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3\}$	$K(\rho) = \{\rho, \rho^3\}$	$[G : C(\rho)] = 2$
$C(\tau) = C(\rho^2\tau) = \{\rho_0, \tau, \rho^2, \rho^2\tau\}$	$K(\tau) = \{\tau, \rho^2\tau\}$	$[G : C(\tau)] = 2$
$C(\rho\tau) = C(\rho^3\tau) = \{\rho_0, \rho\tau, \rho^2, \rho^3\tau\}$	$K(\rho\tau) = \{\rho\tau, \rho^3\tau\}$	$[G : C(\rho\tau)] = 2$

Dalam hal ini persamaan klas adalah $8 = 2 + 2 + 2 + 2$.

Contoh 5.4.3 Diberikan grup kuoternion $Q_8 = \{\pm 1, \pm\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{k}\}$. Sebarang elemen dari sebarang grup komutatif dengan elemen pangkat-pangkatnya, jadi sentralisir $C(\boldsymbol{i})$ memuat $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}^2 = -1, \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$ dan $\boldsymbol{i}^4 = 1$. Karena $C(\boldsymbol{i})$ adalah suatu subgrup dari Q_8, maka $|C(\boldsymbol{i})|$ membagi $|Q_8|$. Karena $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} \neq -\boldsymbol{k} = \boldsymbol{ji}$, maka $C(\boldsymbol{i}) = \{1, \boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i}\}$. Jadi indeks $[Q_8 : C(\boldsymbol{i})] = 2$. Elemen dari klas konjugasi adalah $\boldsymbol{i}$ sendiri dan $\boldsymbol{jij}^{-1} = -\boldsymbol{i}$. Mengikuti alur yang sama untuk $\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ didapat klas konjugasi $\{\pm\boldsymbol{j}\}$ dan $\{\pm\boldsymbol{k}\}$ dengan demikian $Z(Q_8) = \{\pm 1\}$. Jadi persamaan klasnya adalah $8 = 2 + 2 + 2 + 2$.

Berikut ini diberikan akibat penting dari persamaan klas.

Teorema 5.4.2 Bila G adalah suatu grup berorder p^n, dimana p adalah prima dan $n \geq 1$, maka senter dari G adalah tak-trivial, yaitu $|Z(G)| > 1$ dan $|Z(G)| = p^k$ untuk beberapa k dimana $1 \leq k \leq n$.

Bukti Persamaan klas adalah

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : C(a_i)],$$

dimana $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah merepresentasikan secara lengkap himpunan klas konjugasi yang tidak termuat dalam $Z(G)$. Karena $C(a_i) \neq G$, maka indeks $[G : C(a_i)] \neq 1$, jadi p membagi $[G : C(a_i)]$. Juga, karena p membagi $|G|$, maka p membagi $|Z(G)|$. Dengan demikian $|Z(G)| \neq 1$. Selanjutnya, karena senter dari G, yaitu $Z(G)$ adalah suatu subgrup dari G, maka $|Z(G)|$ membagi $|G| = p^n$. Dengan demikian $|Z(G)| = p^k$ untuk beberapa k dimana $1 \leq k \leq n$. ✓

Kesimpulan 5.4.1 Bila G adalah suatu grup berorder p^2 dimana p adalah prima maka G adalah grup komutatif dan G isomorpik dengan $\mathbb{Z}_{p^2}$ atau isomorpik dengan $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Bukti Andaikan bahwa G bukan grup komutatif, maka $Z(G) \neq G$. Gunakan Teorema 5.4.2, maka $|Z(G)| > 1$. Tetapi $Z(G) < G$ dan dengan menggunakan teorema Lagrange haruslah $|Z(G)| = p$. Selanjutnya, misalkan $a \in$ tetapi $a \notin Z(G)$. Maka $a \in C(a)$ dan $Z(G) < C(a)$. Lagi dengan menggunakan teorema Langrange didapat $|C(a)| = p^2 = |G|$. Akibatnya $a \in Z(G)$, tetapi hal ini bertentangan dengan kenyataan $a \notin Z(G)$. Jadi haruslah G adalah grup komutatif. Selanjutnya bila G siklik, maka $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ dan bila G tidak siklik, maka $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. ✓

Pengertian dari konjugasi juga dapat didefinisikan untuk subgrup dan elemen dari suatu grup. Geeneralisasi ini berguna pada pembahsan berikutnya. Faktanya, pengertian yang dibahas ini dapat didefinisikan untuk sebarang himpunan bagian dari suatu grup yang tidak perlu merupakan subgrup.

Definisi 5.4.2 Misalkan G adalah suatu grup dan X adalah himpunan semua subgrup dari G. Tinjau pemetaan $G \times X \to X$ yang memetakan (g, A) menjadi himpunan $gAg^{-1} = \{gag^{-1} \,|\, a \in A\}$. pemetaan ini adalah suatu tindakan dinamakan **konjugasi**. Dua subgrup $A, B \subseteq G$ dikatakan **berkonjuget** dalam G bila ada suatu $g \in G$ yang memenuhi $B = gAg^{-1}$ atau dengan kata lain bila A dan B adalah dalam orbit yang sama oleh tindakan dari G pada himpunan dari subgrup-subgrupnya melalui konjugasi. Klas konjugasi dari A di G adalah himpunan semua konjuget dari A yaitu

$$K_G(A) = \{gAg^{-1} \,|\, g \in G\}$$

atau dengan kata lain adalah orbit dari A dalam tindakan tersebut. Ingat bahwa **sentralisir** dari himpunan A di G adalah himpunan dari semua elemen yang komutatif dengan semua elemen A, yaitu

$$C_G(A) = \{g \in G \,|\, ga = ag \text{ untuk semua } a \in A\} = \{g \in G \,|\, gag^{-1} \text{ untuk semua } a \in A\}.$$

Normalisir adalah himpunan

$$N_G(A) = \{g \in G \,|\, gA = Ag\} = \{g \in G \,|\, gAg^{-1} = A\}$$

merupakan stabiliser dari A dalam tindakan tersebut. Bila konteks yang dimaksud dengan grup G adalah sudah jelas, penulisan indeks G dihapus dan cukup ditulis $K(A), C(A)$ dan $N(A)$. ✓

Proposisi 5.4.2 Misalkan grup G bertindak pada himpunan semua subgrup dari G melalui konjugasi dan $A < G$. Maka banyaknya klas konjugasi dari A sama dengan indeks dari normalisir A, yaitu $|K(A)| = [G : N(A)]$. Bila $|G|$ berhingga, maka $|K(A)| = |G|/|N(A)|$.

Bukti Apa yang dinyatakan dalam proposisi ini adalah pernyataan dalam Teorema 5.2.1 dalam terminilogi Definisi 5.4.2. ✓

Latihan

Latihan 5.4.1 Uraikan klas konjugasi dan tuliskan persamaan klas dari suatu grup komutatif.

Latihan 5.4.2 Diberikan dua grup G_1 dan G_2. Tunjukkan bahwa dalam $G_1 \times G_2$ elemen (a, b) dan (c, d) berkonjuget bila dan hanya bila a dan c berkonjuget di G_1, b dan d berkonjuget di G_2.

Latihan 5.4.3 Uraikan klas konjugasi dan tulis persamaan klas dari grup berikut:

1. $\mathbb{Z}_2 \times S_3$	2. $\mathbb{Z}_2 \times D_4$	3. $\mathbb{Z}_3 \times S_3$
4. $S_3 \times S_3$	5. A_4	6. $\mathbb{Z}_3 \times A_4$.

Latihan 5.4.4 Diberikan sebarang grup G. Tunjukkan bahwa untuk sebarang $a, b \in G$, bila a dan b berkonjuget, maka a dan b mempunyai order yang sama.

Latihan 5.4.5 Diberikan grup G dan $P(G)$ adalah himpunan semua subgrup dari G. Didefinisikan suatu pemetaan $\phi : G \times P(G) \to P(G)$ oleh $\phi(g, A) = gAg^{-1}$, dimana $gAg^{-1} = \{gag^{-1} \,|\, a \in A\}$.
(a). Tunjukkan bahwa ϕ adalah suatu tindakan grup.
(b). Tunjukkan bahwa sentralisir

$$C(A) = \{g \in G \,|\, gag^{-1} = a \text{ untuk semua } a \in A\}$$

adalah suatu subgrup dari G.
(c). Tunjukkan bahwa normalisir

$$N(A) = \{g \in G \,|\, gAG^{-1} = A\}$$

adalah subgrup dari G.

Latihan 5.4.6 Misalkan grup G bertindak pada himpunan dari semua subgrup G melalui konjugasi. Tunjukkan bahwa untuk sebarang $S \subset G$ dan $g \in G$ didapat $gN(S)g^{-1} = N(gSg^{-1})$.

Latihan 5.4.7 Misalkan grup G bertindak pada himpunan dari semua subgrup G melalui konjugasi. Tunjukkan bahwa untuk sebarang $S \subset G$ dan $g \in G$ didapat $gC(S)g^{-1} = C(gSg^{-1})$.

Latihan 5.4.8 Misalkan grup G bertindak pada dirinya sendiri melalui konjugasi. Tunjukkan bahwa bila a dan b berkonjuget dalam G, maka $|C(a)| = |C(b)|$.

Latihan 5.4.9 Misalkan grup G bertindak pada dirinya sendiri melalui konjugasi. Tunjukkan bahwa bila a dan b berkonjuget dalam G, maka $C(a) = C(b)$ bila dan hanya bila masing-masing $C(a)$ dan $C(b)$ adalah subgrup normal dari G.

Latihan 5.4.10 Terangkan mengapa dalam Contoh 5.4.2 dua elemen $a, b \in D_4$ terletak pada orbit yang sama bila dan hanya bila $C(a) = C(b)$. ✓

Latihan 5.4.11 Misalkan indeks dari senter $Z(G)$, $[G : Z(G)] = r$. Tunjukkan bahwa untuk sebarang $g \in G$ banyaknya elemen dari klas konjugasi $K(g)$ adalah lebih kecil atau sama dengan r. ✓

Latihan 5.4.12 Terangkan mengapa untuk sebarang grup berhingga G dan sebarang elemen $g \in G$, maka $|K(g)|$ membagi $|G|$. ✓

Latihan 5.4.13 Terangkan mengapa untuk sebarang elemen $g \in G$, senter $Z(G)$ dari grup G termuat dalam sentralisir $C(g)$ dari elemen g. ✓

Latihan 5.4.14 Terangkan mengapa untuk sebarang elemen $g \in G$, senter $Z(G)$ dari grup G dan sentralisir $C(g)$ dari elemen g adalah sama bila dan hanya bila $g \in Z(g)$. ✓

Latihan 5.4.15 Tunjukkan bahwa untuk sebarang grup tak-komutatif G, indeks dari senter $Z(g)$ yaitu $[G : Z(g)]$ tidak akan sama dengan suatu bilangan prima p. ✓

Latihan 5.4.16 Melalui definisi $a, b \in G$ berkonjuget bila ada suatu elemen $g \in G$ yang memenuhi $b = gag^{-1}$. Berikan suatu contoh untuk menunjukkan bahwa elemen g ini tidak perlu tunggal. Dengan kata lain, ada $h \in G$ dengan $h \neq g$ yang juga memenuhi $b = hah^{-1}$. ✓

Latihan 5.4.17 Dalam situasi Latihan 5.4.16, tunjukkan bahwa banyaknya elemen h yang memenuhi $b = hah^{-1}$ sama dengan $|C(a)|$. ✓

Latihan 5.4.18 Tunjukkan bahwa untuk sebarang elemen $g \in G$ dengan g bukan elemen netral e, maka $|C(g)| \geq 2$. ✓

5.5 Konjugasi dalam S_n dan Simplisitas dari A_5

Pada bagian ini dibahas klas konjugasi dari grup simetri S_n dan digunakan hasil-hasilnya untuk membuktikan bahwa A_5 tidak mempunyai subgrup normal sejati tak-trivial. Dua contoh pertama diberikan untuk mengilustrasikan teorema utama pada bagian ini.

Definisi 5.5.1 Diberikan sebarang $\sigma \in S_n$, σ dapat ditulis sebagai produk dari sikel yang saling asing dimana sikel ditulis dengan urutan dari yang panjangnya pendek keurutan yang lebih panjang. Lagipula, urutan panjang sikel $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_s$ ditentukan secara tunggal dan memenuhi $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. Dalam hal ini $n_1, n_2, \ldots, n_s$ dinamakan **tipe sikel** dari σ. ✓

Contoh 5.5.1 Dalam grup simetri S_9, diberikan suatu tipe sikel $2, 3, 4$ yaitu

$$\sigma = (6\ 9)(1\ 4\ 5)(3\ 2\ 7\ 8).$$

Misalkan elemen konjuge $\tau\sigma\tau^{-1}$ dari σ dimana $\tau = (1\ 7\ 2\ 6)(9\ 3\ 5\ 4\ 8)$. Tinjau permutasi ϕ yang mempunyai tipe sikel yang sama dengan tipe sikel dari σ yaitu $2, 3, 4$. Dalam hal ini permutasi ϕ diperoleh dengan mengganti masing-masing i dalam dekomposisi dari sikel σ oleh $\tau(i)$ yaitu

$$\phi = (\tau(6)\ \tau(9))\ (\tau(1)\ \tau(4)\ \tau(5))\ (\tau(3)\ \tau(2)\ \tau(7)\ \tau(8)) = (1\ 3)(7\ 8\ 4)(5\ 6\ 2\ 9).$$

Dengan mudah dapat dilakukan penghitungan berikut

$$\begin{aligned}
\tau\sigma\tau^{-1}(1) &= \tau\sigma(6) = \tau(9) = 3 = \phi(1)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(3) &= \tau\sigma(9) = \tau(6) = 1 = \phi(3)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(7) &= \tau\sigma(1) = \tau(4) = 8 = \phi(7)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(8) &= \tau\sigma(4) = \tau(5) = 4 = \phi(8)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(4) &= \tau\sigma(5) = \tau(1) = 7 = \phi(4)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(5) &= \tau\sigma(3) = \tau(2) = 6 = \phi(5)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(6) &= \tau\sigma(2) = \tau(7) = 2 = \phi(6)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(2) &= \tau\sigma(7) = \tau(8) = 9 = \phi(2)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(9) &= \tau\sigma(8) = \tau(3) = 5 = \phi(9).
\end{aligned}$$

Terihat bahwa $\tau\sigma\tau^{-1}$ konjuget dari σ mempunyai tipe sikel yang sama dengan tipe sikel dari σ. ●

Contoh 5.5.2 Dalam S_6 diberikan dua sikel dengan tipe sikelyang sama yaitu

$$\sigma = (2)(3\ 6)(4\ 1\ 5) \text{ dan } \rho = (4)(1\ 5)(6\ 3\ 2).$$

Selanjutnya dibuat permutasi τ yang memetakan masing-masing i yang ada dalam dekomposisi σ ke j yang ada dalam dekomposisi dari ρ, yaitu $\tau = (2\ 4\ 6\ 5)(3\ 1)$. Tinjau permutasi $\tau\sigma\tau^{-1}$ konjugasi dari σ, didapat

$$\begin{aligned}
\tau\sigma\tau^{-1}(1) &= \tau\sigma(3) = \tau(6) = 5 = \rho(1)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(2) &= \tau\sigma(5) = \tau(4) = 6 = \rho(2)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(3) &= \tau\sigma(1) = \tau(5) = 2 = \rho(3)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(4) &= \tau\sigma(2) = \tau(2) = 4 = \rho(4)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(5) &= \tau\sigma(6) = \tau(3) = 1 = \rho(5)\\
\tau\sigma\tau^{-1}(6) &= \tau\sigma(4) = \tau(1) = 3 = \rho(6).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa tipe sikel dari permutasi σ sama dengan tipe sikel permutasi konjuget dari σ. ●

Teorema 5.5.1 Dua permutasi σ dan ρ dalam S_n berkonjuget bila dan hanya bila σ dan ρ mempunyai tipe sikel yang sama.

Bukti ($\Rightarrow$) Misalkan σ dan ρ berkonjuget, maka pilih τ yang memenuhi $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$. Misalkan tipe sikel dari σ adalah:

$$(x_1 \cdots x_p)(y_1 \cdots y_q)(z_1 \cdots z_r) \cdots$$

Tinjau permutasi ϕ yang mempunyai tipe sikel sama dengan tpesikel dari σ, yaitu

$$\phi = (\tau(x_1) \cdots \tau(x_p))\ (\tau(y_1) \cdots \tau(y_q))\ (\tau(z_1) \cdots \tau(z_r)) \cdots$$

Didapat

$$\rho(\tau(x_i)) = \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(x_i) = \tau\sigma(x_i) = \tau(x_{i+1}) = \phi(\tau(x_i)).$$

Dengan cara yang serupa didapat $\rho(\tau(y_j)) = \phi(\tau(y_j))$ dan $\rho(\tau(z_k)) = \phi(\tau(z_k))$. Terlihat bahwa $\rho = \phi$. Jadi ρ mempunyai tipe sikel yang sama dengan tipe sikel dari σ.
($\Leftarrow$) Misalkan diberikan dua permutasi dengan tipe sikel yang sama yaitu:

$$\sigma = (x_1 \cdots x_p)(y_1 \cdots y_q)(z_1 \cdots z_q) \cdots \ \text{dan}\ \ \rho = (u_1 \cdots u_p)(v_1 \cdots v_q)(w_1 \cdots w_q) \cdots$$

Didefinisikan suatu permutasi τ oleh

$$\tau(x_i) = u_i, \tau(y_j) = v_j, \tau(z_k) = w_k,$$

dan seterusnya. Misalkan $\phi = \tau\sigma\tau^{-1}$ adalah konjuget dari σ. Didapat

$$\phi(u_i) = \tau\sigma\tau^{-1}(u_i) = \tau\sigma(x_i) = \tau(x_{i+1}) = u_{i+1} = \rho(u_i)$$

Dengan cara yang sama didapat $\phi(v_j) = \rho(v_j)$, $\phi(w_k) = \rho(w_k)$ dan seterusnya. Terlihat bahwa $\phi = \rho$. Jadi ρ mempunyai tipe sikel yang sama dengan tipe sikel dari σ. ✓

Definisi 5.5.2 Suatu **partisi** dari suatu bilangan bulat positip n adalah sebarang barisan bilangan positip tak-naik $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_s$ yang memenuhi penjumlahan $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. ✓

Kesimpulan 5.5.1 Banyaknya dari klas konjugasi dalam S_n sama dengan banyaknya partisi dari n.

Bukti Dari pembahasan Teorema 5.5.1, tipe sikel dari sebarang permutasi adalah suatu partisi dan untuk sebarang partisi $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_s$ ada suatu permutasi dengan tipe sikel yang demikian. Misalnya,

$$(1\ \ 2\ \ \cdots\ n_1)(n_1 + 1\ \ n_1 + 2\ \cdots\ n_1 + n_2)\ \cdots\ (m + 1\ \ m + 2\ \ \cdots\ n),$$

dimana $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_{s-1}$. Dengan demikian $m + n_s = n$ atau $n_1 + n_2 + \cdots + n_{s-1} + n_s = n$.
✓

Bukti dalam Teorema 5.5.1 menunjukkan bahwa diberikan dua permutasi σ dan ρ yang mempunyai tipe sikel yang sama, selanjutnya dikonstruksi permutasi τ yang memenuhi $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$. Contoh berikut mengilustrasikan bahwa τ tidak tunggal.

Contoh 5.5.3 Dalam S_9, diberikan dua permuatsi dengan tipesikel yang sama, yaitu

$$\sigma = (9)(4)(1\ 3)(5\ 8)(2\ 6\ 7) \ \text{ dan } \ \rho = (3)(8)(2\ 5)(9\ 7)(1\ 4\ 6).$$

Dengan menggunakan pengkonstruksian yang sama dilakukan dalam Teorema 5.5.1, didapat $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$ dimana $\tau = (9\ 3\ 5)(4\ 8\ 7\ 6)(1\ 2)$. Tetapi, dengan cara yang sama dapat ditulis dua permutasi dalam urutan yang berbeda, yaitu

$$\sigma = (4)(9)(5\ 8)(1\ 3)(2\ 6\ 7) \ \text{ dan } \ \rho = \ \text{sama seperti sebelumnya.}$$

Lagi, menggunakan pengkonstruksian yang sama dilakukan dalam Teorema 5.5.1 didapat $\theta = (4\ 3\ 7\ 6)(9\ 8\ 5\ 2\ 1)$ yang memenuhi $\rho = \theta\sigma\theta^{-1}$. ●

Tabel 5.6: Klas-klas Konjugasi dalam S_4

Partisi dari 4	Representasi Klas Konjugasi	Banyaknya Konjuget
$1, 1, 1, 1$	(1)	1
$1, 1, 2$	(1 2)	6
$1, 3$	(1 2 3)	8
$2, 2$	(1 2)(3 4)	3
4	(1 2 3 4)	6

Contoh 5.5.4 Contoh berikut ini adalah menentukan suatu himpunan lengkap yang merupakan representasi dari semua klas konjugasi dari S_n, misalnya untuk $n = 4$. Menurut Teorema 5.5.1 dan Kesimpulan 5.5.1 hanya diperlukan semua partisi yang mungkin dari 4. Hal ini ditampilkan dalam Tabel 5.6 yang juga dihitung banyaknya permutasi dalam masing-masing klas. ●

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana pemahaman tentang klas konjugasi dapat menentukan segi keutamaan yang lain.

Contoh 5.5.5 Misalkan $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_4$. Akan ditentukan sentralisir $C(\sigma)$ dalam S_4. Sentralisisr $C(\sigma)$ harus memuat e, σ, σ^2. Pada satu sisi yang lain, melalui contoh sebelumnya, sebarang sikel $(x\ y\ z)$ adalah berkonjuget dengan $(1\ 2\ 3)$ dalam S_4 dan ada 8 sikel semacam ini. Tetapi dengan menggunakan hubungan stabiliser orbit, didapat bahwa banyaknya elemen dalam klas konjugasi dari σ adalah indeks $[S_4 : C(\sigma)]$. Jadi $|S_4|/|C(\sigma)| = 8$. Karena $|S_4| = 24$, maka $|C(\sigma)| = 3$. Dengan demikian sentralisir $C(\sigma) = \{e, \sigma, \sigma^2\}$. ●

Contoh berikut mengilustrasikan fakta bahwa elemen a dan b berkonjuget dalam suatu grup G dan berada pada suatu subgrup $H \subseteq G$ tidak perlu berkonjuget dalam H.

Contoh 5.5.6 Misalkan $\sigma = (1\ 2\ 3) \in A_4 \subseteq S_4$. Dengan menggunakan Teorema 5.5.1, maka σ berkonjuget dengan $\rho = (1\ 2\ 4)$. Tetapi permutasi τ dapat ditentukan sebagaimana dalam bukti Teorema 5.5.1 adalah $\tau = (3\ 4)$ yang merupakan permutasi ganjil. Jadi $\tau \notin A_4$. Lagipula, tidak ada permutasi yang lain $\chi \in A_4$ yang memenuhi $\rho = \chi\sigma\chi^{-1}$. Bila ada, maka

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \chi\sigma\chi^{-1}$$

sehingga didapat

$$\sigma\tau^{-1}\chi = \tau^{-1}\chi\sigma.$$

Jadi $\tau^{-1}\chi \in C(\sigma) \subseteq S_4$. Karena τ adalah permutasi ganjil dan χ adalah permutasi genap, maka permutasi $\tau^{-1}\chi \in C(\sigma)$ adalah permutasi ganjil. Tetapi hal ini tidak mungkin sebab dalam contoh sebelumnya sentralisir $C(\sigma) = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ semua elemennya adalah permutasi genap. Jadi σ dan ρ berkonjuget di S_4 tetapi tidak berkonjuget di A_4. ●

Latihan

5.6 Teorema Sylow

Latihan

5.7 Aplikasi Teorema Sylow

Latihan

Bab 6

Deret Komposisi

6.1 Teorema Isomorpisma

Latihan

6.2 Teorema Jordan-Hölder

Latihan

6.3 Grup Solvable

Latihan

Bagian II

Ring dan Lapangan

Bab 7

Ring

Sebagai ide penggunaan dua operasi dalam model sistem bilangan yang telah akrab dilakukan. Maka kajian dalam bab ini dimulai melihat strukur aljabar dengan lebih dari satu operasi. Beberapa sifat penting diidentifikasi berkaitan dengan dua operasi yang akan dibahas ini untuk memberikan pemahaman yang lebih baik dari struktur aljabar yang berbeda dari apa yang telah dibahas dalam beberapa bab yang terdahulu. Bahasan mencakup konsep ring, daerah integral dan lapangan, yang diperkenalkan langkah demi langkah dalam bab ini. Bahasan bab ini membentuk dasar untuk teori aljabar yang dibahas dalam bab berikutnya.

7.1 Contoh-contoh dan Konsep Dasar

Dalam kajian ini yang telah dibahas sebelumnya dibatasi pada suatu himpunan yang tak-kosong dengan satu operasi yang memeuhi: tertutup, assosiatif, keberadaan elemen netral dan keberadaan elemen invers untuk setiap elemen. Sistem bilangan yang telah dibahas adalah himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dan $\mathbb{Z}_n$ adalah grup dengan satu operasi "tambah". Selain itu, himpunan tersebut akan dilengkapi lagi dengan satu operasi yang lain yaitu "perkalian". Selanjutnya diidentifikasi beberapa sifat penting dari operasi "perkalian" ini serta hubungan antara kedua operasi tersebut. Pembahasan dimulai dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Contoh 7.1.1 Dibahas beberapa sifat penting himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana telah biasa dilakukan memenuhi:

(1) $\mathbb{Z}$ adalah suatu grup komutatif terhadap operasi "tambah".

(2) Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka perkalian $ab \in \mathbb{Z}$.

(3) Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka perkalian $a(bc) = (ab)c$, dengan kata lain dalam $\mathbb{Z}$ berlaku sifat assosiatif terhadap "perkalian".

(4) Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $a(b+c) = ab+ac$ dan $(a+b)c = ac+bc$ dengan kata lain dalam $\mathbb{Z}$ berlaku sifat distributif terhadap "perkalian"dan "tambah".

Selanjutnya, pembahasan dikonsentrasikan pada himpunan dengan dua operasi yang mempunyai empat sifat sebagaimana diberikan dalam Contoh 7.1.1.

Definisi 7.1.1 Suatu himpunan tak-kosong R dilengkapi dengan dua operasi "tambah" dan "perkalian" dinamakan suatu **ring** bila memenuhi empat **aksioma ring**, yaitu untuk setiap a, b dan c di R:

(1) R adalah suatu grup komutatif terhadap operasi "tambah".

(2) **Tertutup** terhadap perkalian, $ab \in R$.

(3) **Assosiatif**terhadap perkalian. $a(bc) = (ab)c$.

(4) **Distributif** terhadap "perkalian"dan "tambah", $a(b+c) = ab+ac$ dan $(a+b)c = ac+bc$.

Bila dalam ring R memenuhi sifat $ab = ba$ untuk semua $a, b \in R$, maka ring R dinamakan ring komutatif. Juga bila R memuat elemen $1 \in R$ yang memenuhi $1.a = a = a.1, \forall a \in R$, maka ring R dinamakan ring satuan. ✓

Pembahasan dari ring R, elemen 0 di R adalah selalu menyatakan elemen netral dari R terhadap operasi biner + dan elemen invers dari $a \in R$ terhadap operasi tambah ditulis $-a$. Selanjutnya $n.a$ menyatakan $a + a + \ldots + a$ sebanyak n untuk n adalah bilangan bulat positip. Sedangkan bila n bilangan bulat negatip, maka $n.a$ menyatakan $(-a) + (-a) + \ldots + (-a)$ sebanyak $|n|$.

Contoh 7.1.2 Himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ adalah ring terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana telah biasa dilakukan adalah ring komutatif.

Contoh 7.1.3 Himpunan bilangan bulat modu;o n yaitu $\mathbb{Z}_n$ adalah ring komutatif terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana telah didefinisikan operasi tambah dan perkalian dalam modulo n.

Contoh 7.1.4 Misalkan ring R adalah himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Maka himpunan semua matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di R yaitu $M(2, R)$ adalah suatu ring terhadap operasi tambah dan perkalian matriks sebagaimana telah dikenal operasi tambah dan perkalian dalam matriks.

Contoh 7.1.5 Diberikan himpunan semua fungsi pada $\mathbb{R}$,

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$

dengan operasi "tambah" dan "perkalian" fungsi untuk $f, g \in F(\mathbb{R})$ didefinisikan oleh

1. $(f + g) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$,

2. $(f.g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x).g(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Himpunan $F(\mathbb{R})$ dengan operasi "tambah"adalah grup komutatif. Elemen netral di $F(\mathbb{R})$ adalah $e(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ dan invers dari $f \in F(\mathbb{R})$ adalah $-f$, dimana $-f(x) = -(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sifat yang lain dari ring juga dipenuhi oleh $F(\mathbb{R})$. ●

Contoh 7.1.6 Diberikan ring $R_1, R_2, \ldots, R_n$ adalah ring. Produk ring

$$R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n,$$

dengan operasi "tambah" dan "perkalian" dalam R untuk $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R$ didefinisikan oleh

1. $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$,

2. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$.

Maka R memenuhi semua kriteria ring. ●

Contoh 7.1.7 Himpunan

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

terhadap operasi biner "tambah" dan "perkalian" sebagaimana dilakukan seperti biasanya adalah ring komutatif. ●

Berikut ini diberikan sifat-sifat dasar dari suatu ring.

Teorema 7.1.1 Bila R suatu ring satuan, maka untuk semua $a, b \in R$:

(1) $a.0 = 0.a = 0$

(2) $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$

(3) $(-a).(-b) = a.b$

(4) $(-1).a = -a$

(5) $(-1).(-1) = 1$.

(6) $(m.a).(n.b) = mn.(ab)$ untuk semua bilangan bulat m dan n.

Bukti

(1) Gunakan distributif, $a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$. Tambahkan dengan $-(a.0)$ kedua ruas, didapat $0 = a.0$. Dengan cara serupa didapat $0\,.a = 0$.

(2) Hitung $a.(-b) + a.b = a.(-b + b) = a.0 = 0$. Sehingga didapat $a.(-b) = -(a.b)$.

(3) Dipunyai bahwa $(-a).(-b) = -(a.(-b)) = -(-(a.b)) = a.b$.

(4) Dari (2), $(-1).a = -(1.a) = -a$.

(5) Gunakan (3), $(-1).(-1) = 1.1 = 1$.

(6) Digunakan induksi dua kali. Bila $m = 0$ atau $n = 0$ tidak ada yang perlu dibuktikan. Misalkan $m = 1$, maka (6) dipenuhi untuk $n = 1$. Asumsikan (6) benar untuk $m = 1$ dan $n = k \geq 0$. Maka dengan menggunakan sifat distributif didapat

$$a[(k+1).b] = a[k.b + b] = a.(k.b) + ab = k.(ab) + ab = (k+1).ab,$$

terlihat bahwa (6) dipenuhi untuk $m = 1$ dan $n = k + 1$. Hal ini menunjukkan bahwa (6) dipenuhi untuk $m = 1$ dan untuk semua $n \geq 0$. Bila $n < 0$, misalkan $r = -n$. Didapat

$$a[n.b] = a[(-r).b] = a[-(r.b)] = -[a(r.b)] = -r.(ab) = n.(ab).$$

Jadi (6) dipenuhi untuk $m = 1$ dan semua $n \in \mathbb{Z}$. Berikutnya, asumsikan (6) dipenuhi untuk $m = k \geq 0$ dan semua $n \in \mathbb{Z}$. Didapat

$$\begin{aligned}[(k+1).a](n.b) &= (k.a + a)(n.b) = (k.a)(n.b) + a(n.b) = km.(ab) + m.(ab)\\ &= (km + m).(ab) = [(k+1)m].(ab),\end{aligned}$$

terlihat bahwa (6) dipenuhi untuk $m = k+1$ dan semua $n \in \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan bahwa (6) dipenuhi oleh $m \geq 0$ dan semua $n \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, bila $m < 0$, misalkan $s = -m$ didapat

$$(m.a)(n.b) = (-s.a)(n.b) = -(s.a)(n.b) = -sn.(ab) = mn.(ab).$$

Lengkap sudah bukti (6). ✓

Dalam pembahasan suatu grup G himpunan bagian tak-kosong dai G yaitu H adalah subgrup dari G bila H adalah grup terhadap operasi biner yang berlaku di G. Bila operasi biner dalam grup G adalah $+$, maka pernyataan H adalah subgrup dari G dapat diganti oleh $H \subset G$ adalah subgrup dari G bila dan hanya bila $a - b \in H$ untuk semua a dan b di H. Pemahaman ini secara intuisi bisa digunakan untuk menunjukkan bahwa himpunan bagian dari suatu ring adalah subring.

Definisi 7.1.2 Suatu himpunan bagian $S \neq \emptyset$ dari suatu ring R adalah suatu **subring** bila S adalah ring terhadap operasi yang berlaku dalam ring R. ✓

Teorema 7.1.2 Suatu himpunan bagian $S \neq \emptyset$ dari suatu ring R adalah suatu subring bila dan hanya bila untuk semua $a, b \in S$ memenuhi

(1) $a - b \in S$

(2) $ab \in S$.

Bukti
($\Leftarrow$) Bila (1) dan (2) dipenuhi maka S adalah subgrup dari R terhadap operasi "tambah" dan subgrup komutatif, juga S tertutup terhadap operasi "perkalian". Sifat assosiatif terhadap "perkalian" dan distributif di S menurun dari ring R. Jadi S adalah subring dari ring R. ($\Rightarrow$) Bila S adalah subring dari R, maka S adalah subgrup dari R terhadap operasi "tambah" hal ini berakibat (1), yaitu $a - b \in S$ untuk semua $a, b \in S$. Sedangkan (2) dipenuhi dari aksiomatik ring yang tetutup terhadap "perkalian". ✓

Contoh 7.1.8 Himpunan $2\mathbb{Z}$ terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana biasa dilakukan dalam himpunan bilangan bulat adalah subring dari ring $\mathbb{Z}$. Hal ini bisa diselidiki sebagi berikut. Untuk $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ dan $a, b \in 2\mathbb{Z}$ didapat (1) $a - b \in 2\mathbb{Z}$ dan (2) $ab \in 2\mathbb{Z}$. Jadi $2\mathbb{Z}$ adalah subring dari $\mathbb{Z}$. Secara umum $n\mathbb{Z}$ untuk $n \geq 1$ adalah subring dari $\mathbb{Z}$.

Contoh 7.1.9 Himpunan $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana biasa dilakukan dalam himpunan bilangan kompleks adalah subring dari ring $\mathbb{C}$. Hal ini bisa diselidiki sebagi berikut. Untuk $\mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ dan $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, maka $x = a + bi$ dan $y = c + di$ untuk beberapa $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Didapat

(1) $x - y = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{Z}[i]$ (sebab $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$)

(2) $xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{Z}[i]$ (sebab $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$).

Jadi $\mathbb{Z}[i]$ adalah subring dari $\mathbb{C}$. Ring $\mathbb{Z}[i]$ dinamakan **ring Gaussian**.

Contoh 7.1.10 Himpunan $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana biasa dilakukan dalam himpunan bilangan riil adalah subring dari ring $\mathbb{R}$. Hal ini bisa diselidiki sebagi berikut. Untuk $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$ dan $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, maka $x = a + b\sqrt{2}$ dan $y = c + d\sqrt{2}$ untuk beberapa $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Didapat

(1) $x - y = (a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (sebab $a - c, b - d \in \mathbb{Q}$)

(2) $xy = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (sebab $ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$).

Jadi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah subring dari $\mathbb{R}$.

Catatan bahwa Contoh 7.1.10 dapat diperumum ke $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ untuk p bilangan bulat positip prima, dengan cara ini diperoleh sejumlah tak-hingga banyak subring dari $\mathbb{R}$ yaitu $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subseteq \mathbb{R}$. Untuk $\mathbb{Q}$ adalah suatu subring dari $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ dikarenakan untuk sebarang bilangan rasional a dapat ditulis sebagai $a = a + 0.\sqrt{p}$.

Contoh 7.1.11 Untuk sebarang bilangan kompleks u dan v, didefinisikan matriks berikut

$$h(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{bmatrix}$$

dan $\mathbb{H} = \{h(u,v)\,|\,u,v \in \mathbb{C}\}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{H}$ adalah subring dari $M(2,\mathbb{C})$. Himpunan $\mathbb{H}$ dinamakan ring **quaternion**. Bila $Q_8 = \{\pm 1, \pm \boldsymbol{i}, \pm \boldsymbol{j}, \pm \boldsymbol{k}\}$ sebagaimana diberikan dalam Contoh 2.1.21 dan $u = a + bi, v = c + di$ dimana $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, maka $h(u,v)$ dapat diungkapkan sebagai

$$h(u,v) = a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$$

atau $a\,1 + b\,\boldsymbol{i} + c\,\boldsymbol{j} + d\,\boldsymbol{k}$. Dengan kata lain, elemen-elemen di $\mathbb{H}$ adalah kombinasi linier dari elemen-elemen di Q_8 dengan koefisien riil. ●

Latihan

Latihan 7.1.1 Dalam latihan berikut ini selidiki himpunan berikut terhadap operasi yang diberikan apakah suatu ring.

1. $S = \{a + b\sqrt{3}\,|\,a,b \in \mathbb{Z}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" bilangan riil sebagaimana biasanya.
2. $S = \{a+bi\,|\,a,b \in \mathbb{Q}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" bilangan kompleks sebagaimana biasanya.
3. $S = \{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\,|\,a,b \in \mathbb{R}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" matriks sebagaimana biasanya.
4. $S = \{\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\,|\,a,b \in \mathbb{R}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" matriks sebagaimana biasanya.
5. $S = \{A \in M(2,\mathbb{R})\,|\,\det(A) = 0\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" matriks sebagaimana biasanya.
6. $S = \{m/n \in \mathbb{Q}\,|\,n \text{ ganjil}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" bilangan riil sebagaimana biasanya.
7. $S = \{ri\,|\,r \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$, terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" bilangan kompleks sebagaimana biasanya.

Latihan 7.1.2 Tunjukkan bahwa himpunan $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ adalah suatu ring terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" fungsi sebagaimana didefinisikan dalam Contoh 7.1.5.

Latihan 7.1.3 Misalkan $R_1, R_2, \ldots, R_n$ adalah sebarang ring dan $S = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ terhadap operasi "tambah" dan "perkalian" sebagaimana didefinisikan dalam Contoh 7.1.6. Maka tunjukkan bahwa

(a) S adalah suatu ring.

(b) S komutatif bila dan hanya bila R_i komutatif untuk semua i, $1 \leq i \leq n$.

(c) S adalah suatu ring dengan elemen satuan bila dan hanya R_i ring dengan elemen satuan untuk semua i, $1 \leq i \leq n$.

Latihan 7.1.4 Bila S dan T adalah subring dari ring R, tunjukkan bahwa $S \cap T$ adalah suatu subring dari R.

Latihan 7.1.5 Tentukan semua subring dari ring $\mathbb{Z}$.

Latihan 7.1.6 Misalkan R adalah suatu ring. **Senter** dari R didefinisikan oleh

$$Z(R) = \{x \in R \,|\, xy = yx \text{ untuk semua } y \in R\}.$$

Tunjukkan bahwa $Z(R)$ adalah suatu subring dari R.

Latihan 7.1.7 Dapatkan senter $Z(\mathbb{H})$, dimana $\mathbb{H}$ adalah ring quaternion.

Latihan 7.1.8 Berikan suatu contoh dari suatu ring R yang mana elemen-elemen a, b dan c di R dengan $a \neq 0$ memenuhi $ab = ac$ tetapi $b \neq c$.

Latihan 7.1.9 Misalkan R adalah suatu ring. Tunjukkan bahwa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ untuk semua $a, b \in R$ bila dan hanya bila R adalah suatu ring komutatif.

Latihan 7.1.10 Misalkan R adalah suatu ring. Tunjukkan bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ untuk semua $a, b \in R$ bila dan hanya bila R adalah suatu ring komutatif.

Latihan 7.1.11 Tunjukkan bahwa Teorema Binomial 1.3.3 dipenuhi untuk semua elemen x dan y di ring komutatif R.

Latihan 7.1.12 Suatu ring **Boolean** R adalah suatu ring yang memenuhi $a^2 = a$ untuk semua $a \in R$. Tunjukkan bahwa suatu ring Boolean adalah suatu ring komutatif dan $2a = 0$ untuk semua $a \in R$.

Latihan 7.1.13 Untuk sebarang himpunan X, misalkan $P(X) = \{A | | A \subseteq X\}$. Untuk sebarang A dan B di $P(x)$ didefinisikan

$$A + B == \{x \,|\, x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} \text{ dan } A.B = A \cap B.$$

Tunjukkan bahwa $P(X)$ adalah suatu ring dengan satuan dan juga $P(X)$ adalah suatu ring Boolean.

Latihan 7.1.14 Misalkan R adalah suatu ring dengan satuan 1 dan $S = \{n.1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Tunjukkan bahwa S adalah suatu subring dari R. Kesimpulan semacam hal ini dalam beberapa ring bisa tidak benar

7.2 Daerah Integral

Dalam bagian ini diidentifikasi suatu sifat dari beberapa ring yang memainkan peranan penting dalam kajian berikutnya. Lagi, sebagai suatu inspirasi kajian adalah ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Dalam sistem bilangan bila pada suatu perhitungan persamaan seperti $ab = ac$ dengan $a \neq 0$ secara langsung disimpulkan $b = c$. Kesimpulan semacam ini dalam beberapa ring bisa tidak benar.

Contoh 7.2.1 Himpunan $\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}_6$ adalah ring. Telah dikenal tabel operasi tambah dari kedua himpunan tersebut, terhadap operasi tambah membentuk grup komutatif. Selanjutnya dibuat tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_5$ dan $\mathbb{Z}_6$ tetapi tanpa elemen nol.

Tabel Perkalian mod 5

.	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[1]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Tabel Perkalian mod 6

.	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[1]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$
$[5]_6$	$[5]_6$	$[4]_6$	$[3]_6$	$[2]_6$	$[1]_6$

Ada beberapa perbedaan diantara dua tabel perkalian dalam $\mathbb{Z}_5 - \{[0]_5\}$ dan $\mathbb{Z}_6 - \{[0]_6\}$. Tabel perkalian dalam $\mathbb{Z}_5 - \{[0]_5\}$ elemen $[0]_5$ tidak ada dalam setiap baris. Sedangkan tabel perkalian dalam $\mathbb{Z}_6 - \{[0]_6\}$ elemen $[0]_6$ muncul dalam baris ke-2, ke-3 dan ke-4. Elemen $[0]_6$ muncul dari hasil perkalian $[2]_6[3]_6 = [3]_6[2]_6 = [3]_6[4]_6 = [4]_6[3]_6$. Perhatikan bahwa $[3]_6[2]_6 = [3]_6[4]_6$, walaupun $[3]_6 \neq [0]_6$ tetapi $[2]_6 \neq [4]_6$. Hal ini menjelaskan bahwa kedua ruas persamaan tidak bisa dilakukan pembagian oleh $[3]_6$ walaupun $[3]_6 \neq [0]_6$.

Definisi 7.2.1 Bila a dan b adalah dua elemen taknol dari suatu ring R yang memenuhi $ab = 0$, maka a dan b dinamakan **pembagi nol** dalam R.

Contoh 7.2.2 Dalam ring $\mathbb{Z}_6$ pembagi nol adalah $[2]_6$, $[3]_6$ dan $[4]_6$. Dalam ring $\mathbb{Z}_{12}$pembagi nol adalah

$[2]_{12}$ sebab $[2]_{12}[6]_{12} = [0]_{12}$,

$[3]_{12}$ sebab $[3]_{12}[4]_{12} = [0]_{12}$,

$[4]_{12}$ sebab $[4]_{12}[3]_{12} = [0]_{12}$,

$[6]_{12}$ sebab $[6]_{12}[2]_{12} = [0]_{12}$,

$[8]_{12}$ sebab $[8]_{12}[3]_{12} = [0]_{12}$,

$[9]_{12}$ sebab $[9]_{12}[4]_{12} = [0]_{12}$,

$[10]_{12}$ sebab $[10]_{12}[8]_{12} = [0]_{12}$.

Perhatikan bahwa semua elemen pembagi nol dalam $\mathbb{Z}_{12}$ adalah elemen yang tidak relatif prima dengan 12. Hal ini bukan sebagai suatu kebetulan dan ditunjukkan dalam sifat berikut. ●

Teorema 7.2.1 Suatu elemen taknol $[r]_n \in \mathbb{Z}_n$ adalah suatu pembagi nol bila dan hanya bila r dan n tidak relatif prima.

Bukti ($\Rightarrow$) Misalkan $[r]_n \in \mathbb{Z}_n$, $[r]_n \neq [0]_n$ dan untuk beberapa $[m]_n \in \mathbb{Z}_n$, $[m]_n \neq [0]_n$ memenuhi $[r]_n[m]_n = [0]_n$. Karena $[m]_n \neq [0]_n$, maka n tidak membagi m dan menggunakan Proposisi 1.3.2 bagian (2) didapat bahwa r dan n tidak relatif prima.
($\Leftarrow$) Misalkan r dan n tidak relatif prima. Maka fpb$(r, n) = d > 1$ dan $n/d < n$. Didapat $[r]_n[n/d]_n = [r/d]_n[n]_n = [0]_n$. Jadi $[r]_n$ adalah suatu pembagi nol dalam $\mathbb{Z}_n$. ✓

Kesimpulan 7.2.1 Ring $\mathbb{Z}_p$ tidak mempunyai pembagi nol bila dan hanya bila p adalah prima.

Bukti Langsung dari Teorema 7.2.1. ✓

Contoh 7.2.3 Ring $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dan $\mathbb{Z}_p$ dimana p prima adalah ring tanpa elemem pembagi nol. ●

Hukum **kanselasi** perkalian dipenuhi dalam suatu ring R bila untuk semua a, b dan c di R dengan $a \neq 0$, $ab = ac$ berakibat $b = c$ dan $ba = ca$ berakibat $b = c$. Akan terlihat bahwa ring yang memenuhi hukum kanselasi terhadap perkalian secara tepatnya adalah ring yang tidak mempunyai pembagi nol.

Teorema 7.2.2 Dalam suatu ring R memenuhi hukum kanselasi bila dan hanya bila R tidak mempunyai elemen pembagi nol.

Bukti ($\Rightarrow$) Misalkan hukum kanselasi dipenuhi dalam suatu ring R dan untuk beberapa $a, b \in R$, $a \neq 0$ dipunyai $ab = 0$. Ditunjukkan bahwa hal tersebut dapat terjadi hanya bila $b = 0$. Karena $ab = 0$ dan $a.0 = 0$, gunakan hukum kanselasi didapat $b = 0$. Jadi R tidak mempunyai pembagi nol.
($\Leftarrow$) Misalkan R tidak mempunyai pembagi nol dan untuk beberapa $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ dipunyai $ab = ac$. Maka $a(b - c) = ab - ac = 0$. Karena a bukan pembagi nol, haruslah $b - c = 0$ atau $b = c$. Dengan cara yang sama $ba = ca$ berakibat $b = c$. ✓

Definisi 7.2.2 Suatu ring R dinamakan suatu **daerah integral** bila

(1) R komutatif,

(2) R mempunyai elemen satuan, $1 \in R$,

(3) R tidak mempunyai pembagi nol. ✓

Contoh 7.2.4 Ring $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dan $\mathbb{Z}_p$ dimana p prima adalah daerah integral. ●

Definisi 7.2.3 Suatu himpunan takkosong S dari suatu daerah intgral D dinamakan **subdaerah** (subdomain) dari D bila S terhadap operasi yang sama sebagai mana dalam D adalah suatu daerah integral. ✓

Proposisi 7.2.1 Suatu himpunan bagian takkosong S dari suatu daerah integral D adalah suatu sub-daerah dari D bila dan hanya bila

(1) S adalah subring dari D.

(2) $1 \in S$ dimana 1 adalah elemen satuan di D.

Bukti
($\Leftarrow$) Misalkan (1) dan (2) dipenuhi, maka S adalah subring dari D dan $1 \in S$. Diberikan sebarang $a \neq 0$, b dan c di S yang memnuhi $ab = ac$. Maka $a = m.1, b = r.1$ dan $c = s.1$ untuk beberapa $m \neq 0, r$ dan s di $\mathbb{Z}$. Didapat

$$0 = ab - ac = a(b - c) = m.1[(r.1) - (s.1)] = m.1(r - s).1 = m(r - s).1.$$

Jadi $m(r - s) = 0$ di $\mathbb{Z}$, hal ini berakibat $r = s$ atau $r.1 = s.1$. Dengan demikian $b = c$. Dengan cara yang sama dpat ditunjukkan $ba = ca$, maka $b = c$. Hal ini menunjukkan dalam S berlaku hukum kanselasi. Akibatnya S tidak memuat pembagi nol. Jadi S adalah subdaerah.
($\Rightarrow$) Misalkan S adalah subdaerah dari suatu daerah integral D, maka S adalah subring komutatif dari D dan $1 \in S$. ✓

Contoh 7.2.5 Himpunan $\mathbb{Z}[i]$ adalah suatu daerah integral, sebab $\mathbb{Z}[i]$ adalah subring dari $\mathbb{C}$ dan $1 = 1 + 0\,i \in \mathbb{Z}[i]$. ●

Contoh 7.2.6 Himpunan $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah suatu daerah integral, sebab $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah subring dari $\mathbb{R}$ dan $1 = 1 + 0\,\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. ●

Contoh 7.2.7 Ring $M(2, \mathbb{R})$ bukan suatu daerah integral. Sebab $M(2, \mathbb{R})$ mempunyai pembagi nol, contohnya

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Juga, $M(2, \mathbb{R})$ bukan ring komutatif. ●

Contoh 7.2.8 Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bukan suatu daerah integral, sebab $(2,0).(0,3) = (0,0)$. Secara lebih umum untuk sebarang dua ring tak-trivial R_1 dan R_2, maka ring $R_1 \times R_2$ bukan suatu daerah integral. Sebab semua bentuk $(r_1, 0)$ dan $(0, r_2)$ dengan $r_1 \neq 0$ dan $r_2 \neq 0$ adalah elemen pembagi nol dalam $R_1 \times R_2$.

Contoh 7.2.9 Sifat lain dari daerah integral $\mathbb{Z}$ yaitu persamaan $a^2 = a$ mempunyai tepat dua penyelesaian $a = 0$ atau $a = 1$. Beda dalam $\mathbb{Z}_6$ yang mana telah diketahui bahwa bukan daerah integral. Maka $a = 3$ juga penyelesaian dari $a^2 = a$. Dalam suatu daerah integral D, $a^2 = a$ berakibat $a(a-1) = a^2 - a = 0$ dan karena tidak memuat pembagi nol, maka hanyalah $a = 0$ atau $a = 1$ adalah penyelesaian dari $a^2 = a$ dalam D.

Latihan

Latihan 7.2.1 Dapatkan semua pembagi nol dari ring berikut.

1. $\mathbb{Z}_4$	2. $\mathbb{Z}_8$	3. $\mathbb{Z}_{11}$	4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5. $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$	6. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$	7. $M(2, \mathbb{Z}_2)$.	

Latihan 7.2.2 Buat suatu contoh dari suatu ring komutatif yang tidak memuat pembagi nol dan bukan suatu daerah integral.

Latihan 7.2.3 Buat suatu contoh dari suatu ring dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol dan bukan suatu daerah integral.

Latihan 7.2.4 Tunjukkan bahwa irisan dari dua subdaerah dari suatu daerah integral D adalah juga subdaerah dari D.

Latihan 7.2.5 Misalkan D adalah suatu daerah integral dan $S = \{n.1 \,|\, n\mathbb{Z}\}$ dengan 1 adalah elemen satuan di D. Tunjukkan bahwa

(a) S adalah subdaerah dari D.

(b) Bila R adalah sebarang subdaerah dari D, maka $S \subseteq R$.

Latihan 7.2.6 Tunjukkan bahwa ring berikut adalah daerah integral.

(a) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\}$.

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \,|\, a, b, c.d \in \mathbb{Q}\}$.

Latihan 7.2.7 Dapatkan semua subdaerah dari $\mathbb{Z}$.

Latihan 7.2.8 Tunjukkan bahwa subdaerah dari $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah prima hanyalah $\mathbb{Z}_p$ sendiri.

Latihan 7.2.9 Tunjukkan bahwa hanyalah ring Bolean $\mathbb{Z}_2$ adalah suatu daerah integral.

Latihan 7.2.10 Misalkan R adalah suatu ring dengan setidaknya dua elemen yang memenuhi untuk setiap elemen taknol $a \in R$ ada dengan tunggal suatu elemen $b \in R$ sehingga $aba = a$. Tunjukkan bahwa

(a) R tidak mempunyai pembagi nol.

(b) $bab = b$.

(c) R mempunyai elemen satuan.

Latihan 7.2.11 Diberikan ring $\mathbb{Z}_7$.

(a) Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_7$ adalah suatu ring yang memenuhi kriteria dalam Latihan 7.2.10.

(b) Untuk sebarang elemen taknol $a \in \mathbb{Z}_7$ dapatkan elemen terkait $b \in \mathbb{Z}_7$ yang memenuhi $aba = a$.

7.3 Lapangan

Dalam bagian sebelumnya telah dikenalkan pengertian suatu daerah integral, yaitu suatu ring komutatif mempunyai elemen satuan dan tidak memuat pembagi nol. Dalam suatu daerah integral hukum kanselasi dipenuhi, sebagaimana telah ditunjukkan dengan menyatakan bahwa jika $ab = ac$, $a \neq 0$, maka $a(b - c) = ab - bc = 0$ dan juga karena tidak ada pembagi nol, haruslah $b - c = 0$ dan $b = c$. Dalam hal ini tidak dilakukan pembagian dengan a pada kedua ruas persamaan. Sebab tidak diketahui apakah a mempunyai invers terhadap perkalian.

Contoh 7.3.1 Dalam $\mathbb{Z}$ hanyalah elemen 1 dan -1 yang mempunyai invers terhadap perkalian, sebab $1.1 = 1$ dan $(-1).(-1) = 1$.

Contoh 7.3.2 Dalam ring himpunan $\mathbb{Z}_5$ didapat

$$[1]_5.[1]_5 = [1]_5,\quad [2]_5.[3]_5 = [1]_5,\quad [3]_5.[2]_5 = [1]_5,\quad [4]_5.[4]_5 = [1]_5.$$

Terlihat bahwa dalam ring $\mathbb{Z}_5$ semua elemen yang taknol mempunyai invers di $\mathbb{Z}_5$ terhadap operasi perkalian.

Definisi 7.3.1 Dalam suatu ring R dengan elemen satuan 1, suatu elemen $a \in R$ dinamakan suatu **unit** bila a mempunyai invers terhadap perkalian.

Sebagaimana telah dibahas dalam Grup, bila a mempunyai invers a^{-1}, maka invers tersebut tunggal.

Contoh 7.3.3 Dalam ring $\mathbb{Z}_{12}$ elemen-elemen unit adalah, $[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}$ dan $[11]_{12}$ sebab

$$[1]_{12}.[1]_{12} = [3]_{12}.[3]_{12} = [5]_{12}.[5]_{12} = [7]_{12}.[7]_{12} = [11]_{12}.[11]_{12} = [1]_{12}.$$

Perlu diperhatikan bahwa elemen unit dalam $\mathbb{Z}_{12}$ adalah elemen taknol yang merupakan bukan pembagi nol. Juga himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{12}$ terhadap perkalian adalah $\mathbb{U}(12)$ merupakan grup. Pembahasan dalam contoh ini secara umum diberikan dalam dua teorema berikut.

Teorema 7.3.1 Dalam suatu ring R dengan elemen satuan 1, bila suatu elemen $a \in R$ adalah suatu unit, maka a bukan suatu pembagi nol.

Bukti Misalkan $a \in R$ adalah suatu unit dalam R, jadi a^{-1} ada dalam R. Bila untuk beberapa $b \in R$ memenuhi $ab = 0$, maka $b = 1.b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0$. Dengan demikian a bukan suatu pembagi nol. ✓

Teorema 7.3.2 Misalkan R adalah suatu ring komutatif yang mempunyai elemen satuan 1, dan

$$\mathbb{U}(R) = \{a \in R \,|\, a \text{ adalah suatu unit di } R\}.$$

Maka $\mathbb{U}(R)$ adalah suatu grup terhadap operasi perkalian di R.

Bukti Ditunjukkan $\mathbb{U}(R)$ memenuhi empat aksioma grup.
(**Tertutup**) Misalkan $a, b \in \mathbb{U}(R)$, maka a^{-1} dan b^{-1} di $\mathbb{U}(R)$. Dengan demikian $b^{-1}a^{-1} \in R$, didapat

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1,$$

dan

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b^{-1} = b^{-1}b = 1.$$

Terlihat bahwa $b^{-1}a^{-1}$ invers dari ab terhadap perkalian, jadi $ab \in \mathbb{U}(R)$.
(**Assosiatif**) Operasi perkalian dalam $\mathbb{U}(R)$ juga merupakan operasi perkalian dalam R. Karena R ring, maka memenuhi sifat assosiatif.
(**Identitas**) $1.1 = 1$, jadi 1 mempunyai invers dirinya sendiri terhadap operasi perkalian. Elemen 1 adalah suatu unit dan $1 \in \mathbb{U}(R)$.
(**Invers**) Bila $a \in \mathbb{U}(R)$, maka a mempunyai invers terhadap perkalian a^{-1} di R. Tetapi a adalah invers dari a^{-1} terhadap perkalian. Jadi a^{-1} mempunyai invers terhadap perkalian dan $a^{-1} \in \mathbb{U}(R)$. ✓

Teorema 7.3.3 Dalam ring $\mathbb{Z}_n$ grup perkalian dari unit adalah $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{U}(n)$.

Bukti Bila $[a]_n \in \mathbb{U}(\mathbb{Z})$ atau dengan kata lain $[a]_n$ adalah suatu unit di $\mathbb{Z}_n$, maka $[a]_n \neq [0]_n$ dan menurut Teorema 7.3.1 $[a]_n$ bukan pembagi nol di $\mathbb{Z}_n$. Dengan demikian menurut Teorema 7.2.1 a dan n adalah relatif prima, jadi $[a]_n \in \mathbb{U}(n)$, maka $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) \subseteq \mathbb{U}(n)$. Bila $[a]_n \in \mathbb{U}(n)$ dan karena $\mathbb{U}(n)$ adalah grup terhadap operasi perkalian (sebagaimana telah dibahas dalam bagian grup), maka $([a]_n)^{-1}$ adalah invers dari $[a]_n$ di $\mathbb{U}(n) \subseteq \mathbb{Z}_n$ jadi $[a]_n \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}_n)$, maka $\mathbb{U}(n) \subseteq \mathbb{U}(\mathbb{Z}_n)$. Dengan demikian $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{U}(n)$. ✓

Contoh 7.3.4 $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_6) = \{[1]_6, [5]_6\} = \mathbb{U}(6)$ dan $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}_5 - \{[0]_5\} = \mathbb{U}(5)$.

Contoh 7.3.5 Untuk himpunan bilangan bulat, $\mathbb{U}(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ adalah grup terhadap perkalian. Untuk bilangan rasional, $\mathbb{U}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$ adalah himpunan semua bilangan rasional taknol terhadap perkalian adalah grup.

Contoh 7.3.6 Misalkan akan dihitung elemen unit dari $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$. Disini (a, b) unit di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ bila dan hanya bila ada suatu elemen $(c, d) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ yang memenuhi

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd) = ([1]_4, [1]_6).$$

Dengan kata lain a harus suatu unit di $\mathbb{Z}_4$ dan b juga harus suatu unit di $\mathbb{Z}_6$. Jadi

$$\mathbb{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6) = \{([1]_4, [1]_6), ([1]_4, [5]_6), ([3]_4, [1]_6), ([3]_4, [5]_6)\} = \mathbb{U}(\mathbb{Z}_4) \times \mathbb{U}(\mathbb{Z}_6).$$

Berikut ini dibahas suatu definisi dari pengertian yang paling mendasar dalam teori ring.

Definisi 7.3.2 Suatu ring F dinamakan suatu lapangan bila

(1) Ring F adalah ring komutatif.

(2) Ring F mempunyai elemen satuan, $1 \in F$.

(3) Setiap elemen taknol di F adalah suatu unit. ✓

Perhatikan bahwa berdasarkan Teorema 7.3.2, kondisi (3) bisa diganti oleh

(3') Himpunan semua elemen tak nol di F adalah suatu grup komutatif terhadap operasi perkalian.

Kondisi (1) penting, bila kondisi (1) tidak dipenuhi maka ring F tidak bisa dikatakan sebagai suatu lapangan.

Contoh 7.3.7 Himpunan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ adalah lapangan dan $\mathbb{Z}$ adalah daerah integral yang bukan suatu lapangan.

Hubungan diantara daerah integral dan lapangan diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 7.3.4 Setiap lapangan adalah suatu daerah integral.

Bukti Hal ini akibat langsung dari Definisi 7.2.3, Definisi 7.3.2 dan Teorema 7.3.1. Yaitu, misalkan dalam suatu lapangan F, untuk $a, b \in F$ berlaku $ab = 0$. Bila $a \neq 0$, maka ada invers $a^{-1} \in F$ dan didapat

$$b = 1.b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0.$$

Terlihat bahwa bila sebarang $a \neq 0$ di F dan $ab = 0$ berakibat bahwa $b = 0$. Jadi $a \in F$ bukan elemen pembagi nol. Oleh karena itu F tidak memuat pembagi nol. Jadi F adalah suatu daerah integral. ✓

Teorema 7.3.4 tidak berlaku sebalinya. Contohnya adalah himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah suatu daerah integral tetapi bukan suatu lapangan. Teorema berikut memberikan syarat bahwa suatu daerah integral adalah suatu lapangan.

Teorema 7.3.5 Setiap daerah integral berhingga D adalah suatu lapangan.

Bukti Misalkan D adalah suatu daerah integral berhingga dan sebarang $x \in D$ dengan $x \neq 0$. Dihimpun semua elemen taknol di D yaitu

$$D - \{0\} = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}.$$

Karena D daerah integral dan $x \neq 0$ didapat himpunan

$$x(D - \{0\}) = \{x, xx_1, xx_2, \ldots, xx_{n-1}\}$$

yang semua elemennya taknol. Himpunan $x(D - \{0\})$ sama dengan $D - \{0\}$ sebab bila $xx_i = xx_j$ untuk beberapa $1 \leq i, j \leq n-1$. Maka dengan menggunakan hukum kanselasi didapat $x_i = x_j$. Hal ini menunjukkan bahwa semua elemen di $x(D-\{0\})$ adalah berbeda dan karena $|D - \{0\}| = |x(D - \{x\})|$, maka $D - \{0\} = x(D - \{0\})$. Bila $x = 1$, maka $x^{-1} = 1$. Bila $x \neq 1$, maka haruslah $1 = xx_i$ untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n-1$. Jadi $x^{-1} = x_i$ untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n-1$. Dengan demikian sebarang $x \neq 0$ di D mempunyai invers di D. Jadi D adalah suatu lapangan. ✓

Kesimpulan 7.3.1 Himpunan $\mathbb{Z}_p$ adalah suatu lapangan bila dan hanya bila p adalah prima.

Bukti ($\Leftarrow$). Misalkan p prima dan dari Teorema 7.3.3 didapat $\mathbb{U}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{U}(p)$. Karena p prima, maka $\mathbb{U}(p) = \mathbb{Z}_p - \{[0]_p\}$. Jadi $\mathbb{Z}_p$ adalah daerah integral. Dengan menggunakan Teorema 7.3.5, maka $\mathbb{Z}_p$ adalah suatu lapangan.
($\Rightarrow$) Misalkan $\mathbb{Z}_p$ adalah suatu lapangan, maka $\mathbb{Z}_p$ tidak memuat pembagi nol. Dengan menggunakan Kesimpulan 7.2.1 maka p adalah prima. ✓

Definisi 7.3.3 Himpunan bagian takkosong S dari suatu lapangan F dinamakan **sub-lapangan** dari F bila S adalah suatu lapangan terhadap dua operasi yang sama seperti di F. ✓

Teorema 7.3.6 Suatu himpunan bagian takkosong S dari suatu lapangan F adalah suatu sub-lapangan terhadap dua operasi yang sama seperti di F bila dan hanya bila untuksemua $x, y \in S$ berlaku

(1) $x - y \in S$.

(2) Untuk $y \neq 0$, $xy^{-1} \in S$

Bukti ($\Rightarrow$) Misalkan S adalah sub-lapangan dari suatu lapangan F, maka S terhadap operasi "tambah" adalah subgrup dari F dengan demikikian $x - y \in S$ untuk semua $x, y \in S$. Himpunan $S - \{0\}$ terhadap operasi "perkalian" adalah subgrup dari F, maka $xy^{-1} \in S - \{0\}$ dan untuk $x = 0$ didapat $0.y^{-1} = 0 \in S$. jadi $xy^{-1} \in S$ untuk semua $x, y \in S$ dimana $y \neq 0$.
($\Leftarrow$) Misalkan $x - y \in S$ untuk semua $x, y \in S$, maka S adalah subgrup dari F. Dan misalkan xy^{-1} untuk semua $x, y \in S$ dimana $y \neq 0$, maka $x, y^{-1} \in S - \{0\}$ untuk semua $x, y \in S - \{0\}$. Jadi $S - \{0\}$ terhadap operasi perkalian adalah sungrup dari F. Elemen satuan $1 \neq 0$, jadi $1 = 1.1^{-1} \in S - \{0\} \subset S$. Himpunan S terhadap operasi perkalian adalah komutatif sebab F komutatif terhadap perkalian. Dengan demikian S adalah sub-lapangan dari F. ✓

Contoh 7.3.8 Dengan menggunakan Teorema 7.3.6 dapat ditunjukkan himpunan

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

terhadap dua operasi tambah dan perkalian sebagaimana dilakukan adalah sub-lapangan dari lapangan $\mathbb{R}$. Sudah ditunjukkan dalam Contoh 7.1.10 bahwa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah sub-ring dari $\mathbb{R}$. Untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ adalah sub-lapangan dari $\mathbb{R}$ cukup dibuktikan kondisi (2) dalam Toerema 7.3.6. Misalkan $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dimana $y \neq 0$. Maka

$$x = a + b\sqrt{2},\ y = c + d\sqrt{2} \text{ untuk beberapa } a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

Didapat

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= (a + b\sqrt{2})\frac{1}{c + d\sqrt{2}} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \left(\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}\right).\left(\frac{c - d\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \underbrace{\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Catatan bahwa karena $c + d\sqrt{2} = y \neq 0$, maka $c^2 - 2d^2 \neq 0$. Sebab bila tidak demikian yaitu $c^2 - 2d^2 = 0$, maka berakibat bahwa $\sqrt{2} = \pm(c/d)$ adalah suatu hal yang tidak mungkin untuk $c, d \in \mathbb{Q}$. ●

Contoh 7.3.9 Sebegitu jauh contoh-contoh yang dibahas adalah lapangan takhingga $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dan $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; dan lapangan berhingga seperti $\mathbb{Z}_p$ dengan banyaknya elemen adalah p dan p adalah bilangan bulat prima. Dalam contoh ini diberikan suatu lapangan dengan n elemen dimana n bukan suatu bilangan bulat prima. Diberikan himpunan

$$\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}_3, i^2 = -1\}.$$

Karena a dan b adalah $[0]_3, [1]_3$ atau $[2]_3 = [-1]_3$, maka

$$\mathbb{Z}_3[i] = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3, [1]_3 i, [1]_3 + [1]_3 i, [2]_3 + [2]_3 i, [2]_3 i, [1]_3 + [2]_3 i, [2]_3 + [2]_3 i\}.$$

Terlihat bahwa $n = |\mathbb{Z}_3[i]| = 9$. Operasi "+" dan "." dalam $\mathbb{Z}_3[i]$ didefinisikan sebagai berikut. Untuk $x, y \in \mathbb{Z}_3[i]$ dimana $x = [a]_3 + [b]_3 i$ dan $y = [c]_3 + [d]_3 i$,

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} ([a]_3 + [c]_3) + ([b]_3 + [d]_3)i \text{ dan } x.y \stackrel{\text{def}}{=} ([a]_3[c]_3 - [b]_3[d]_3) + ([a]_3[d]_3 + [b]_3[c]_3)i.$$

Dengan dua operasi tersebut $\mathbb{Z}_3[i]$ adalah suatu ring komutatif. Setiap elemen taknol di $\mathbb{Z}_3[i]$ adalah unit sebab

$$[1]_3^{-1} = [1]_3, \ [2]_3^{-1} = [2]_3, \ ([1]_3 i)^{-1} = [2]_3 i$$

dan

$$([1]_3 + [1]_3 i)^{-1} = [2]_3 + [1]_3 i, \ ([1]_3 + [2]_3 i)^{-1} = [2]_3 + [2]_3 i.$$

Dengan demikian $\mathbb{Z}_3[i]$ adalah suatu lapangan.

Contoh 7.3.10 Diberikan grup kuoternion

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm \boldsymbol{i}, \pm \boldsymbol{j}, \pm \boldsymbol{k}\},$$

maka $\mathbb{H}$ ring kuoternion sebagaimana dibahas dalam Contoh 7.1.11 dapat didefinisikan sebagai

$$\mathbb{H} = \{a + b\,\boldsymbol{i} + c\,\boldsymbol{j} + d\,\boldsymbol{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ dan } \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in Q_8\}.$$

Himpunan $\mathbb{H}$ adalah suatu ring dengan elemen satuan 1. Selanjutnya bila $x \in \mathbb{H}$ dimana $x \neq 0$ dan $x = a + b\,\boldsymbol{i} + c\,\boldsymbol{j} + d\,\boldsymbol{k}$, maka didapat $x^* = a - b\,\boldsymbol{i} - c\,\boldsymbol{j} - d\,\boldsymbol{k}$. Juga

$$xx^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0 \text{ dan } x(x^*/xx^*) = 1.$$

Jadi semua $x \in \mathbb{H}$ dengan $x \neq 0$ adalah unit. Apapun hal tersebut, karena $\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$, maka $\mathbb{H}$ bukan suatu ring komutatif. Dengan demikian $\mathbb{H}$ bukan suatu lapangan.

Definisi 7.3.4 Suatu ring R dengan elemen satuan yang memenuhi setiap elemen taknol $a \in R$ adalah suatu unit dinamakan suatu **ring pembagian** (division ring).

Contoh 7.3.11 Setiap lapangan adalah suatu ring pembagian dan ring kuoternion $\mathbb{H}$ adalah suatu contoh ring pembagian yang bukan suatu lapangan.

Dikenalkan suatu konsep terakhir dalam bagian ini yang dinamakan karakteristik.

Contoh 7.3.12 Dalam $\mathbb{Z}_6$ bisa didapat suatu bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $na = [0]_6$ untuk semua $a \in \mathbb{Z}_6$, yaitu $n = 6$. Dengan cara yang sama, dalam $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ didapat $n = 12$, yang memenuhi $12(a, b) = (12a, 12b) = ([0]_4, [0]_6)$ untuk semua $(a, b) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ dan tidak ada bilangan bulat positip lebih kecil dari bilangan bulat tersebut yang memenuhi sifat tersebut. Dalam ring $\mathbb{Z}$, tidak ada bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $na = 0$ untuk semua $a \in \mathbb{Z}$.

Definisi 7.3.5 Dalam suatu ring R, **karakteristik** dari R dinotasikan oleh kar(R) adalah bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $n.a = 0$ untuk semua $a \in R$. Bila tidak ada bilngan n yang demikian, maka kar(R) = 0. ✓

Contoh 7.3.13 Untuk setiap bilangan bulat positip n ada suatu ring yang mempunyai karakter sama dengan n yaitu $\mathbb{Z}_n$ himpunan bilangan bulat modulo n. Sedangkan $\text{kar}(\mathbb{Z}) = \text{kar}(\mathbb{Q}) = \text{kar}(\mathbb{R}) = \text{kar}(\mathbb{C}) = 0$.

Bila ring R mempunyai elemen satuan, maka mudah untuk menentukan karakteristik dari R sebagaimana ditunjukan berikut.

Teorema 7.3.7 Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan 1. Maka

(1) kar(R) = 0 bila 1 mempunyai order tak-berhingga terhadap operasi "tambah".

(1) kar(R) = n bila 1 mempunyai order n terhadap operasi "tambah".

Bukti (1) Bila $|i| = \infty$, maka tidak akan ada bilangan bulat berhingga n yang memenuhi $n.1 = 0$. Jadi kar(R) = 0. (2) Bila $|1| = n$, maka n adalah bilangan bulat positip terkecil yang memenuhi $n.1 = 0$ dan untuk semua $a \in R$ didapat $n.a = n(1.a) = (n.1)a = 0.a = 0$. Terlihat bahwa kar($R$) = n ✓

Contoh 7.3.14 Dalam $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ elemen satuan adalah $([1]_4, [1]_6)$ dan $\text{kar}(R) = |([1]_4, [1]_6)| = 12$. Tinjau himpunan bagian $S = \mathbb{Z}_4 \times \{[0]_6\} \subseteq R$. Maka S adalah subring dari R dengan elemen satuan $([1]_4, [0]_6)$ dan $\text{kar}(S) = |([1]_4, [0]_6)| = 4 \neq \text{kar}(R)$. Dengan kata lain karakteristik dari subring S bisa berbeda dengan karakteristik dari ring R.

Apa yang terjadi dalam Contoh 7.3.14 tidak akan terjadi dalam suatu daerah integral. Contoh berikut menjelaskan hal tersebut.

Contoh 7.3.15 Misalkan D adalah sebarang daerah integral dan S adalah suatu subdaerah dari D. Berdasarkan Proposisi 7.2.1 bila elemen satuan $1 \in D$, maka $1 \in S$. Dengan kata lain D dan S mempunyai elemen satuan yang sama. Jadi $\text{kar}(D) = |1| = \text{kar}(S)$. ✓

Diakhir bagian ini diberikan suatu sifat karakteristik dari suatu daerah integral.

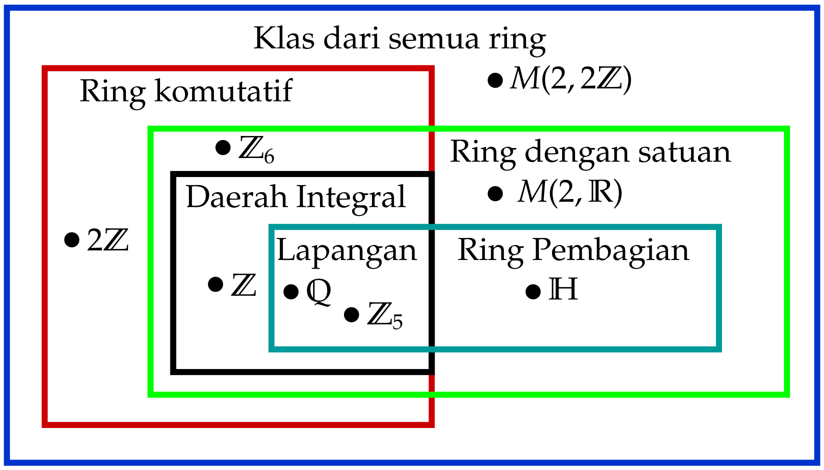
Teorema 7.3.8 Misalkan D adalah suatu daerah integral. Maka kar(D) = 0 atau kar(D) = p, dimana p adalah prima.

Bukti Asumsikan D adalah daerah integral dengan kar(D) $\neq 0$. Pilih bilangan bulat positip terkecil n yang memenuhi $n.1 = 0$. Andaikan n bukan prima, maka $n = uv$ untuk beberapa bilangan bulat $u < n$ dan $v < n$. Didapat

$$0 = n.1 = (uv).1 = (u.1)(v.1) \in D.$$

Karena D adalah suatu daerah integral maka $u.1 = 0$ atau $v.1$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan pilihan n adalah bilangan bulat positip terkecil yang memenuhi $n.1 = 0$. Dengan demikian haruslah n adalah prima. ✓

Visualisasi Gambar 7.1 membantu kita untuk mengenal lebih baik berbagai macam ring yang telah dikenalkan dalam bab ini. Dalam masing-masing macam bagian suatu contoh yang mewakili diberikan. Bila diinginkan bisa dikonstruksi contoh-contoh yang lain sebagaimana yang dikehendaki untuk masing-masing macam dari 6 bagian yang ada.



Gambar 7.1: Semua klas Ring

Latihan

Latihan 7.3.1 Dapatkan semua unit dari ring berkut.

1. $\mathbb{Z}_{10}$	2 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	3. $\mathbb{Z}[i]$
4. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	5. $\mathbb{H}$	6. $\mathbb{C}$
7. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	8. $M(2, \mathbb{Z}_2)$	9. $M(2, \mathbb{Z})$
10. $M(2, \mathbb{R})$.		

Latihan 7.3.2 Misalkan a adalah suatu unit dalam suatu ring R dengan satuan. Tunjukkan bahwa invers terhadap perkalian dari a adalah suatu unit di R.

Latihan 7.3.3 Misalkan R adalah suatu ring dengan satuan $1 \in R$ dan S suatu subring dari R dengan $1 \in S$. Tunjukkan bahwa bila $a \in S$ adalah suatu unit di S, maka a adalah suatu unit di R. Tunjukkan dengan suatu contoh bahwa hal yang sebaliknya tidak perlu benar.

Latihan 7.3.4 Misalkan R_1 dan R_2 adalah ring komutatif yang mempunyai elemen satuan. Tunjukkan bahwa grup unit berikut $\mathbb{U}(R_1 \times R_2) \cong \mathbb{U}(R_1) \times \mathbb{U}(R_2)$.

Latihan 7.3.5 Misalkan R adalah suatu ring komutatif yang mempunyai elemen satuan dan $M(2, R)$ adalah himpunan matriks berukuran 2×2 dengan elemen-elemen di R. Tunjukkan bahwa $A \in M(2, R)$ adalah suatu unit bila dan hanya bila $\det(A)$ adalah suatu unit di R.

Latihan 7.3.6 Dari ring berikut tentukan mana yang merupakan lapangan.

1. $\mathbb{Z}[i]$
2. $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{Z}_{13}$
4. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
5. $\mathbb{Q}(i) = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$
6. $\mathbb{H}$
7. $\mathbb{Z}_2[i] = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}_2\}$.

Latihan 7.3.7 Misalkan S dan T adalah sub-lapangan dari suatu lapnagn F. Tunjukkan bahwa $S\cap T$ adalah suatu sub-lapngan dari F.

Latihan 7.3.8 Tentukan karakteristik dari ring berikut.

1. $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_8$
2. $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{H}$
5. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
6. $\mathbb{Z}_3[i]$
7. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}_3$.

Latihan 7.3.9 Misalkan F adalah suatu lapangan dengan $\text{kar}(F) = p > 0$. Tunjukkan bahwa untuk sebarang elemen $a,b\in F$ didapat $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Latihan 7.3.10 Tunjukkan bahwa D adalah suatu daerah integral dengan $\text{kar}(D) = 0$, maka D adalah tak-berhingga.

Latihan 7.3.11 Misalkan F adalah suatu lapangan dengan $|F| = q$. Tunjukkan bahwa untuk semua $a\in F$ didapat $a^q = a$.

Latihan 7.3.12 Misalkan p adalah bilangan prima dan persamaan $x^p - 1 = 0$. Tunjukkan bahwa
(a) dalam $\mathbb{C}$, $x^p - 1 = 0$ mempunyai p penyelesaiaan yang berbeda.
(b) Dalam suatu lapangan F dengan $\text{kar}(F) = p$, maka $x^p - 1 = 0$ mempunyai hanya satu penyelesaiaan (Pentunjuk: Gunakan Latihan 7.3.9).

Latihan 7.3.13 Suatu elemen a dalam suatu ring R dikatakan **nilpoten** bila untuk beberapa $k\geq 1$ didapat $a^k = 0$. Tunjukkan bahwa himpunan dari elemen nilpoten dalam suatu ring komutatif R membentuk suatu subring dari R.

Latihan 7.3.14 Dapatkan semua elemen nilpoten dalam $\mathbb{Z}_{24}$.

Latihan 7.3.15 Tunjukkan bahwa bila D adalah suatu daerah integral, maka 0 adalah satu-satunya elemen nilpoten dalam D.

Latihan 7.3.16 Misalkan a adalah suatu elemen nilpoten dalam suatu ring komutatif R dengan elemem satuan. Tunjukkan bahwa:
(a) $a = 0$ atau a adalah suatu pembagi nol.
(b) ax adalah nilpoten untuk semua $x\in R$.
(c) $1+a$ adalah suatu unit di R.
(d) Bila u adalah suatu unit di R, maka $u+a$ juga suatu unit di$R$.

Latihan 7.3.17 Dalam suatu ring R suatu elemen $a \in R$ dinamakan **idempoten** bila $a^2 = a$. Tunjukkan bahwa dalam suatu daerah integral D hanyalah 0 dan 1 elemen idempoten di D.

Latihan 7.3.18 Dapatkan semua elemen idempoten di $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12}$ dan $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

Latihan 7.3.19 Tunjukkan bahwa suatu ring R adalah suatu ring pembagian bila dan hanya bila untuk sebarang $a \in R$ ada suatu elemen tunggal $b \in R$ yang memenuhi $aba = a$.

Latihan 7.3.20 Tunjukkan bahwa senter dari suatu ring pembagian adalah suatu lapangan.

Latihan 7.3.21 Tunjukkan bahwa suatu ring berhingga R dengan elemen satuan dan tanpa elemen elemen pembagi nol adalah suatu ring pembagian.

Latihan 7.3.22 Didefinisikan **kuoternion integral** sebagai berikut:

$$I = \{a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{H}.$$

(a) Tunjukkan bahwa I adalah suatu subring dari $\mathbb{H}$.
(b) Misalkan $N : I \to \mathbb{Z}$ adalah fungsi dinamakan **norm** yang didefinisikan oleh

$$N(a + b\boldsymbol{i}, +c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{Z}.$$

Tunjukkan bahwa untuk semua $z = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \in I$, $N(z) = zz^*$, dimana

$$z^* = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}.$$

(c) Tunjukkan bahwa $N(zw) = N(z)N(w)$, $\forall z, w \in I$.
(d) Tunjukkan bahwa $z \in I$ adalah suatu unit bila dan hanya bila $N(z) = 1$.
(e) Tunjukkan bahwa grup dari unit di I adalah $\mathbb{U}(I) = Q_8$.

Bab 8

Homomorpisma Ring

Dalam Bab 2 telah dibahas pemetaan dari suatu grup G ke group yang lain G' dinamakan homomorpisma grup. Dalam bab ini didefinisikan homomorpisma ring. Ditunjukkan bahwa bagaimana homomorpisma ring memberikan sesuatu yang lebih penting terhadap pemahaman dari suatu macam subring khusus yang dinamakan suatu ***ideal***. Dapat ditunjukkan bahwa image homomorpisma dari suatu ring isomorpik dengan suatu ***ring kuosi***. Homomorpisma ring, ideal dan ring kousi mempunyai keterkaitan yang dekat tepatnya seperti cara dalam homomorpisma grup. Pengkonstruksian ***lapangan dari kousi*** dari suatu daerah integral dibahas pada akhir bab ini.

8.1 Definisi dan Sifat-sifat Dasar

Seperti halnyadalamgrup, pemetaan diantara ring yang digunakan haruslah pemetaan yang mempertahan struktur aljabar dari ring. Untuk itu ditinjau pemetaan yang dikaitkan dengan dua operasi dalam ring. Karena suatu ring adalah suatu grup terhadap operasi "tambah", maka pemetaan yang dipertimbangkan adalah suatu pemetaan homomorpisma grup terhadap operasi "tambah" begitu juga terhadap operasi "perkalian".

Contoh 8.1.1 Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $2\mathbb{Z}$, dan pemetaan natural $\phi(n) = 2n$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$. Telah diketahui bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma grup terhadap $+$, sebab $\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n = \phi(m)+\phi(n)$. Tetapi terhadap operasi perkalian (.), didapat $2 = \phi(1.1) \neq \phi(1).\phi(1) = 2.2 = 4$. Dengan kata lain terhadap operasi perkalian (.) dalam $\mathbb{Z}$ tidak memenuhi seperti yang diharapkan. ●

Contoh 8.1.2 Diberikan pemetaan dari ring $\mathbb{Z}$ ke ring $\mathbb{Z}_3$ oleh $\phi(n) = n \mod 3$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$. Sebagaimana telah diketahui, untuk semua m dan n di $\mathbb{Z}$ didapat
$\phi(m+n) = (m+n) \mod 3 = (m \mod 3) + (n \mod 3) = \phi(m) + \phi(n)$,
$\phi(m.n) = (m.n) \mod 3 = (m \mod 3).(n \mod 3) = \phi(m).\phi(n)$.

Terlihat bahwa dalam contoh ini pemetaan ϕ memenuhi kriteria sebagaimana yang diharapkan. ●

Definisi 8.1.1 Suatu pemetaan dari suatu ring R ke suatu ring R' yaitu $\phi : R \rightarrow R'$ dinamakan suatu ***homomorpisma ring*** bila untuk semua $x, y \in R$ didapat

(1) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,

(2) $\phi(x.y) = \phi(x).\phi(y)$.

Perlu diperhatikan bahwa dua operasi yang digunakan pada persamaan bagian kiri adalah di ring R, sedangkan pada sebelah kanan di ring R'. ✓

Catatan bahwa kondisi (1) dalam Definisi 8.1.1 menjelaskan bahwa pemetaan ϕ adalah suatu homomorpisma grup terhadap operasi "tambah".

Contoh 8.1.3 Diberikan pemetaan $\phi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ didefinisikan oleh $\phi(x) = [3x]_6$ untuk semua $x \in \mathbb{Z}_4$. Sebagaimana telah diketahui operasi tambah dan kali dalam modulo, maka untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$ didapat
$\phi(x + y) = 3(x + y) \mod 6 = (3x \mod 6) + (3y \mod 6) = \phi(x) + \phi(y)$,
$\phi(x.y) = 3(x.y) \mod 6 = 9(x.y) \mod 6 = (3x \mod 6).(3y \mod 6) = \phi(x).\phi(x)$.
Terlihat bahwa dalam contoh ini pemetaan ϕ adalah suatu homomorpisma ring. ●

Contoh 8.1.4 Diberikan pemetaan homomorpisma $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, diselidiki ada berapa banyak pemetaan homomorpisma tersebut. Pemetaan homomorpisma ϕ haruslah suatu homomorpisma grup terhadap tambah. Karena $\mathbb{Z}$ adalah grup siklik dibangun oleh 1, maka image dari 1 yaitu $\phi(1)$ secara lengkap menentukan ϕ. Dengan demikian, misalkan $\phi(1) = n \in \mathbb{Z}$. Maka didapat

$$n = \phi(1) = \phi(1.1) = \phi(1).\phi(1) = n^2.$$

Jadi $n^2 = n$ di $\mathbb{Z}$, hal ini ekivalen dengan $n(n - 1) = 0$. Tetapi, karena $\mathbb{Z}$ tidak memuat pembagi nol, maka $n = 0$ atau $n = 1$. Selanjutnya bila $\phi(1) = n = 0$, maka $\phi(m) = 0$ untuk semua $m \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian homomorpisma ϕ adalah pemetaan nol. Bila $\phi(1) = n = 1$, maka $\phi(m) = m$ untuk semua $m \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian homomorpisma ϕ adalah pemetaan identitas. Jadi hanya ada dua pemetaan homomorpisma yang mungkin yaitu pemetaan nol dan pemetaan identitas. ●

Contoh 8.1.5 Diberikan pemetaan homomorpisma $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$, diselidiki ada berapa banyak pemetaan homomorpisma tersebut. Lagi, dengan menggunakan fakta bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah grup siklik terhadap operasi tambah dengan generator $[1]_6$, maka $\phi([1]_6) = x \in \mathbb{Z}_{12}$ secara lengkap menentukan ϕ. Dari Proposisi 3.2.2 bagian (4) didapat $|\phi([1]_6)| \in \mathbb{Z}_{12}$ membagi $|[1]_6| = 6$. Jadi
$|x| = 1$ dan $x = [0]_{12}$, atau $|x| = 2$ dan $x = [6]_{12}$, atau
$|x| = 3$ dan $x = [4]_{12}$ atau $x = [8]_12$, atau $|x| = 6$ dan $x = [2]_{12}$ atau $x = [10]_12$.

Sebegitu jauh apa yang dibahas hanya menggunakan kondisi (1) dari pengertian homomorpisma ring. Berikutnya, digunakan kondisi (2) dalam definisi homomorpisma ring, didapat

$$x = \phi([1]_6) = \phi([1]_6.[1]_6) = \phi([1]_6).\phi([1]_6) = x^2.$$

Dengan demikian nilai x yang mungkin haruslah memenuhi $x^2 = x \in \mathbb{Z}_{12}$. (Elemen yang demikian dalam suatu ring dinamakan idempoten). Karena dalam $\mathbb{Z}_{12}$ berlaku

$$[6]_{12}^2 = [0]_{12}, [8]_{12}^2 = [2]_{12}^2 = [10]_{12}^2 = [4]_{12}.$$

Jadi nilai $x \in \mathbb{Z}_{12}$ yang mungkin hanyalah $x = [0]_{12}$ dan $x = [4]_{12}$. Dengan demikian didapat $\phi(y) = [0]_{12}$, $\forall y \in \mathbb{Z}_6$ atau $\phi(y) = [4y]_{12}$, $\forall y \in \mathbb{Z}_6$. Jadi hanya ada dua pemetaan homomorpisma ring yang mungkin dari $\mathbb{Z}_6$ ke $\mathbb{Z}_{12}$, yaitu pemetaan nol dan pemetaan yang didefinisikan oleh $\phi(y) = [4y]_{12}$, $\forall y \in \mathbb{Z}_6$.

Dalam suatu homomorpisma ring didefinisikan kernel seperti kernel dari homomorpisma grup terhadap operasi tambah.

Definisi 8.1.2 Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring. Maka **kernel** dari ϕ adalah himpunan $\text{Ker}(\phi) = \{x \in R \mid \phi(x) = 0_{R'}\} \subseteq R$.

Dalam beberapa contoh sudah terlihat berulang kali penggunaan sifat-fatat yang telah dikenal dari homomorpisma grup. Karena ring adalah grup terhadap operasi tambah, sifat-sifat berikut dari homomorpisma ring mengikuti Proposisi 3.2.2 dan 3.2.3.

Proposisi 8.1.1 Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring. Maka

(1) $\phi(0_R) = 0_{R'}$,

(2) $\phi(-x) = -\phi(x)$, untuk semua $x \in R$,

(3) $\phi(nx) = n\phi(x)$, untuk semua $x \in R$ dan $n \in \mathbb{Z}$,

(4) ϕ adalah satu-satu bila dan hanya bila $\text{Ker}(\phi) = \{0_R\}$.

Berikut ini dibahas beberapa sifat homomorpisma ring yang melibatkan kondisi (1) dan (2) dari definisi homomorpisma ring.

Proposisi 8.1.2 Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring. Maka

(1) $\phi(x^n) = \phi(x)^n$, untuk semua $x \in R$ dan untuk semua $n > 0, n \in \mathbb{Z}$.

(2) Bila A adalah suatu subring dari R, maka $\phi(A) = \{\phi(x) \in R' \mid x \in A\} \subseteq R'$ adalah suatu subring dari R'.

(3) Bila R adalah suatu ring dengan satuan 1_R, maka $\phi(1_R)$ adalah suatu satuan di $\phi(R)$ dan $\phi(1_R)^2 = \phi(1_R)$.

(4) Bila R adalah suatu ring dengan satuan 1_R dan $x \in \mathbb{U}(R)$ adalah suatu unit di R, maka $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ di $\phi(R)$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$.

(5) Bila B adalah suatu subring dari R', maka $\phi^{-1}(B) = \{x \in R \,|\, \phi(x) \in B\} \subseteq R$ adalah subring dari R dan $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq \phi^{-1}(B)$.

(6) $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah suatu subring dari R.

(7) Bila R adalah suatu ring komutatif, maka $\phi(R)$ adalah suatu ring komutatif.

Bukti

(1) Untuk $n = 1$, didapat $\phi(x^1) = \phi(x) = \phi(x)^1$. Bila $k > 0$ dan $\phi(x^k) = \phi(x)^k$, maka

$$\phi(x^{k+1}) = \phi(x^k.x) = \phi(x^k).\phi(x) = \phi(x)^k.\phi(x) = \phi(x)^{k+1}.$$

Jadi (1) terbukti melalui induksi matematika.

(2) Bila A subring dari R, maka menurut Proposisi 3.2.2 bagian (5), $\phi(A)$ adalah suatu subgrup dari R' terhadap operasi tambah. Selanjutnya untuk sebarang $x, y \in \phi(A)$, dapat dipilih beberapa $a, b \in A$ yang memenuhi $\phi(a) = x$ dan $\phi(b) = y$. Catatan bahwa karena A adalah subring dari R, didapat $ab \in A$. Dengan demikian

$$xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \in \phi(A).$$

Maka dari itu menggunakan sifat-sifat subring (Teorema 7.1.2) $\phi(A)$ adalah subring dari R'.

(3) Diberikan sebarang $x \in \phi(R)$ dapat dipilih beberapa $a \in R$ yang memenuhi $\phi(a) = x$. Dengan demikian didapat

$$x.\phi(1_R) = \phi(a).\phi(1_R) = \phi(a.1_R) = \phi(a) = x.$$

Dengan cara yang sama didapat

$$\phi(1_R).x = \phi(1_R).\phi(a) = \phi(1_R.a) = \phi(a) = x.$$

Terlihat bahwa $\phi(1_R)$ adalah elemen satuan di $\phi(R)$. Selanjutnya, juga

$$\phi(1_R).\phi(1_R) = \phi(1_R.1_R) = \phi(1_R).$$

Jadi $\phi(1_R)^2 = \phi(1_R)$.

(4) Misalkan $x \in \mathbb{U}(R) \subseteq R$. Untuk $n > 0$ dari (1) didapat $\phi(x^n) = \phi(x)^n$. Untuk $n = 0$, $\phi(x^0) = \phi(1_R)$ dari (3) didapat $\phi(1_R)$ adalah elemen satuan di $\phi(R)$ dan $\phi(1_R) = \phi(x)^0$. Maka $\phi(x^0) = \phi(x)^0$. Untuk $n = -1$, didapat $\phi(x).\phi(x^{-1}) = \phi(x.x^{-1}) = \phi(1_R)$ dan dari (3) merupakan elemen satuan di $\phi(R)$. Juga dengan cara yang sama didapat $\phi(x^{-1}).\phi(x) = \phi(x^{-1}.x) = \phi(1_R)$ adalah elemen satuan di $\phi(R)$. Hal ini berakibat $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$ adalah invers dari $\phi(x)$ di $\phi(R)$. Untuk sebarang $n < 0$, misalkan $n = -s$ dimana $s > 0$. Gunakan (1) dan kasus $n = -1$ didapat

$$\phi(x^n) = \phi(x^{-s}) = \phi((x^{-1})^s) = (\phi(x^{-1}))^s = (\phi(x)^{-1})^s = \phi(x)^{-s} = \phi(x)^n.$$

(5) Bila B adalah suatu subring dari R', maka menggunakan Proposisi 3.2.2 bagian (6) $\phi^{-1}(B)$ adalah subgrup dari R terhadap operasi tambah. Untuk sebarang $x, y \in \phi^{-1}(B)$ dan karena B adalah subring R' didapat $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \in B$. Akibatnya $xy \in \phi^{-1}(B)$. Dengan menggunakan Teorema 7.1.2 maka $\phi^{-1}(B)$ adalah subring dari R. Selanjutnya, karena $0_{R'} \in B$, maka $\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(0_{R'}) \subseteq \phi^{-1}(B)$.

(6) Misalkan $B = \{0_{R'}\} \subseteq R'$ adalah subring trivial dari R'. Maka dari (5) didapat $\phi^{-1}(B) = \phi^{-1}(0_{R'}) = \mathrm{Ker}(\phi)$ adalah subring dari R.

(7) Diberikan sebarang $x, y \in \phi(R)$ dapat dipilih beberapa $a, b \in R$ yang memenuhi $x = \phi(a)$ dan $y = \phi(b)$. Bila R adalah komutatif, maka

$$xy = \phi(a).\phi(b) = \phi(a.b) = \phi(b.a) = \phi(b).\phi(a) = yx.$$

Dengan demikian $\phi(R)$ adalah komutatif. ✓

Definisi 8.1.3 Suatu homomorpisma ring $\phi : R \to R'$ yang bijektif dinamakan **isomorpima ring**. Dua ring R dan R' dikatakan **isomorpik** ditulis $R \cong R'$ bila ada suatu isomorpisma $\phi : R \to R'$. ✓

Untuk menunjukkan bahwa dua ring adalah isomorpik mengikuti empat langkah yang telah dibahas dalam isomorpisma grup. Sebagai latihan untuk dibuktikan Proposisi 3.2.5 juga berlaku untuk isomorpisma ring. Sedangkan Proposisi 3.2.6 memberikan alat yang penting untuk menentukan apakah dua grup adalah isomorpik. Proposisi berikut memberikan beberapa hal perbandingan untuk ring melalui pengertian ring isomorpik. Bukti dapat dilakukan sebagai latihan.

Proposisi 8.1.3 Diberikan ring isomorpik $R \cong R'$. Maka

(1) Ring R adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan bila dan hanya bila ring R' adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan.

(2) Himpunan R adalah suatu daerah integral bila dan hanya bila R' juga adalah suatu daerah integral.

(3) Himpunan R adalah suatu lapangan bila dan hanya bila himpunan R' juga adalah suatu lapangan. ✓

Contoh 8.1.6 Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, misalkan matriks $A(a, b) \in M(2, \mathbb{R})$ didefinisikan oleh

$$A(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Misalkan $R = \{A(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq M(2, \mathbb{R})$. Dapat ditunjukkan bahwa $R \cong \mathbb{C}$ sebagai berikut.

(1) Misalkan pemetaan $\phi : R \to \mathbb{C}$ didefinisikan oleh $\phi(A(a,b)) = a + bi \in \mathbb{C}$ untuk setiap $A((a,b)) \in R$.

(2) Ditunjukkan bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma ring. Untuk operasi tambah, didapat

$$\begin{aligned}\phi(A(a,b)+A(c,d)) &= \phi(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c\end{bmatrix}) \\ &= \phi(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c\end{bmatrix}) \\ &= \phi(A(a+c,b+d)) \\ &= (a+c)+(b+d)i \\ &= (a+bi)+(c+di) \\ &= \phi(A(a,b))+\phi(A(c,d)).\end{aligned}$$

Sedangkan untuk perkalian didapat

$$\begin{aligned}\phi(A(a,b).A(c,d)) &= \phi(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c\end{bmatrix}) \\ &= \phi(\begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd\end{bmatrix}) \\ &= \phi(A(ac-bd,ad+bc)) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (a+bi).(c+di) \\ &= \phi(A(a,b)).\phi(A(c,d)).\end{aligned}$$

Terlihat bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma ring.

(3) Pemetaan ϕ adalah satu-satu, sebab $\phi(a,b) = a + bi = 0$ bila dan hanya bila $a = b = 0$. Dengan demikian $\text{Ker}(\phi) = \{A(0,0)\}$ adalah trivial subring dari R.

(4) Pemetaan ϕ adalah pada, sebab diberikan sebarang $a + bi \in \mathbb{C}$ dapat dipilih matriks $A(a,b) \in R$ yang memenuhi $\phi(A(a,b)) = a + bi$. ●

Contoh berikut merupakan bahasan di akhir bagian ini. Contoh ini memberikan suatu pemahaman yang penting bahwa suatu permasalahan yang sangat sulit bisa diselesaikan dengan memahami pengertian-pengertian dan sifat-sifat yang telah dibahas.

Contoh 8.1.7 Ditunjukkan bahwa persamaan $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian untuk semua $x \in \mathbb{Z}$. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut. Misalkan $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ homomorpisma natural $\phi(x) = x \mod 3$ untuk semua $x \in \mathbb{Z}$. Andaikan ada suatu $a \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $2a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = 0$. Maka

$$[0]_3 = \phi(0) = \phi(2a^3 - 5a^2 + 7a - 8) = 2\phi(a)^3 - 5\phi(a)^2 + 7\phi(a) - 8.$$

Karena $-5 \equiv 7 \equiv -8 \equiv 1 \mod 3$, didapat

$$2\phi(a)^3 - 5\phi(a)^2 + 7\phi(a) - 8 = 2\phi(a)^3 + \phi(a)^2 + 1\phi(a) + 1.$$

Bila $b = \phi(a) \in \mathbb{Z}_3$, maka $2b^3 + b^2 + b + 1 = [0]_3$. Tetapi mudah diselidiki bahwa untuk $b = [0]_3, [1]_3, [2]_3$, maka $2b^3 + b^2 + b + 1 \neq [0]_3$. Hal ini bertentangan dengan kenyataan $2b^3 + b^2 + b + 1 = [0]_3$. Dengan demikian tidak ada bilangan bulat $a \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $2a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = 0$. Jadi persamaan $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian di $\mathbb{Z}$.

Latihan

Latihan 8.1.1 Dapatkan semua homomorpisma yang mungkin diantara ring berikut.

1. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$
2. $\phi : 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
3. $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6$
4. $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$
5. $\phi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$
6. $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
7. $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
8. $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{3})$
9. $\phi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{C}$.

Latihan 8.1.2 Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ dan $\mathbb{Z}_{mn}$ adalah ring isomorpik bila dan hanya bila m dan n adalah prima relatif.

Latihan 8.1.3 Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, misalkan $B(a, b) \in M(2, \mathbb{Z})$ didefinisikan oleh

$$B(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Bila $S = \{B(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq M(2, \mathbb{Z})$, maka tunjukkan bahwa

$$S \cong \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Latihan 8.1.4 Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ tidak merupakan ring isomorpik.

Latihan 8.1.5 Tunjukkan bahwa bila $R_1 \cong R_2$ ring isomorpik, maka $\text{kar}(R_1) = \text{kar}(R_2)$.

Latihan 8.1.6 Tunjukkan bahwa $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dan $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ tidak merupakan ring isomorpik.

Latihan 8.1.7 Misalkan R adalah suatu ring komutatif dengan $\text{kar}(R) = p$ dimana p adalah prima. Tunjukkan bahwa pemetaan $\phi : R \to R$ didefinisikan oleh $\phi(x) = x^p$, untuk semua $x \in R$ adalah suatu homomorpisma ring (ϕ dinamakan **pemetaan Frobenius**).

Latihan 8.1.8 Diberikan ring R_1 dan R_2.

(a) Misalkan $\phi : R_1 \times R_2 \to R_1$ didefinisikan oleh $\phi(a,b) = a$. Tunjukkan bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma ring.

(b) Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}_1 \times R_2 \cong R_2 \times R_1$.

Latihan 8.1.9 Tunjukkan bahwa relasi isomorpisma $\cong$ adalah suatu relasi ekivalen pada klas dari semua ring.

Latihan 8.1.10 Tunjukkan bahwa $x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian di $\mathbb{Z}$.

Latihan 8.1.11 Selidiki apakah $x^3 + 6x^2 + 22x + 1 = 0$ mempunyai suatu penyelesaian di $\mathbb{Z}$.

8.2 Ideal

Dalam kasus suatu homomorpisma grup $\phi : G \to G'$, kernel $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah suatu subgrup dari G dengan sifat bahwa setiap koset kiri adalah suatu koset kanan. Dinamakan subgrup yang demikian adalah subgrup normal. Dari kajian subgrup normal telah ditunjukkan bahwa memberikan hasil grup kuasi (grup pecahan). Hal yang sama untuk kasus dari suatu homomorpisma ring $\phi : R \to R'$, sebagaimana telah ditunjukkan $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah suatu subring dari ring R. Faktanya, $\mathrm{Ker}(\phi)$ adalah suatu subring dengan suatu sifat ekstra yang akan memberikan pengertian dari suatu ring kuasi (ring pecahan).

Contoh 8.2.1 Misalkan $K = \mathrm{Ker}(\phi)$, dimana ϕ adalah suatu homomorpisma $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ didefinisikan oleh $\phi(x) = x \mod 2$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Dalam hal ini $K = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}$ dan sebarang $k = 2x \in K$ didapat

$$\phi(nk) = \phi(n.2x) = \phi(n).\phi(2x) = [0]_2$$

dan

$$\phi(kn) = \phi(2x.n) = \phi(2x).\phi(n) = [0]_2.$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}$ dan $k \in K$ didapat $nk \in K$ dan $kn \in K$. Sifat ini berlaku untuk kernel dari sebarang homomorpisma ring sebagaimana ditunjukkan berikut ini.

Proposisi 8.2.1 Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring dan $K = \mathrm{Ker}(\phi)$. Maka

(1) K adalah suatu subring dari R.

(2) Untuk semua $r \in R$ dan semua $k \in K$, maka $rk \in K$ dan $kr \in K$.

Bukti

(1) Telah ditunjukkan dalam Proposisi 8.1.2 bagian (6) bahwa Ker(ϕ) adalah subring dari R.

(2) Misalkan sebarang $r \in R$ dan sebarang $k \in K$. Maka didapat

$$\phi(rk) = \phi(r)\phi(k) = \phi(r).0_{R'} = 0_{R'}$$

dan

$$\phi(kr) = \phi(k)\phi(r) = 0_{R'}.\phi(r) = 0_{R'}.$$

Terlihat bahwa $rk \in K$ dan $kr \in K$. ✓

Definisi 8.2.1 Misalkan R adalah suatu ring dan I adalah suatu himpunan bagian takkosong dari R. Maka I dinamakan suatu **ideal** dari R bila

(1) I adalah suatu subring dari R.

(2) Untuk semua $r \in R$ dan semua $x \in I$ maka $rx \in I$ dan $xr \in I$. ✓

Kesimpulan 8.2.1 Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring dengan $K = \text{Ker}(\phi)$. Maka K adalah suatu ideal dari R.

Bukti Langsung dari Proposisi 8.2.1 dan Definisi 8.2.1. ✓

Contoh 8.2.2 Diselidiki semua ideal dari $\mathbb{Z}$. Bila I adalah suatu ideal dari $\mathbb{Z}$, maka menurut Definisi 8.2.1 bagian (1), I adalah subring dari $\mathbb{Z}$. Jadi $I = n\mathbb{Z}$ untuk beberapa $n \geq 1$ dan misalkan sebarang $a \in \mathbb{Z}$ dan sebarang $b \in I$. Didapat $b = nk$ untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$ dan

$$ab = a(nk) = n(ak) \in n\mathbb{Z} = I$$

juga

$$ba = (nk)a = n(ak) \in n\mathbb{Z} = I.$$

Terlihat bahwa I adalah suatu ideal dari $\mathbb{Z}$. Jadi semua ideal dari $\mathbb{Z}$ adalah $n\mathbb{Z}$ untuk sebarang $n \geq 1$. ●

Contoh berikut menjelakan bahwa supaya tidak membuat kesimpulan yang salah. Yaitu semua subring dari suatu ring yang diberikan tidak harus merupakan suatu ideal dari ring tersebut.

Contoh 8.2.3 Himpunan $\mathbb{Z}$ adalah suatu subring dari $\mathbb{Q}$, tetapi bukan suatu ideal dari $\mathbb{Q}$. Sebab, untuk $1/2 \in \mathbb{Q}$ dan $5 \in \mathbb{Z}$ didapat $(1/2).5 \notin \mathbb{Z}$. ●

Contoh 8.2.4 Dalam sebarang ring R, himpunan $\{0_R\}$ adalah suatu ideal dari R yang dinamakan ideal **trivial** dan R sendiri adalah suatu ideala dari R yang dinamakan ideal **sejati**. ●

Contoh 8.2.5 Misalkan R adalah suatu ring komutatif dan sebarang $a \in R$. Didefinisikan **ideal utama yang dibangun oleh** a, dinotasikan oleh $\langle a \rangle$ sebagai berikut

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ra \,|\, r \in R\}.$$

Dengan kata lain $\langle a \rangle$ adalah kelipatan dari semua a dengan sebarang elemen $r \in R$. Catatan bahwa $\langle a \rangle$ adalah suatu ideal dari R sebab memenuhi kondisi ideal yaitu:

(1) Diberikan sebarang x dan y di $\langle a \rangle$ dapat dipilih beberapa r dan s di R yang memenuhi $x = ra$ dan $y = sa$. Juga

$$x - y = ra - sa = \underbrace{(r - s)}_{\in R} a \in \langle a \rangle \quad \text{dan} \quad xy = ra.sa = \underbrace{(ras)}_{\in R}\, a \in \langle a \rangle\,.$$

Terlihat bahwa $\langle a \rangle$ adalah subring dari R.

(2) Untuk sebarang $r \in R$ dan sebarang $x = sa \in \langle a \rangle$ didapat

$$rx = r(sa) = \underbrace{(rs)}_{\in R}\, a \in \langle a \rangle \quad \text{dan} \quad xr = rx = r(sa) = \underbrace{(rs)}_{\in R}\, a \in \langle a \rangle\,.$$

Contoh 8.2.6 Setiap ideal di $\mathbb{Z}$ adalah suatu ideal utama. Dari Contoh 8.2.2 didapat bahwa setiap ideal dari $\mathbb{Z}$ adalah $I = n\mathbb{Z}$ untuk $n \geq 1$. Jadi $I = \langle n \rangle$ adalah ideal utama yang dibangun oleh n.

Contoh 8.2.7 Diselidiki semua ideal dari $\mathbb{Q}$. Misalkan $I \neq \{0\}$ adalah suatu ideal nontrivial dari $\mathbb{Q}$. Jadi ada suatu elemen $a \in I$ dengan $a \neq 0$. Karena $a \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ dan $\mathbb{Q}$ adalah suatu lapangan, maka a adalah suatu unit. Dengan kata lain, ada invers terhadap perkalian $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $a^{-1}a = 1$. Tetapi karena $a^{-1} \in \mathbb{Q}$, $a \in I$ dan I adalah ideal, didapat

$$1 = a^{-1}a \in I.$$

Lagi, dengan menggunakan fakta bahwa I adalah suatu ideal dan diberikan sebarang $b \in \mathbb{Q}$ didapat

$$b = b.1 \in I.$$

Jadi $\mathbb{Q} \subset I$, hal ini berakibat $I = \mathbb{Q}$. Maka dari itu, hanya $\{0\}$ dan $\mathbb{Q}$ yang merupakan ideal dari $\mathbb{Q}$.

Contoh ini adalah kesimpulan yang mencolok. Bila secara teliti apa yang dibahas dalam contoh kuncinya adalah fakta bahwa $a \neq 0$ berakibat a adalah suatu unit. Dengan kata lain $\mathbb{Q}$ adalah suatu lapangan. Dengan demikian proposisi berikut ini bukan sebagai suatu kejutan.

Proposisi 8.2.2 Misalkan R adalah suatu ring komutatif yang mempunyai elemen satuan. Maka R adalah suatu lapangan bila dan hanya bila ideal dari R hanyalah $\{0_R\}$ dan R sendiri.

Bukti ($\Rightarrow$) Bila R adalah suatu lapangan dan ideal $I \neq \{0_R\}$ adalah suatu ideal dari R. Maka ada suatu elemen $a \in I$ dan $a \neq 0_R$. Karena R suatu lapangan, maka setiap elemen taknol adalah unit. Juga karena I adalah ideal dari R, maka $1 = a^{-1}a \in I$. Maka dari itu, untuk semua $r \in R$ didapat $r = r.1 \in I$. Jadi $R \subseteq I$, akibatnya $R = I$.
($\Leftarrow$) Misalkan R adalah suatu ring komutatif yang mempunyai elemen satuan. Untuk menunjukkan R adalah suatu lapangan cukup ditunjukkan bahwa semua elemen taknol di R adalah unit. UNtuk itu, misalkan $0_R \neq a \in R$ dan $I = \langle a \rangle$ adalah ideal utama yang dibangun oleh a. Jelas bahwa $I \neq \{0_R\}$ sebab $0_R \neq a \in I$. Bila ideal dari R hanyalah $\{0_R\}$ dan R sendiri. Maka $I = R$. Sebagaimana telah diketahui bahwa R adalah suatu ring dengan satuan, maka $1 \in I = \langle a \rangle$. Dapat dipilih $r = a^{-1} \in R$ yang memenuhi $1 = ra = a^{-1}a$. Dengan demikian a adalah elemen unit sebagaimana dikehendaki. ✓

Dari Proposisi 8.2.2 didapat bahwa ideal dari lapangan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dan $\mathbb{Z}_p$ dimana p adalah prima hanyalah ideal trivial dan ideal sejati.

Contoh 8.2.8 Diberikan ideal $I = 5\mathbb{Z}$ dari $R = \mathbb{Z}$. Sebagaimana telah diketahui $\mathbb{Z}$ adalah grup komutatif terhadap tambah dengan demikian $5\mathbb{Z}$ adalah suatu subgrup normal dan didapat

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$$

adalah grup terhadap operasi tambah pada koset di $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$(a + 5\mathbb{Z}) + (b + 5\mathbb{Z}) = (a + b) + 5\mathbb{Z}.$$

Selanjutnya secara natural perkalian koset mengikuti operasi tambah pada koset adalah

$$(a + 5\mathbb{Z}).(b + 5\mathbb{Z}) = (ab) + 5\mathbb{Z}.$$

Perkalian koset tersebut diselidiki apakah terdefinisi secara baik. Bila $x + 5\mathbb{Z} = a + 5\mathbb{Z}$ dan $y + 5\mathbb{Z} = b + 5\mathbb{Z}$, maka

$$x \in a + 5\mathbb{Z} \quad \text{dan} \quad y \in b + 5\mathbb{Z}$$

Jadi

$$x = a + 5k \quad \text{dan} \quad y = b + 5j, \text{ untuk beberapa } k, j \in \mathbb{Z}.$$

Dengan demikian didapat

$$xy = (a + 5k)(b + 5j) = ab + \underbrace{b(5k) + a(5j) + (5k)(5j)}_{\in 5\mathbb{Z}}.$$

Terlihat bahwa $xy \in ab + 5\mathbb{Z}$ akibatnya $xy + 5\mathbb{Z} = ab + 5\mathbb{Z}$. Jadi perkalian koset terdefinisi dengan baik. ●

Suatu ring adalah suatu grup terhadap operasi tambah dan suatu ideal I dalam R adalah subring dari R. Maka dari itu I adalah suatu subgrup dari R terhadap operasi tambah. Karena R adalah grup komutatif terhadap operasi tambah, maka I adalah suatu subgrup normal dari R terhadap operasi tambah. Menurut Teorema 3.4.1 dan Proposisi 3.4.1 bagian (3), R/I adalah suatu grup komutatif terhadap operasi tambah pada koset di R/I. Dalam Lemma 3.4.1 ditunjukkan bahwa suatu subgrup adalah subgrup normal ekivalen dengan operasi yang didefinisikan pada koset adalah terdefinisi secara baik. Pada pembahasan berikut ditunjukkan bahwa suatu subring yang merupakan suatu ideal adalah ekivalen dengan operasi perkalian koset terdefinisi secara baik. Yang demikian ini sama halnya membandingkan Lemma 3.4.1 dengan Lemma 8.2.1 dan Teorema 3.4.1 dengan Teorema 8.2.1.

Lemma 8.2.1 Misalkan I adalah suatu subring dari suatu ring R. Maka I adalah suatu ideal dari R bila dan hanya bila perkalian $(a+I)(b+I) = (ab)+I$ adalah suatu operasi terdefinisi secara baik pada koset dari I dalam R.

Bukti ($\Rightarrow$) Asumsikan I adalah suatu ideal dalam R selanjutnya misalkan $a_1+I = a_2+I$ dan $b_1+I = b_2+I$. Hal ini berakibat bahwa $a_1 = a_2+k$ dan $b_1 = b_2+j$ untuk beberapa $k, j \in I$. Maka
$$a_1b_1 = a_2b_2 + a_2j + kb_2 + kj.$$
Karena I adalah suatu subring dari R, maka tertutup terhadap operasi tambah dan perkalian, jadi $kj \in I$. Karena I adalah suatu ideal , maka $a_2j \in$ dan $kb_2 \in I$. Dengan demikian $a_2j + kb_2 + jk \in I$. Maka dari itu $a_1b_1 \in (a_2b_2)+I$ (hal ini juga berarti bahwa $a_1b_1 \sim a_2b_2$) dan dengan menggunakan Teorema 3.1.2 didapat $(a_1b_1)+I = (a_2b_2)+I$. Jadi perkalian pada himpunan dari elemen koset dari I terdefinisi secara baik.
($\Leftarrow$) Asumsikan operasi perkalian koset terdefinisi secara baik. Dibutuhkan untuk membuktikan bahwa untuksemua $r \in R$ dan $x \in I$ berlaku $rx \in I$ dan $xr \in I$. Untuk hal demikian, misalkan $r \in R$ dan $x \in I$. Karena $x \in I$, dengan menggunakan Teorema 3.1.2 didapat $x+I = 0_R+I$. Akibatnya
$$rx + I = (r+I)(x+I) = (r+I)(0_R+I) = 0_R + I = I.$$
Lagi dengan menggunakan Teorema 3.1.2 terlihat bahwa $rx \in I$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $xr \in I$. Dengan demikian I adalah suatu daerah integral dalam R.

Teorema 8.2.1 Misalkan I adalah suatu ideal dalam suatu ring R. Maka R/I adalah suatu ring terhadap operasi yang didefiniskan oleh
$$(1)\ \ (a+I)+(b+I) = (a+b)+I \quad \text{dan} \quad (2)\ \ (a+I).(b+I) = (ab)+I,$$
untuk semua $a+I, b+I \in R/I$.

Bukti

(1) Sudah ditunjukkan bahwa R/I berdasarkan Teorema 3.4.1 dan Proposisi 3.4.1 bagian (3), R/I adalah suatu grup komutatif terhadap operasi tambah pada koset di R/I.

(2) Berdasarkan Lemma 8.2.1 perkalian koset terdefinisi secara baik dan dengan definisi ini operasi perkalian tertutup.

(3) Untuk sebarang $a+I, b+I, c+I \in R/I$, dengan menggunakan fakta bahwa perkalian dalam R adalah asosiatif, didapat

$$\begin{aligned}[(a+I)(b+I)](c+I) &= ((ab)+I)(c+I)\\ &= (ab)c+I\\ &= a(bc)+I\\ &= (a+I)((bc)+I)\\ &= (a+I)[(b+I)(c+I)].\end{aligned}$$

Jadi perkalian dalam R/I adalah asosiatif.

(4) Sifat distributif dalam R/I juga dipenuhi dan pembuktian bisa digunakan sebagai latihan. ✓

Definisi 8.2.2 Misalkan I adalah suatu ideal dalam suatu ring R. Maka R/I terhadap operasi yang telah diberikan dalam Teorema 8.2.1 dinamakan **ring kuasi** dari R oleh I. ✓

Proposisi berikut sebagai akibat langsung dari Definisi 8.2.2 dalam ring kuasi R/I berkaitan dengan operasi perkalian.

Proposisi 8.2.3 Misalkan I adalah suatu ideal dalam suatu ring komutatif R dengan elemen satuan 1_R. Maka R/I adalah suatu ring komutatif dengan elemen satuan 1_R+I.

Bukti Sudah ditunjukkan bahwa dalam Teorema 8.2.1 R/I terhadap operasi tambah dan perkalian pada koset di R/I adalah suatu ring. Karena R suatu ring komutatif, maka untuk sebarang $a+I, b+I \in R/I$ didapat

$$(a+I)(b+I) = (ab)+I = (ba)+I = (b+I)(a+I).$$

Hal ini menunjukkan bahwa R/I adalah suatu ring komutatif. Karena 1_R adalah elemen satuan di R dan R/I adalah suatu ring komutatif, maka untuk semua $a+I \in R/I$ didapat

$$(1_R+I)(a+I) = (1_R.a)+I = a+I$$

dan

$$(a+I)(1_R+I) = (a.1_R)+I = a+I.$$

Hal ini menunjukkan bahwa 1_R+I adalah elemen satuan di R/I. Dengan demikian maka R/I adalah suatu ring komutatif dengan elemen satuan 1_R+I. ✓

Berikut ini diberikan teorema berkaitan dengan isomorpisma ring.

Teorema 8.2.2 *(Teorema Isomorpisma Pertama Untuk Ring)* Misalkan $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring dengan kernel $K = \ker(\phi)$. Maka $R/K \cong \phi(R)$.

Bukti Juga karena $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma grup terhadap operasi "+", maka pemetaan $\chi : R/K \to \phi(R)$ didefinisikan oleh $\chi(a+K) = \phi(a)$ adalah suatu pemetaan isomorpisma grup (Torema 3.4.2). Selanjutnya hanya dibutuhkan bahwa pemetaan χ adalah suatu homomorpisma ring dengan kata lain bahwa diselidiki terhadap operasi "perkalian". Misalkan $a + K$ dan $b + K$ adalah sebarang elemen di R/K dan karena ϕ adalah suatu homomorpisma ring maka didapat

$$\chi[(a+K)(b+K)] = \chi(ab+K) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \chi(a+K)\chi(b+K).$$

dengan demikian lengkap sudah bukti. ✓

Teorema 8.2.3 Diberikan suatu ring R dan suatu ideal K di R, ada suatu homomorpisma pada $\phi : R \to R/K$ dengan $\ker(\phi) = K$.

Bukti Digunakan Teorema 3.4.3, maka pemetaan $\phi : R \to R/K$ yang didefinisikan oleh $\phi(a) = a+K$ adalah suatu homomorpisma grup terhadap operasi "+" dengan $\ker(\phi) = K$. Selanjutnya tinggal hanya menyelidiki terhadap operasi perkalian. Misalkan sebarang $a, b \in R$, maka

$$\phi(ab) = ab + K = (a+K)(b+K) = \phi(a)\phi(b).$$

Terlihat bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma ring. Terakhir, dengan menggunakan Teorema 8.2.2 maka ϕ adalah pemetaan pada. ✓

Teorema berikut menunjukkan bahwa suatu homomorpisma ring mempertahan ideal.

Teorema 8.2.4 Misalkan bahwa $\phi : R \to R'$ adalah suatu homomorpisma ring. Maka

(1) Bila I adalah suatu idealdi R, maka $\phi(I)$ adalah suatu ideal di $\phi(R)$.

(2) Bila J adalah suatu ideal di R', maka $\phi^{-1}(J) = \{r \in R \,|\, \phi(r) \in J\}$ adalah suatu ideal di R dengan $\ker(\phi) \subseteq \phi^{-1}(J)$.

Bukti Latihan. ✓

Bila Toerama 8.2.4 digunakan pada homomorpisma $\phi : R \to R/K$ sebagaimana didefinisikan dalam Teorema 8.2.3, maka terdapat korespondensi diantara ideal di R/K dengan ideal di R yang memuat K.

Proposisi 8.2.4 Misalkan K adalah suatu ideal dalam suatu ring R. Maka

(1) Diberikan suatu ideal I di R dengan $K \subseteq I$, maka $I^* = I/K = \{a + K \,|\, a \in I\}$ adalah suatu ideal di R/K.

(2) Diberikan suatu ideal J^* di R/K, maka ada suatu ideal J di R dengan $K \subseteq J$ yang memenuhi $J^* = J/K = \{a + K \,|\, a \in J\}$.

(3) Diberikan ideal I dan J di R keduanya memuat K, maka $I \subseteq J$ bila dan hanya bila $I/K \subseteq J/K$.

Bukti
Bukti (1) dan (2) langsung dari Teorema 8.2.4 dan Teorema 8.2.3.
(3) Bila $I \subseteq J$, maka

$$I/K = \{a + K \,|\, a \in I\} \subseteq \{a + K \,|\, a \in J\} = J/K.$$

Bila $I/K \subseteq J/K$, maka untuk sebarang $a \in I$ didapat $a + K \in I/K$ dengan demikian $a + K \in J/K$. Jadi $a + K = b + K$ untuk beberapa $b \in J$. Karena $a \in a + K$, maka $a \in b + K$. Jadi $a = b + k$ untuk beberapa $k \in K$. Karena $K \subseteq J$, maka $k \in J$ dan $b + k \in J$. Jadi $a \in J$, hal ini menunjukkan bahwa $I \subseteq J$.

Contoh 8.2.9 Dalam $\mathbb{Z}$ diberikan dua ideal $5\mathbb{Z}$ dan $6\mathbb{Z}$, maka dengan menggunakan Lemma Euclide 1.3.2 bila b dan c adalah bilangan bulat yang memenuhi $bc \in 5\mathbb{Z}$, maka $5|b$ dalam hal ini $b \in 5\mathbb{Z}$ atau $5|c$ dan dalam hal ini $c \in 5\mathbb{Z}$. Dilain pihak, dapat dipilih bilangan bulat x dan y yang memenuhi $x \notin 6\mathbb{Z}$ dan $y \notin 6\mathbb{Z}$ tetapi $xy \in 6\mathbb{Z}$, misalnya $x = 4$ dan $y = 9$.Perlu diperhatikan bahwa homomorpisma ring $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ yang didefinisikan oleh $\phi(x) = [x]_n$, maka $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. Jadi $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ adalah daerah integral, sedangkan $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ adalah ring yang mempunyai pembagi nol. Selanjutnya tinjau dua ideal $5\mathbb{Z}$ dan $6\mathbb{Z}$. Catatan bahwa $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ dimana $6\mathbb{Z} \neq 3\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$. Misalkan bahwa J adalah suatu ideal dimana $5\mathbb{Z} \subseteq J \subseteq \mathbb{Z}$. Pilih suatu bilangan bulat n yang memenuhi $J = n\mathbb{Z}$. Karena $5\mathbb{Z} \subseteq J = n\mathbb{Z}$, maka $5 \in n\mathbb{Z}$ atau $5 = nk$ untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini memberikan $n = 5$ dan $k = 1$, sehingga didapat $5\mathbb{Z} = J$ atau $n = 1$ dan $k = 5$ dalam hal ini $J = \mathbb{Z}$.

Contoh 8.2.9 memberikan penjelasan dari bahasan berikut berkaitan dengan dua macam ideal yang khusus.

Definisi 8.2.3 Suatu ideal sejati taktrivial $I \neq R$ dalam suatu ring komutatif R dinamakan suatu ***ideal prima*** bila $ab \in I$ berakibat bahwa $a \in I$ atau $b \in I$ untuk semua a dan b di R.

Definisi 8.2.4 Suatu ideal sejati taktrivial $I \neq R$ dalam suatu ring komutatif R dinamakan suatu ***ideal maximal*** bila hanya ideal J di R yang memenuhi $I \subseteq J \subseteq R$, maka $J = I$ atau $J = R$.

Dalam Contoh 8.2.9, maka ideal $5\mathbb{Z}$ dalam $\mathbb{Z}$ adalah ideal prima sekaligus ideal maksimal. Sedangkan ideal $6\mathbb{Z}$ bukan keduanya.

Contoh 8.2.10 Dalam ring $\mathbb{Z}$ ideal I adalah suatu ideal prima bila dan hanya bila $I = p\mathbb{Z}$, dimana p adalah suatu bilangan bulat prima. Bila p adalah suatu bilangan bulat prima dan $ab \in p\mathbb{Z}$, maka dengan menggunakan Lemma Euclide 1.3.2 didapat $a \in p\mathbb{Z}$ atau $b \in p\mathbb{Z}$. Jadi $I = p\mathbb{Z}$ adalah ideal prima dalam $\mathbb{Z}$. Sebaliknya, bila $I = n\mathbb{Z}$ dimana $n > 1$ bukan suatu ideal prima, maka $n = uv$ untuk beberapa bilangan positip $u, v < n$. Jadi $uv \in n\mathbb{Z}$ sedangkan $u \notin n\mathbb{Z}$ dan $v \notin n\mathbb{Z}$. Dengan demikian $n\mathbb{Z}$ bukan suatu idealprima.

Contoh 8.2.11 Dalam ring $\mathbb{Z}$ ideal I adalah suatu ideal maximal bila dan hanya bila I ideal prima. Bila $I = p\mathbb{Z}$ adalah ideal prima dan $p\mathbb{Z} = I \subseteq r\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, maka $p = rk$ untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$. Didapat $r = p$ dan $k = 1$, maka $r\mathbb{Z} = p\mathbb{Z} = I$ atau $r = 1$ dan $k = p$, dalam hal ini $r\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan bahwa $I = p\mathbb{Z}$ adalah ideal maksimal. Sebaliknya, bila $I = n\mathbb{Z},\ n > 1$ bukan suatu ideal prima, maka n bukan bilangan bulat prima. Jadi $n = uv$ untuk beberapa bilangan bulat positip u, v dimana $1 < u < n$ dan $1 < v < n$. Maka $I = n\mathbb{Z} \subset u\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, dimana $n\mathbb{Z} \neq u\mathbb{Z}$ (sebab $u < n$) dan $u\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ (sebab $1 < u$). Jadi $I = n\mathbb{Z}$ bukan ideal maksimal.

Contoh 8.2.12 Contoh ini menjelaskan bahwa ideal prima dan ideal maksimal tidak selalu sama. Dalam ring $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tinjau ideal

$$I = \mathbb{Z} \times \{0\} = \{(n, 0) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diberikan sebarang $x = (n_1, m_1)$ dan $y = (n_2, m_2)$ elemen di R yang memenuhi $xy \in I$. Maka

$$(n_1 n_2, m_1 m_2) = (n_1, m_1)(n_2, m_2) = xy \in I,$$

akibatnya $m_1 m_2 = 0$. Tetapi, karena $\mathbb{Z}$ tidak memuat pembagi nol maka $m_1 = 0$, jadi $x = (n_1, 0) \in I$ atau $m_2 = 0$ jadi $y = (n_2, 0) \in I$. Dengan demikian I adalah ideal prima, tetapi bukan ideal maksimal sebab

$$I = \mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = R,$$

dimana $\mathbb{Z} \times \{0\} \neq \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sedangkan $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ adalah suatu ideal di R.

Pentingnya pengertian ideal prima dan ideal maksimal menjadi jelas dalam teorema berikut.

Teorema 8.2.5 Misalkan R adalah suatu ring komutatif disertai elemen satuan dan I adalah suatu ideal di R. Maka

(1) I adalah ideal prima di R bila dan hanya bila R/I adalah suatu daerah integral,

(2) I adalah ideal maksimal bila dan hanya bila R/I adalah suatu lapangan.

Bukti Dari informasi Teorema 8.2.1 dan Proposisi 8.2.3 R/I adalah suatu ring komutatif disertai elemen satuan.

(1) Maka R/I adalah suatu daerah integral bila dan hanya bila R/I tidak memuat pembagi nol. Kondisi ini ekivalen dengan kondisi bahwa

$$(a+I)(b+I)=I$$

bila dan hanya bila $a+I=I$ atau $b+I=I$. Jadi R/I adalah suatu daerah integral bila dan hanya bila $ab+I=I$ berakibat bahwa $a+I=I$ atau $b+I=I$. Dengan kata lain bila dan hanya bila $ab\in I$ berakibat bahwa $a\in I$ atau $b\in I$ yang artinya bahwa I adalah suatu ideal prima.

(2) Dengan menggunakan Proposisi 8.2.2 maka R/I adalah suatu lapangan bila dan hanya bila ideal di R/I adalah $\{0\}=I$ dan R/I sendiri. Misalkan R/I adalah suatu lapangan dan tinjau sebarang ideal J di R yang memenuhi $I\subseteq J\subseteq R$. Dengan menggunakan Proposisi 8.2.4 maka, $\{0\}\subseteq J/I\subseteq R/I$ dan J/I adalah suatu ideal di R/I. Jadi $J/I=\{0\}$ dalam hal ini $J=I$, atau $J/I=R/I$ dalam kasus ini $J=R$. Jadi I adalah ideal maksimal. Sebaliknya, misalkan bahwa I adalah ideal maksimal di R dan tinjau sebarang ideal J^* di R/I. Lagi gunakan Proposisi 8.2.4 maka, $J^*=J/I$ untuk beberapa ideal J di R yang memenuhi $I\subseteq J\subseteq R$. Karena I adalah suatu ideal maksimal maka $J=I$ dalam kasus ini $J^*=\{0\}$ atau $J=R$ dalam kasus ini $J^*=R/I$. Jadi R/I adalah suatu lapangan. ✓

Kesimpulan 8.2.2 Dalam suatu ring komutatif disertai elemen satuan, setiap ideal maksimal adalah ideal prima.

Bukti Bila I adalah suatu ideal maksimal di R, maka R/I adalah suatu lapangan. Setiap lapangan adalah suatu daerah integral, jadi R/I adalah daerah integral. Dengan demikian I adalah suatu ideal prima. ✓

Contoh 8.2.13 Misalkan $\phi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ adalah suatu ring homorpisma didefinisikan oleh $\phi(m,n)=n,\ \ \forall(m.n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Maka $\ker(\phi)=\mathbb{Z}\times\{0\}$ dan dengan menggunakan Teorema 8.2.2 didapat

$$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}\times\{0\})\cong\mathbb{Z}$$

yang merupakan daerah integral, tetapi bukan suatu lapangan. Hal ini sesuai dengan bahasan dalam Contoh 8.2.12 bahwa $\mathbb{Z}\times\{0\}$ adalah suatu ideal prima tetapi bukan suatu ideal maksimal. ●

Contoh 8.2.14 Misalkan $\phi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$ adalah homomorpisma ring didefinisikan oleh

$$\phi(m,n)=[n]_3,\ \ \forall(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

Maka $\ker(\phi)=\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z}$ dan $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_3$ yang mana adalah suatu lapangan. Jadi $\mathbb{Z}\times 3\mathbb{Z}$ adalah suatu ideal maksimal di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. ●

Teorema 8.2.5 memberikan suatu korespondensi diantara ideal-ideal prima atau ideal-ideal maksimal. Disamping itu juga, ring-ring kuasi yang merupakan daerah integral atau lapangan. Dalam bab berikutnya, teorema tersebut terlihat sangat penting sebagai dasar untuk pengkonstruksian contoh-contoh baru dari daerah integral dan lapangan.

Latihan

8.3 Lapangan dari Kuasi

Ring dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah contoh dasar dari suatu daerah integral yang bukan lapangan. Hanya elemen -1 dan 1 yang merupakan elemen unit dalam $\mathbb{Z}$. Apapun itu, diketahui bahwa invers terhadap perkalian dari elemen-elemen bilangan bulat taknol yang lain ada diluar $\mathbb{Z}$ yaitu elemen-elemen di $\mathbb{Q}$ yang merupakan lapangan dari himpunan bilangan rasional. Dalam bagian ini dibahas hubungan yang mirip diantara $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$. Diamati pengkonstruksian $\mathbb{Q}$ dari $\mathbb{Z}$ yang merupakan fakta bahwa $\mathbb{Z}$ adalah daerah integral. Pengamatan ini mengijinkan untuk mengkonstruksi suatu lapangan melalui sebarang daerah integral sebagai mana cara lapangan $\mathbb{Q}$ dikonstruksi melalui $\mathbb{Z}$.

Contoh 8.3.1 Dibahas pengkonstruksian lapangan dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dari ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Untuk memulainya, ditinjau himpunan semua ungkapan pecahan S dari pembilang dan penyebut yang merupakan bilangan bulat:

$$S = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0 \right\}.$$

Untuk memperoleh semua bilangan rasional dari S dibutuhkan perhitungan fakta bahwa suatu bilangan rasional dapat disajikan oleh banyak pecahan yang berbeda. Misalnya

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} \cdots$$

Perlu diperhatikan bahwa kondisi $a/b = c/d$ adalah ekivalen dengan $ad = bc$.

(1) Pada himpunan S, didefinisikan suatu relasi "$\sim$" oleh

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \qquad \text{bila dan hanya bila} \qquad ad = bc.$$

Dapat ditunjukkan bahwa relasi "$\sim$" adalah suatu relasi ekivalen sebagaimana berikut.

(i) Karena $ab = ba$, maka $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$.

(ii) Bila $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, maka $ad = bc$. Hal ini berkibat bahwa $cb = da$, jadi $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.

(iii) Bila

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \qquad \text{dan} \qquad \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f},$$

maka $ad = bc$ dan $cf = de$. Hal ini berakibat bahwa

$$0 = bcf - bcf = (ad)f - b(ed) = (af - be)d$$

Karena $d \neq 0$ dan $\mathbb{Z}$ tidak memuat pembagi nol, maka $af = be$ atau $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$. Terlihat bahwa "$\sim$" adalah relasi ekivalen.

Ketika ditulis bilangan rasional 1/2 apa yang dimaksud dengan klas ekivalen [1/2] dan dengan cara yang sama untuk bilangan rasioanl lainnya, misalnya

$$\left[\frac{3}{5}\right] = \left\{ \frac{3k}{5k} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\}.$$

Dengan demikian himpunan semua bilangan rasional dapat digambarkan sebagai himpunan klas ekivalen

$$\mathbb{Q} = \left\{ [\frac{a}{b}] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

(2) Operasi pada $\mathbb{Q}$ diberikan sebagai berikut

$$[\frac{a}{b}] + [\frac{c}{d}] = [\frac{ad+bc}{bd}] \qquad \text{dan} \qquad [\frac{a}{b}].[\frac{c}{d}] = [\frac{ac}{bd}].$$

Operasi yang diberikan adalah terdefinisi secara baik (well defined). Dengan kata lain operasi tersebut hasilnya adalah bebas dari pilihan penyajian yang diberikan dalam klas ekivalen dan untuk memudahkan pengoperasiannya penulisan $[\frac{a}{b}]$ ditulis sebegai $\frac{a}{b}$. Bila

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \text{dan} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'},$$

maka $ab' = a'b$ dan $cd' = c'd$. Didapat

$$\begin{aligned}(ad+bc)(b'd') &= (ab')dd' + bb'(cd')\\ &= (a'b)dd' + bb'(c'd)\\ &= (a'd' + b'c')(bd)\\ &= (bd)(a'd' + b'c').\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} = \frac{a'}{b'} + \frac{b'}{d'},$$

dengan demikian menunjukkan bahwa operasi penjumlahan adalah well defined. Juga didapat $acb'd' = a'c'bd$ atau $\frac{ac}{bd} \sim \frac{a'c'}{b'd'}$. Terlihat bahwa perkalian juga well defined.

(3) Elemen nol di $\mathbb{Q}$ adalah $[\frac{0}{b}]$ atau ditulis $\frac{0}{b}$ dengan $0 \neq b \in \mathbb{Z}$ dan invers dari $\frac{a}{b}$ terhadap operasi "tambah" adalah $-\frac{a}{b}$. Elemen satuan di $\mathbb{Q}$ adalah $\frac{a}{a}$ untuk $a \neq 0$ dan untuk $a \neq 0$ invers dari $\frac{a}{b}$ terhadap operasi "perkalian" adalah $\frac{b}{a}$. Ring $\mathbb{Z}$ isomorpik dengan subring dari $\mathbb{Q}$ yang mempunyai elemen-elemen berbentuk $\frac{a}{1}$ untuk $s \in \mathbb{Z}$. ●

Pembahasan mengenai lapangan $\mathbb{Q}$ merupakan suatu petunjuk untuk pengkosntruksian suatu lapangan yang demikian melalui sebarang daerah integral.

Lemma 8.3.1 Misalkan D adalah suatu daerah integral dan misalkan

$$S = \{(a, b) \,|\, a, b \in D, b \neq 0\}.$$

Didefinisikan suatu relasi pada S oleh

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad \text{bila dan hanya bila} \qquad ad = bc.$$

Maka $\sim$ adalah suatu relasi ekivalen.

Bukti

(1) (**Refleksif**) $(a, b) \sim (a, b)$ sebab $ab = ba$ hal ini karena D adalah ring komutatif.

(2) (**Simetri**) Bila $(a, b) \sim (c, d)$, maka $ad = bc$ yang berakibat bahwa $cd = da$ karena D adalah ring komutatif. Dengan demikian $(c, d) \sim (a, b)$.

(3) (**Transitif**) Bila $(a, b) \sim (c, d)$ dan $(c, d) \sim (e, f)$, maka $ad = bc$ dan $cf = de$. Jadi, $adf = bcf = bde$ dan karena perkalian adalah komutatif, maka $(af)d = (be)d$. Karena $(c, d) \sim S$ dan $d \neq 0$, juga D adalah daerah integral yaitu tidak memuat pembagi nol maka didapat $af = be$. Dengan demikian $(a, b) \sim (e, f)$. ✓

Catatan bahwa fakta D adalah suatu ring komutatif dan tidak mempunyai pembagi nol digunakan untuk membuktikan bahwa $\sim$ adalah relasi ekivalen. Relasi ekivalen $\sim$ mempartisi himpunan S kedalam klas ekivalen yang saling asing. Seperti halnya pembahasan lapangan pecahan $\mathbb{Q}$, untuk menjadikan notasi lebih intuitif, maka sebarang elemen $(a, b) \in S$ klas ekivalenya adalah $[(a, b)]$ dinotasikan oleh $\frac{a}{b}$. Sehingga didapat

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{bila dan hanya bila} \quad ad = bc.$$

Selanjutnya ditinjau himpunan

$$F = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in D, b \neq 0 \right\}.$$

Agar supaya himpunan F adalah suatu lapangan, didefinisikan dua operasi dalam F.

Lemma 8.3.2 Untuk sebarang elemen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$ dua operasi yang didefinisikan berikut adalah ekivalen:

(1) **Penjumlahan**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ad + bc}{bd}.$$

(2) **Perkalian**

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ac}{bd}.$$

Bukti Perluh diingat bahwa $ad + bc$ dan ac keduanya di D dan karena D adalah suatu daerah integral dan $b \neq 0, d \neq 0$, maka $bd \neq 0$. Jadi masing-masing bagian kanan persamaan dalam (1) dan (2) adalah suatu elemen di F.

(1) Misalkan $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ dan $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Untuk menunjukkan bahwa **penjumlahan** adalah well defined, perlu ditunjukkan bahwa

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

atau dengan kata lain

$$b'd'(ad+bc) = bd(a'd'+b'c').$$

Karena $ab' = a'b$ dan $cd' = c'd$ dan menggunakan fakta bahwa D adalah suatu ring komutatif didapat

$$\begin{aligned} b'd'(ad+bc) &= (b'd')ad + (b'd')bc \\ &= (ab')d'd + (cd')b'b \\ &= (a'b)d'd + (c'd)b'b \\ &= (bd)a'd' + (bd)c'b' \\ &= bd(a'd' + c'b'). \end{aligned}$$

Terlihat bahwa menghasilkan sesuai yang diharapkan.

(2) Misalkan bahwa $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ dan $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Untuk menunjukkan bahwa **perkalian** adalah well defined perlu ditunjukkan bahwa

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'},$$

atau dengan kata lain,

$$(b'd')(ac) = (bd)(a'c').$$

Karena $ab' = a'b$ dan $cd' = c'd$ dan dengan menggunakan fakta bahwa D adalah ring komutatif didapat

$$\begin{aligned} (b'd')(ac) &= (ab')(cd') \\ &= (a'b)(cd') \\ &= (a'b)(c'd) \\ &= (bd)(a'c'). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lemma 8.3.2 menjelaskan bahwa dua operasi **penjumlhan** dan **perkalian** dalam F adalah well defined. Berkutnya ditunjukkan bahwa F dengan dua operasi tersebut adalah suatu lapangan.

Lemma 8.3.3 Himpunan F sebagaimana telah didefinisikan sebelumnya adalah suatu lapangan terhadap operasi **penjumlahan** dan **perkalian**.

Bukti

(1) Penjumlhan di F adalah assosiatif:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b}+\frac{cf+ed}{df}\\ &= \frac{a(df)+(cf+ed)b}{b(df)}\\ &= \frac{(ad+cb)f+e(db)}{(bd)f}\\ &= \frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}\\ &= \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}.\end{aligned}$$

(2) Penjumlahan di F adalah komutatif:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

(3) Elemen $\frac{0}{1}$ adalah elemen nol terhadap penjumlahan:

$$\frac{0}{1}+\frac{a}{b}=\frac{0.b+a.1}{1.b}=\frac{a}{b}=\frac{a.1+0.b}{1.b}=\frac{a}{b}+\frac{0}{1}.$$

Catatan bahwa $\frac{0}{1}=\frac{0}{c}$ untuk semua $c\neq 0$.

(4) Elemen invers dari $\frac{a}{b}$ terhadap penjumlahan adalah $-\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab-ba}{b.b}=\frac{0}{bb}=\frac{0}{1}.$$

Terlihat bahwa F adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Lima sifat berikutnya ini dapat dibuktikan sebagai latihan.

(5) Perkalian dalam F adalah assosiatif.

(6) Hukum distributif dipenuhi dalam F.

(7) Perkalian dalam F adalah komutatif.

(8) Elemen $\frac{1}{1}$ adalah elemen identitas terhadap perkalian. Catatan bahwa $\frac{1}{1}=\frac{a}{a}$ untuk semua $a\neq 0$.

(9) Bila $\frac{a}{b}\neq 0$ di F, maka $a\neq 0$ di D dan $\frac{b}{a}$ adalah invers dari $\frac{a}{b}$ terhadap operasi perkalian. ✓

Lemma 8.3.4 Himpunan $D'=\left\{\frac{a}{1}\,|\,a\in D\right\}$ adalah subring dari F dengan $D'\cong D$.

Bukti Karena $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \in D'$ dan $\frac{a}{1}\frac{b}{1} = \frac{ab}{1} \in D'$, maka D' adalah subring dari F. Misalkan $\phi : D \to D'$ didefinisikan oleh $\phi(a) = \frac{a}{1}$, $\forall a \in D$. Maka

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \phi(a) + \phi(b)\\ \phi(ab) &= \frac{ab}{1} = \frac{a}{1}\frac{b}{1} = \phi(a)\phi(b).\end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah suatu homomorpisma ring. Pemetaan ϕ jelas pada dan satu-satu. Sebab, $\phi(a) = \phi(b)$ berarti bahwa $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$, maka $a.1 = 1.b$ dan $a = b$. Jadi ϕ adalah suatu isomorpisma ring. ✓

Teorema 8.3.1 ***(Existence dari lapangan pecahan)*** Misalkan D adalah suatu daerah integral. Maka ada suatu lapangan F yang berisi pecahan $\frac{a}{b}$ dimana $a, b \in D$ dan $b \neq 0$. Lagipula, dapat diidentifikasi setiap elemen $a \in D$ dengan elemen $\frac{a}{1} \in F$, maka D menjadi suatu subring dari F dan masing-masing elemen dari F mempunyai bentuk $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ dimana $a, b \in D$ dan $b \neq 0$.

Bukti Suatu yang hanya belum ditunjukkan adalah untuk semua $\frac{a}{b} \in F$ didapat $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Tetapi hal ini jelas, sebab

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1}.\frac{1}{b} = \frac{a}{1}.\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}.$$

Jadi bila diidentifikasi setiap elemen $x \in D$ dengan $\frac{x}{1} \in F$, didapat $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. ✓

Definisi 8.3.1 Sebarang lapangan F dalam Teorema 8.3.1 dinamakan **lapangan pecahan** dari daerah integral D. ✓

Dari pengkonstruksian lapangan kuasi F dapat terlihat bahwa F terdiri dari elemen-elemen asli dari D, elemen-elemen invers dari D terhadap perkalian dan hasil perkalian elemen-elemen dari D dengan elemen-elemen invers dari D terhadap perkalian. Dengan kata lain, F diperoleh melalui menambahkan minimum kebutuhan mutlak untuk memperluas D menjadi suatu lapangan. Teorema berikut bahkan menunjukkan bahwa F adalah lapangan terkecil yang memuat D dan bahwa sebarang dua lapangan pecahan dari D harus isomorpik.

Teorema 8.3.2 Misalkan F adalahlapangan pecahan dari suatu daerah integral D dan E adalah sebarang lapangan yang memuat D. Maka ada suatu homomorpisma ring $\phi : F \to E$ yang memenuhi ϕ adalah pemetaan satu-satu dan $\phi(a) = a$ untuk semua $a \in D$.

Bukti Definisikan ϕ sebagai berikut. Untuk sebarang $a \in D$, misalkan $\phi(a) = a$ dan untuk sebarang $ab^{-1} \in F$, misalkan

$$\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} \in E.$$

Catatan bahwa karena $b \neq 0$ di D, maka $\phi(b) = b \neq 0$ di E. Pemetaan ϕ adalah well defined, sebab bila $ab^{-1} = cd^{-1}$ di F, maka $ad = bc$ di D dan karena ϕ adalah pemetaan identitas pada D, di D maka

$$\phi(a)\phi(d) = ad = bc = \phi(b)\phi(c) \in E.$$

Dapat diselidiki bahwa ϕ adalah suatu homomorpisma ring. Pemetaan ϕ adalah satu-satu, sebab bila $\phi(ab^{-1}) = \phi(cd^{-1})$ maka

$$\phi(a)\phi(d) = \phi(b)\phi(c) \in E$$

jadi $ad = bc$. Akibatnya $ab^{-1} = cd^{-1}$ di F.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr, dash] & \phi(F) \arrow[d, dash] \\
 & D
\end{tikzcd}$$

Catatan bahwa dalam bukti teorema yang baru saja dibahas, setiap elemen dari sublapangan $\phi(F) \subseteq E$ mempunyai bentuk $\phi(a)\phi(b)^{-1}$, yaitu adalah suatu elemen pecahan dari D di E.

Kesimpulan 8.3.1 Setiap lapangan yang memuat daerah integral D memuat suatu lapangan pecahan dari D.

Bukti Langsung dari hasil Teorema 8.3.2 dan dari beberapa catatan.

Kesimpulan 8.3.2 (**Ketunggalan dari Lapangan Pecahan**) Sebarang dua lapangan pecahan dari suatu daerah integral D adalah isomorpik.

Bukti Misalkan F dan F' adalah dua lapangan pecahan dari daerah integral D. Hal ini berarti bahwa, setiap elemen dari F' berbentuk $ab^{-1} \in F'$ untuk $a, b \in D$ dengan $b \neq 0$. Oleh karena itu, $F' = \phi(F)$ dimana ϕ sebagaimana diberikan dalam bukti Teorema 8.3.2. Jadi $F' \cong F$.

Diringkas apa yang baru saja telah dibahas tersebut tentang lapangan pecahan F dari suatu daerah integral D.
Misalkan D suatu daerah integral. Maka

(1) Lapangan pecahan F dari D adalah **ada** .

(2) Lapangan pecahan F dari D adalah tunggal dalam arti isomorpik.

(3) Himpunan $F = \{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in D, b \neq 0\}$.

(4) Bila E adalah suatu lapangan yang memuat D yatitu $D \subseteq E$, maka ada suatu sub-lapangan $F' \subseteq E$ dengan $F \cong F'$. Hal ini menyatakan bahwa F adalah lapangan terkecil yang memuat D.

Untuk mengakhiri sub-bagian ini, dibicarakan lagi konsep karakteristik dari suatu daerah integral yang telah dibahas. Sudah dikembangkan beberapa alat baru yang mengijikan untuk menghargai pentingnya karakteristik. Ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah prima merupakan lapangan terkecil dari karakteristiknya. Sebagaimana nantinya dalam bagian berikutnya ditunjukkan bahwa, sebarang lapangan yang lain adalah suatu perluasan dari lapangan-lapangan terkecil tersebut.

Teorema 8.3.3 Misalkan D adalah suatu daerah integral. Ada suatu sub-daerah $D' \subseteq D$ yang memenuhi

(1) bila $\mathrm{kar}(D) = 0$, maka $\mathbb{Z} \cong D' \subseteq D$.

(2) Bila $\mathrm{kar}(D) = p$, maka $\mathbb{Z}_p \cong D' \subseteq D$.

Bukti Misalkan $D' = \{m.1' \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$ dimana $1'$ adalah elemen satuan di D' dan tinjau pemetaan $\phi : \mathbb{Z} \to D'$ didefinisikan oleh $\phi(n) = n.1'$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Pemetaan ϕ adalah suatu homomorpisma ring, sebab

$$\begin{aligned} \phi(n+m) &= (n+m).1' = n.1' + m.1' = \phi(n) + \phi(m) \\ \phi(nm) &= (nm).1' = (nm).(1'.1') = (n.1')(m.1') = \phi(n)\phi(m), \end{aligned}$$

dengan menggunakan Teorema 7.1.1 bagian (6).

(1) Bila $\mathrm{kar}(D) = 0$, maka menggunakan Teorema 7.3.7, untuk semua bilangan bulat positip $m \in \mathbb{Z}$ didapat $m.1' \neq 0$. Dalam hal ini, didapat $\ker(\phi) = \{0\}$ dan ϕ adalah pemetaan satu-satu dan $\mathbb{Z} \cong \phi(\mathbb{Z}) = D' \subseteq D$.

(2) Bila $\mathrm{kar}(D) = p$, lagi gunakan Teorema 7.3.7, maka $|1'| = p$ dan $\ker(\phi) = p\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Jadi, dengan menggnakan Teorema didapat $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \phi(\mathbb{Z}) = D' \subseteq D$, dengan demikian $\mathbb{Z}_p \cong D'$.

Catatan bahwa untuk kasus D' adalah image dari suatu ring terhadap suatu homomorpisma ring dan dengan Proposisi 8.1 bagian (2), maka D' adalah suatu subring dari D. Karena $1' \in D'$, maka dengan menggunakan Proposisi 7.2.1 D' adalah suatu sub-daerah dari D. ✓

Hasil berikut adalah akibat dari teorema yang baru dibahas, merupakan teorema untuk lapangan dan begitu penting.

Teorema 8.3.4 Misalkan F adalah suatu lapangan. Maka ada suatu sub-lapangan $F' \subseteq F$ yang memenuhi:

(1) Bila $\text{kar}(F) = 0$, maka $\mathbb{Q} \cong F' \subset F$.

(2) Bila $\text{kar}(F) = 0$, maka $\mathbb{Z}_p \cong F' \subset F$.

Bukti

(1) Bila $\text{kar}(F) = 0$, maka karena F juga merupakan daerah integral, dengan menggunakan Teorema 8.3.3 didapat $\mathbb{Z} \cong D' = \{n.1' \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq F$, dimana $1'$ elemen satuan di F, D' adalah suatu daerah integral termuat di F, dengan demikian menggunakan Kesimpulan 8.3.1 lapangan F memuat lapangan pecahan F' dari daerah integral D'. Karena $\mathbb{Z} \cong D' \subseteq F$, maka $\mathbb{Q} \cong F' \subset F$.

(2) Hal ini langsung dari Teorema 8.3.3. ✓

Baru saja telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Q}$ adalah lapangan terkecil yang mempunyai karakteristik nol. Dengan kata lain, setiap lapangan berkarakteristik nol memuat suatu sub-lapangan yang isomorpik dengan $\mathbb{Q}$. Dalam hal mempunyai karakteristik p, maka lapangan terkecilnya isomorpik dengan $\mathbb{Z}_p$.

Definisi 8.3.2 Lapangan $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Z}_p$ dinamakan **lapangan prima**. ✓

Dalam pembahasan berikutnya, lapangan prima adalah suatu dasar dari semua lapangan-lapangan yang lainnya dibentuk.

Latihan

Bab 9

Polinomial Ring

Dalam bab ini dibahas polinomial dengan koefisien dalam suatu ring, mengkonstruksi *polinomial ring* $R[x]$ dan membahas sifat-sifatnya. Dalam suatu hal khusus yang penting dimana ring R juga merupakan suatu lapangan F. Polinomial ring $F[x]$ ternyata memiliki banyak sifat yang sama dengan ring himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Misalkan bahwa diberikan dua daerah integral yang keduanya bukan lapangan. Sebagaimana telah diketahui dalam keduanya berlaku algoritma pembagian. Nantinya ditemukan juga bahwa ada kesamaan penting antara ideal di $F[x]$ dan di di $\mathbb{Z}$.

Latihan

9.1 Konsep Dasar dan Notasi

Pada bagian ini dikonstruksi ring polinomial dengan koefisien di suatu ring tetap R dan diberikan beberapa definisi dasar dan sifat. Contoh pertama menggambarkan pentingnya ring R yang mana elemen-elemennya adalah koefisien dari polinomial.

Contoh 9.1.1 Menentukan akar-akar dari suatu polinomial adalah suatu maslah klasik dalam aljabar. Misalnya diberikan polinomial $(x) = x^2 + x + 1$. Jika ditanyakan akar-akar polinomial $f(x)$ pertanyaannya adalah tidak lengkap, sebagai ditujukkan berikut ini:

(1) Bila koefisien dari polinomial adalah di ring himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, maka $f(x)$ tidak memiliki akar riil.

(2) Bila koefisien dari polinomial adalah di ring $\mathbb{Z}_3$, maka $f(x) = x^2 + x + 1 = (x - 1)^2$. Jadi, $f(1) = 0$, dengan demikian hanyalah $1 \in \mathbb{Z}_3$ yang merupakan akar dari $f(x)$.

(3) Bila koefisien dari polinomial adalah di ring $\mathbb{Z}_7$, maka $f(x) = x^2+x+1 = (x-2)(x-4)$. Jadi, $f(2) = 0$ dan $f(4) = 0$, dengan demikian $2, 4 \in \mathbb{Z}_7$ adalah dua akar yang berbeda dari $f(x)$. ●

Jadi ketika bekerja dengan polinomial, harus selalu diperhatikan ring yang digunakan dalam koefisien suatu polinomial.

Contoh 9.1.2 Diberikan polinomial $f(x) = x^2 + 8$.

(1) Polinomial $f(x)$ tidak mempunyai akar-akar di $\mathbb{R}$ hal ini mudah diselidiki.

(2) Dalam $\mathbb{Z}_{11}$, $f(x) = x^2 + 8 = x^2 - 3 = (x-5)(x-6)$ dengan demikian $f(x)$ mempunyai dua akar $5, 6 \in \mathbb{Z}_{11}$.

(3) Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, $f(x) = x^2 + 8 = x^2 - 4 = (x-2)(x-10) = (x-4)(x-8)$ dengan demikian $f(x)$ mempunyai empat akar $2, 10, 4, 8 \in \mathbb{Z}_{12}$.

Berikut ini diberikan definisi polinomial yang berguna untuk pembahasan aksioma ring berikutnya.

Definisi 9.1.1 Misalkan R adalah suatu ring. Suatu **polinomial** dengan koefisien di $\mathbb{R}$ dan peubah (indeterminate) x adalah suatu jumlahan berhingga

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

dimana $a_i \in R$ untuk $i \in \mathbb{Z}$ dengan $0 \leq i \leq n$. Nilai-nilai a_i dinamakan **koefisien** dari polinomial. Dalam hal khusus dimana semua koefisien adalah nol, maka polinomial dinamakan **polinomial nol** dan ditulis $f(x) = 0$. Himpunan semua polinomial dengan koefisien di R dan indetermine x dinotasikan oleh $R[x]$

Dua polinomial tepat sama bila koefisien yang bersesuaian sama yaitu

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m, \end{aligned}$$

maka $f(x) = g(x)$ bila dan hanya bila $a_i = b_i$ untuk semua $i \geq 0$.

Dalam penulisan polinomial, ditulis $a_1 x$ untuk $a_1 x^1$ dan a_0 untuk $a_0 x^0$. Juga, umumnya sebarang $a_i x^i$ yang ada dalam jumlahan dihilangkan bila $a_i = 0$ dan sebarang $a_i x^i$ dengan $a_i = 1$ ditulis x^i begitu juga untuk $a_i x^i$ dengan $a_i = -1$ ditulis $-x^i$. Contoh,

$$f(x) = 1x^3 + (-1)x^2 + 0x^1 + 1x^0 = x^3 - x^2 + 1.$$

Definisi 9.1.2 Misalkan R adalah suatu ring, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ adalah suatu polinomial di $R[x]$ dan b suatu elemen di R. **Nilai** $f(b)$ untuk **argumen** b adalah elemen

$$a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n \in R.$$

Fungsi polinomial ditentukan oleh $f(x)$ adalah fungsi dari R ke R dengan memberikan setiap argumen $b \in R$ ke nilai $f(b)$. Suatu argumen b yang mana nilai $f(b)$ dari polinomial $f(x)$ adalah nol dinamakan suatu **akar** dari polinomial $f(x)$ dan merupakan suatu **penyelesaian** dari **persamaan polinomial** $f(x) = 0$.

Polinomial tidak sama dengan fungsi polinomial. Kususnya dua polinomial tidak sama kecuali semua koefisiennya sama. meskipun bila polinomial-polinomial tersebut adalah fungsi polinomial yang sama. Contoh berikut memberikan gambaran apa yang dibahas.

Contoh 9.1.3 Misalkan $R = \mathbb{Z}_2$. Polinomial $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$ adalah polinomial yang tidak sama. Sebab, f mempunyai koefisien $a_1 = 1, a_0 = 1$ sedangkan g mempunyai koefisien $b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = 1$. Tetapi, dengan mudah didapat $f(0) = 1 = g(0)$ dan $f(1) = 0 = g(1)$. Jadi, f dan g menentukan fungsi polinomial yang sama dari $\mathbb{Z}_2$ ke $\mathbb{Z}_2$. ●

Definisi 9.1.3 Misalkan $f(x)$ adalah suatu polinomial dengan indeterminate x dan koefisien a_i di suatu ring R. Untuk bilangan bulat positip n dengan $a_n \neq 0$ dinamakan derajad dari $f(x)$ ditulis $n = \deg(f(x))$ dan koefisien a_n dinamakan koefisien **utama (leading)**. Perlu diperhatikan bahwa pengertian dari derajad dan koefisien utama tidak terdefinisi untuk hal yang kusus polinomial nol. Bila derajad polinomial adalah nol, maka $f(x) = a_0$ adalah polinomial **konstan**. Setiap $a \in R$ dapat diidentifikasi dengan polinomial $f(x) = a$ dalam hal demikian ini R dapat dipandang sebagai subset dari $R[x]$. Masing-masing polinomial berderajad $1, 2, 3, 4$ dan 5 dinamakan polinomial **linier**, **kuadrat**, **kubik**, **kuartik** dan **kuintik**. Bila koefisien utama adalah 1, maka polinomialnya adalah

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

dan dinamakan polinomial **monik**.

Ditulis sebagai $R[x]$ untuk himpunan dari semua polinomial dalam indetermine dengan koefisien di ring R. Dengan operasi tambah dan perkalian yang sesuai di $R[x]$ dibuat ring $R[x]$. Secara umum tidak dibedakan polinomial konstan a_0 di $R[x]$ dengan elemen a_0 di R, juga tidak dibedakan polinomial nol 0 di $R[x]$ dengan elemen nol 0 di R. Operasi penjumlahan dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sesuai dengan operasi pada R, dengan demikian ring R merupakan subring dari ring $R[x]$.

Definisi 9.1.4 Bila $f(x), g(x) \in R[x]$ dimana $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$, maka didefinisikan jumlahan dan perkalian sebagai berikut:

(1) $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} c_ix^i$, dimana $c_i = a_i + b_i$.

(2) $f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{n+m} d_ix^i$, dimana

$$d_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k} = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0.$$

Contoh 9.1.4 Diberikan $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ dan $g(x) = 5x^2 + 6x + 7$ di $\mathbb{Z}[x]$. Maka $f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{5} d_ix^i$ dimana
$d_0 = 4(7) = 28$
$d_1 = 3(7) + 4(6) = 45$

$d_2 = 2(7) + 3(6) + 4(5) = 52$
$d_3 = 1(7) + 2(6) + 3(5) = 34$
$d_4 = 1(6) + 2(5) = 16$
$d_5 = 1(5) = 5.$
Jadi, perkalian dari $f(x)g(x)$ adalah

$$f(x)g(x) = 5x^5 + 16x^4 + 34x^3 + 52x^2 + 45x + 28.$$

Contoh 9.1.5 Misalkan polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ seperti diberikan dalam Contoh 9.1.4, tetapi sekarang dalam $\mathbb{Z}_{10}[x]$. Maka

$$f(x)g(x) = 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 5x + 8.$$

Menghitung derajad hasil kali dua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$ atau di $\mathbb{C}$ adalah jumlah masing-masing dari derajad polinomial tersebut. Tetapi hal ini tidak selalu benar untuk sebarang polinomial dengan koefisien disebarang ring R. Contoh berikut menjelaskan hal ini.

Contoh 9.1.6 Tinjau polinomial $f(x) = 2x^3$ dan $g(x) = 2x^2$ di $\mathbb{Z}_4[x]$. Maka $f(x)g(x) = 0$ adalah polinomial nol.

Suatu pertanyaan, kapan kita bisa menghitung derajad dari perkalian dua polinomial yang diberikan sama dengan jumlah dari masing-masing derajad dari polinomial tersebut? Dari dua contoh yang baru saja dibahas, dapat diterka jawabannya sebagaimana diberikan dalam bagian terakhir teorema berikut.

Teorema 9.1.1 Misalkan R adalah suatu ring. Maka dengan operasi jumlah dan perkalian sebagaimana telah diberikan dalam Definisi 9.1.4,

(1) $R[x]$ adalah suatu ring yang memuat ring R sebagai suatu subring.

(2) Bila R adalah suatu ring komutatif, maka $R[x]$ adalah ring komutatif.

(3) Bila R mempunyai elemen satuan 1, maka 1 juga merupakan elemen satuan di $R[x]$.

(4) Bila R adalah suatu daerah integral, maka $R[x]$ adalah daerah integral dan hasil perkalian dua polinomial taknol $f(x), g(x) \in R[x]$ memenuhi $\deg(f(x).g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.

Bukti

(1) Operasi Penjumlahan Tertutup, sebab $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ didapat

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} c_i x^i,$$

dimana $c_i = a_i + b_i \in R$. Jadi $f(x) + g(x) \in R[x]$. Penjumlahan di $R[x]$ memenuhi asosiatif sebab

$$\begin{aligned}
(f(x) + g(x)) + h(x) &= \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{m,n,p\}} ((a_i + b_i) + c_i)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{m,n,p\}} (a_i + (b_i + c_i))x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\max\{n,p\}} (c_i + b_i)x^i \\
&= f(x) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \right) \\
&= f(x) + (g(x) + h(x)).
\end{aligned}$$

Ada polinomial nol yaitu $O(x) = \sum_{i=0}^{m} 0\, x^i = 0$ yang memenuhi

$$\begin{aligned}
f(x) + O(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} 0\, x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} (a_i + 0)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = f(x),
\end{aligned}$$

juga

$$\begin{aligned}
O(x) + f(x) &= \sum_{i=0}^{m} 0\, x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} (0 + a_i)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = f(x).
\end{aligned}$$

Untuk setiap $f(x) \in R[x]$ ada invers dari $f(x)$, yaitu $-f(x) = \sum_{i=0}^{m} (-a_i)x^i$ yang memenuhi

$$f(x) + (-f(x)) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} (-a_i)x^i = \sum_{i=0}^{m} (a_i - a_i)x^i = \sum_{i=0}^{m} 0\, x^i = O(x) = 0.$$

Penjumlahan polinomial adalah komutatif,

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i+b_i)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (b_i+a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = g(x)+f(x). \end{aligned}$$

Jadi $R[x]$ terhadap operasi "+" memenuhi aksioma grup komutatif.

Terhadap operasi perkalian di $R[x]$ memenuhi sifat tertutup, sebab

$$f(x).g(x) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m+n} d_i x^i,$$

dimana $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \in R$ sebab $a_i, b_i \in R$. Jadi $f(x).g(x) \in R[x]$. Berikutnya, terhadap perkalian sebagaimana telah didefinisikan di ring $R[x]$ adalah asosiatif. Sifat asosiatif ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (f(x).g(x)).h(x) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)\right]\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right) \\ &= \left[\sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_i - j\right)x^i\right]\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left[\sum_{j=0}^{i}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right)c_{i-j}\right]x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left(\sum_{j+k+l=i} a_j b_k c_l\right)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left[\sum_{j=0}^{i} a_j\left(\sum_{k=0}^{i-j} b_k c_{i-j-k}\right)\right]x^i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left[\sum_{i=0}^{n+p}\left(\sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j}\right)x^i\right] \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\right] \\ &= f(x)[g(x).h(x)]. \end{aligned}$$

Berlaku sifat distributif di $R[x]$,

$$\begin{aligned}
f(x)(g(x)+h(x)) &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left[\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left[\sum_{i=0}^{\max\{n,p\}} (b_i + c_i) x^i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{m+\max\{n,p\}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j (b_{i-j} + c_{i-j})\right) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m+\max\{n,p\}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} + a_j c_{i-j}\right) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) x^i + \sum_{i=0}^{m+p} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j}\right) x^i \\
&= f(x).g(x) + f(x)h(x).
\end{aligned}$$

Selanjutnya dibuat pemetaan inklusi dar ring R ke ring $R[x]$ yaitu $\iota : R \to R[x]$ didefinisikan oleh $\iota(r) = rx^0$, $\forall r \in R$. Ditunjukkan bahwa ι adalah suatu homomorpisma ring.
1. $\iota(r+q) = (r+q)x^0 = rx^0 + qx^0 = \iota(r) + \iota(q)$, $\forall r, q \in R$.
2. $\iota(r.q) = (r.q)x^0 = (r.q)x^{0+0} = (rx^0).(qx^0) = \iota(r).\iota(q)$, $\forall r, q \in R$.

Sebagaimana telah diketahui bahwa image $\iota(R)$ adalah subring dari $R[x]$ dan pemetaan ι adalah pemetaan satu-satu sebab bila $\iota(r) = \iota(q)$, maka $rx^0 = qx^0$. Hal ini berakibat $r = q$. Jadi ι adalah satu-satu. Dengan demikian $R \cong \iota(R)$. Karena $\iota(R)$ adalah subring dari $R[x]$ dan $R \cong \iota(R)$, maka R dapat dipandang sebagi subring dari $R[x]$ dengan identifikasi elemen-elemen di R sebagai elemen-elemen di $\iota(R)$ diberikan oleh $r \mapsto rx^0$.

(2) Bila R adalah ring komutatif, maka untuk sebarang $f(x), g(x)$ di $R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ didapat

$$\begin{aligned}
f(x).g(x) &= \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{i} b_k a_{i-k}\right) x^i \\
&= g(x).f(x).
\end{aligned}$$

Jadi $R[x]$ adalah ring komutatif.

(3) Dari hasil (1) R adalah subring dari $R[x]$. Jadi, bila $1 \in R$ adalah elemen satuan di R, maka $1 = 1.x^0$ dan untuk sebarang $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in R[x]$ didapat

$$1.x^0.f(x) = 1.x^0\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{0+m}(1.a_i)x^i = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = f(x).$$

Juga, didapat

$$f(x).1x^0 = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)1.x^0 = \sum_{i=0}^{m+0}(a_i.1)x^i = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = f(x).$$

Jadi, elemen $1 = 1.x^0$ adalah elemen satuan di $R[x]$.

(4) Misalkan R daerah integral. Diberikan sebarang plinomial tak nol di $R[x]$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m$$

dan

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n,$$

dimana a_m dan b_n adalah koefisien utama dari masing-masing $f(x)$ dan $g(x)$. Jadi $a_m \neq 0$ dan $b_n \neq 0$, akibatnya $a_mb_n \neq 0$ (sebab R daerah integral). Sehingga didapat

$$f(x).h(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_mb_n)x^{m+n},$$

$f(x).g(x) \neq 0$ sebab $a_mb_n \neq 0$. Jadi $R[x]$ adalah daerah integral. Juga, didapat

$$\deg(f(x).g(x)) = m + n = \deg(f(x)) + \deg(g(x)).$$

Contoh 9.1.7 Akan ditentukan semua unit di $\mathbb{Z}_3[x]$. Diberikan sebarang $0 \neq f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ adalah unit di $\mathbb{Z}_3[x]$. Hal ini berarti dapat dipilih suatu $g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ yang memenuhi $f(x).g(x) = 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Dengan menggunakan Teorema 9.1.1 bagian (4), didapat

$$\deg(f(x)) + \deg(g(x)) = \deg(1) = 0.$$

Jadi, $f(x)$ adalah polinomial konstan. Maka dari itu, hanyalah $f(x) = 1$ dan $f(x) = 2$ yang merupakan unit di $\mathbb{Z}_3[x]$.

Proposisi 9.1.1 Misalkan D adalah daerah integral, maka elemen unit di $D[x]$ adalah tepat sama dengan elemen unit di D.

Bukti Misalkan $c \in D$ adalah sebarang unit di D dan $d \in D$ adalah invers dari c terhadap perkalian. Selanjutnya tinjau polinomial konstan $c, d \in D[x]$, maka hasil kali $cd \in D[x]$ adalah sama dengan hasil kali $cd \in D$. Hasil kali c dan d memenuhi $cd = 1$. Hal ini memperlihatkan bahwa $c \in D[x]$ adalah unit di $D[x]$ dan $d \in D[x]$ adalah invers dari c terhadap perkalian. Sebaliknya, bila $f(x)$ adalah sebarang unit di $D[x]$ dan misalkan $g(x) \in D[x]$ adalah invers dari $f(x)$ terhadap perkalian. Maka $f(x).g(x) = 1$, karena 1 berderajad nol, maka menurut Teorema 9.1.1 haruslah $\deg(f(x)) = 0$ dan $\deg(g(x)) = 0$. Jadi $f(x) = c_0$ dan $g(x) = d_0$. Lagipula, c_0 harus merupakan unit di D dengan d_0 adalah invers dari c_0 terhadap perkalian sebab $C_0.d_0 = f(x).g(x) = 1$.

Kesimpulan 9.1.1 Bila F adalah suatu lapangan, maka $F[x]$ adalah daerah integral dan bukan lapangan.

Bukti Karena F lapangan, maka F adalah daerah integral dan berdasarkan Teorema 9.1.1 bagian (4) $F[x]$ adalah daerah integral. Dengan menggunakan Proposisi 9.1.1, semua polinomial konstan taknol di $F[x]$ adalah elemen-elemen taknol yang bukan unit. Jadi $F[x]$ bukan suatu lapangan.

Proposisi 9.1.2 Misalkan R adalah suatu ring. Maka $R[x]$ mempunyai karakteristik sama dengan karakteristik dari R.

Bukti Untuk sebarang bilangan bulat $n > 0$, na adalah $\overbrace{a + a + \cdots + a}^{n}$ dan

$$nf(x) = \overbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}^{n}.$$

Menurut pengertian karakteristik, kar$(R[x])$ adalah bilangan bulat terkecil $n >$ yang memenuhi $nf(x) = 0$ untuk semua $f(x) \in R[x]$ dan bila tidak ada n yang demikian, maka $R[x]$ mempunyai karakteristik nol. Karena R termuat (sebagai subring) di $R[x]$, jelas bahwa bila $nf(x) = 0$, maka juga $na = 0$ untuk semua $a \in R$. Selanjutnya bila $na = 0$ untuk semua $a \in R$, maka untuk sebarang

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{m-1} + a_m x^m \in R[x],$$

didapat

$$nf(x) = na_0 + na_1 x + \cdots + na_{m-1} x^{m-1} + na_m x^m = 0 + 0x + \cdots + 0x^{m-1} + 0x^m = 0.$$

Contoh berikut menjelaskan pengkonstruksian beberapa daerah integral dari berbagai karakteristik berbeda yang bukan lapangan.

Contoh 9.1.8 (1) Mempunyai karakteristik 0: $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$ adalah daerah integral yang bukan lapangan.

(2) Mempunyai karakterisktik p: untuk sebarang bilangan prima p, ring polinomial $\mathbb{Z}_p[x]$ adalah suatu daerah integral mempunyai karakteristik p yang bukan lapangan.

Pengkonstruksian polinomial ring dapat digeneralisasi pada lebih dari satu indeterminate.

Definisi 9.1.5 Dimulai dari ring R dan ditentukan satu indeterminate x dapat dibentuk ring $R[x]$. Selanjutnya ditentukan indeterminate yang lain yaitu y dapat dilakukan pembentukan ring $R[x][y]$ yang elemen-elemennya polinomial dalam y dengan koefisien di ring $R[x]$, misalnya:

(1) $(x+2)y^2 + (x^3+2x)y + (x^2+1)$. Sebagai penggantinya, dapat dilakukan secara general untuk definisi suatu ring $R[x,y]$. Elemen-elemennya adalah jumlahan berhingga $\sum a_{i,j}x^iy^j$, misalnya:
(2) $xy^2 + 2y^2x^3y + 2xy + x^2 + 1$.
Hasil dari dua pengkonstruksian ini adalah ekivalen dan dapat dianggap sebagai **polinomial ring dari dua indeterminate** dengan koefisien di R.

Lebil general, dapat didefinisikan ring polinomial $R[x_1,\ldots,x_n]$ dengan n indeterminate $x_1,\ldots,x_n$. Juga, $R[x_1,\ldots,x_n]$ adalah daerah integral bila R adalah daerah integral. Pada pembahasan terdahulu untuk sebarang daerah integral bisa dikonstruksi lapangan pecahan.

Definisi 9.1.6 Misalkan D adalah suatu daerah integral dan $D[x]$ adalah ring polinomial dengan koefisien di D. Lapangan pecahan dari $D[x]$ dinamakan lapangan dari **fungsi rasional** dengan koefisien di D dan ditulis $D(x)$. Elemen-elemennya adalah pecahan berbentuk $f(x)/g(x)$, dimana $f(x), g(x) \in D[x]$ dan $g(x) \neq 0$. Selanjutnya $f_(x)/g_1(x) = f_2(x)/g_2(x)$ bila dan hanya bila $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$.

Teorema 9.1.2 Misalkan R adalah suatu ring komutatif yang mempunyai elemen satuan dan $\alpha \in R$. Maka suatu pemetaan $\phi_\alpha : R[x] \to R$ didefinisikan oleh

$$\phi_\alpha(f(x)) = f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0,$$

dimana $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ adalah suatu homomorpisma ring.

Bukti Misalkan $f(x) =\sim_{i=0}^{n} a_ix^i$ dan $g(x) = \sum_i^m b_ix^i$ di $R[x]$, didapat

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(f(x)+g(x)) &= \phi_\alpha\Big(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{m} b_ix^i\Big)\\
&= \phi_\alpha\Big(\sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i+b_i)x^i\Big)\\
&= \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i+b_i)\alpha^i\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i + \sum_{i=0}^{m} b_i\alpha^i\\
&= \phi_\alpha(f(x)) + \phi_\alpha(g(x))
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(f(x).g(x)) &= f(\alpha).g(\alpha)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i\alpha^i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right)\alpha^i\\ &= \phi_\alpha(f(x).g(x)).\end{aligned}$$

Pemetaan ϕ_α dinamakan **homomorpisma evaluaasi** di α.

BARISAN dalam RING

Misalkan R ring komutatif dan barisan $< a_0, a_1, a_2, \ldots >$ dengan $a_i \in R$ dinotasikan oleh $< a_i >$. Bila penjumlahan (+) dan konfolusi ($*$) dari barisan masing-masing didefinisikan oleh

$$< a_i > + < b_i > = < a_i + b_i >$$

dan

$$\begin{aligned}< a_i > * < b_i > &= \left\langle \sum_{j+k=i} a_j b_k \right\rangle\\ &= < a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0 > .\end{aligned}$$

Maka $(R^{\mathbb{N}}, +, *)$ adalah ring komutatif dan merupakan daerah integral bila R adalah daerah integral. **BUKTI**

Penjumlahan jelas assosiatif dan komutatif. Elemen nol adalah $< 0 > = < 0, 0, \ldots >$ dan invers dari $< a_i >$ adalah $< -a_i >$. Selanjutnya

$$\begin{aligned}(< a_i > * < b_i >) * < c_i > &= \left\langle \sum_{j+k=i} a_j b_k \right\rangle * < c_i >\\ &= \left\langle \sum_{l+m=i}\left(\sum_{j+k=m} a_j b_k\right) c_l \right\rangle = \left\langle \sum_{j+k+l=i} a_j b_k c_l \right\rangle\end{aligned}$$

Dengan cara serupa didapat

$$< a_i > * (< b_i > * < c_i >) = \left\langle \sum_{j+k+l=i} a_j b_k c_l \right\rangle$$

Terlihat bahwa $(<a_i> * <b_i>) * <c_i> = <a_i> * (<b_i> * <c_i>)$ dan

$$\begin{aligned}
<a_i> * (<b_i> + <c_i>) &= \left\langle \sum_{j+k=i} a_j(b_k + c_k) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j+k=i} a_j b_k \right\rangle + \left\langle \sum_{j+k=i} a_j c_k \right\rangle \\
&= <a_i> * <b_i> + <a_i> * <c_i> .
\end{aligned}$$

Konvolusi jelas komutatif sebab R ring komutatif. Identitas adalah $<1,0,0,\ldots>$, sebab

$$\begin{aligned}
<1,0,0,\ldots> * <a_0,a_1,a_2,\ldots> &= <1a_0, 1a_1 + 0a_0, 1a_2 + 0a_1 + 0a_0, \ldots> \\
&= <a_0,a_1,a_2,\ldots>
\end{aligned}$$

Jadi $(R^{\mathbb{N}}, +, *)$ adalah ring komutatif. Misalkan masing-masing a_q dan b_r adalah elemen pertama yang tak nol dalam barisan $<a_i>$ dan $<b_i>$, maka posisi elemen ke-$q+r$ dalam barisan konvolusi $<a_i> * <b_i>$ diberikan oleh :

$$\begin{aligned}
\sum_{j+k=q+r} &= a_0 b_{q+r} a_1 b_{q+r-1} + \ldots + a_q b_r + a_{q+1} b_{r-1} + \ldots + a_{q+r} b_0 \\
&= 0 + 0 + \ldots + a_q b_r + 0 + \ldots + 0 \\
&= a_q b_r.
\end{aligned}$$

Bila R adalah daerah integral, maka $a_q b_r \neq 0$. Oleh karena itu $\sum\limits_{j+k=q+r} a_j b_k \neq 0$. Jadi ring dari barisan tidak memuat pembagi nol. $\square$

Ring dari barisan tidak akan mempunyai struktur lapangan, sebab $<0,1,0,0,\ldots>$ tidak mempunyai invers. Faktanya bahwa, untuk setiap barisan $<b_i>$, didapat

$$<0,1,0,0,\ldots> * <b_0,b_1,b_2,b_3,\ldots> = <0,b_0,b_1,b_2,\ldots>$$

terlihat bahwa hasil konvolusi bukan barisan identitas. Suatu **deret formal** dalam x dengan koefisien di ring komutatif R adalah

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \text{ dimana } a_i \in R.$$

Berbeda dengan suatu polinomial, deret pangkat ini bisa mempunyai sejumlah takhingga suku-suku yang tak nol.

DERET FORMAL

Himpunan semua deret formal dinotasikan oleh $R[[x]]$. Istilah formal digunakan untuk mengindikasi bahwa kekonvergenan dari deret tidak dipertimbangkan. Termotifasi oleh $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, penjumlahan dan perkalian dalam $R[[x]]$ didifinisikan oleh

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

dan
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right).\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=i} a_j b_k\right) x^i.$$

Dapat diselidiki bahwa himpunan semua deret formal adalah suatu ring $(R[[x]], +, .)$ dan polinomial ring $R[x]$ dengan sejumlah suku-suku taknol yang berhingga adalah subring dari ring $R[[x]]$. Suatu fakta bahwa barisan ring $(R^{\mathbb{N}}, +, *)$ adalah isomorpik dengan ring deret formal $(R[[x]], +, .)$. Fungsi $f : R^{\mathbb{N}} \to R[[x]]$ yang didifinisikan oleh
$$f(< a_0, a_1, a_2, \ldots >) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$
jelas f fungsi satu-satu pada. Dari difinisi penjumlahan, perkalian dan konvolusi dalam ring $R^{\mathbb{N}}$ dan $R[[x]]$, maka f adalah isomorpisma ring. $\square$

Latihan

9.2 Algorithma Pembagian di $F[x]$

Sudah ditunjukkan bahwa bila D adalah suatu daerah integral maka $D[x]$ adalah daerah integral dan bukan lapangan. Dalam bagian ini untuk hal F adalah lapangan, maka daerah integral $F[x]$ mempunyai beberapa sifat analogi dengan sifat-sifat $\mathbb{Z}$ yang sudah dikenal.

Suatu sifat fundamentaldari $\mathbb{Z}$ adalah berlakunya algoritma pembagian bilangan bulat yaitu, untuk sebarang bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$, ada dengan tuggal pasangan bilangan bulat q dan r yang memenuhi $a = b.q + r$, $0 \leq r < |b|$. Sifat ini secara intensif sudah banyak digunakan. Sifat analogi untuk $F[x]$, yang akan terlihat memainkan suatu aturan fundamental.

Contoh 9.2.1 Tinjau polinomial $f(x) = 3x$ dan $g(x) = 2x$ di $\mathbb{Z}_7[x]$. Misalkan $f(x)$ dibagi oleh $g(x)$. Dengan kata lain, mendapatkan $q(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ yang memenuhi $f(x) = q(x).g(x)$. Karena $\mathbb{Z}_7[x]$ adalah daerah integral, maka $\deg(f(x)) = \deg(q(x)) + \deg(g(x))$. Jadi, $\deg(q(x)) = 0$ dan $q(x) = c \in \mathbb{Z}_7[x]$ adalah polinomial konstan. Dengan demikian $3x = c(2x)$ dan $c = 3.2^{-1} = 3.4 = 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$. Catatan bahwa c ada dan tunggal sebab invers terhadap perkalian 2^{-1} ada dan tunggal di $\mathbb{Z}_7[x]$.

Teorema berikut analogi dari algoritma pembagian untuk $\mathbb{Z}$. Yaitu algoritma pembagian untuk polinomial-polinomial di daerah integral $F[x]$.

Teorema 9.2.1 (**Algoritma Pembagian**) Misalkan $f(x), g(x)$ adalah polinomial di $F[x]$ dimana F adalah suatu lapangan dan $g(x)$ polinomial taknol. Maka ada dengan tunggal polinomial $q(x)$ dan $r(x)$ di $F[x]$ yang memenuhi
$$f(x) = g(x).q(x) + r(x),$$

dimana $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ atau $r(x)$ adalah polinomial nol.

Bukti Ditunjukkan eksistensi dari $q(x)$ dan $r(x)$. Bila $f(x)$ adalah polinomial nol, maka

$$0 = 0.g(x) + 0,$$

terlihat dua-duanya $q(x)$ dan $r(0)$ adalah polinomial nol. Selanjutnya, untuk $f(x)$ bukan polinomial nol dan $\deg(f(x)) = n$; dan misalkan $\deg(g(x)) = m$. Bila $m > n$, maka $q(x) = 0$ dan $r(x) = f(x)$. Berikutnya, bila $m \leq n$ dan lakukan induksi matematika pada n. Bila

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

maka polinomial

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{m-n}.g(x)$$

mempunyai derajad kurang dari n atau sama dengan polinomial nol. Dengan induksi matematika ada $q_1(x)$ dan $r_1(x)$ yang memenuhi

$$f_1(x) = q_1(x).g(x) + r_1(x),$$

dimana $r(x) = 0$ atau $\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$. Selanjutnya, misalkan

$$q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Maka

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x),$$

dengan $r(x) = 0$ atau $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$. Tinggal meunjukkan bahwa $q(x)$ dan $r(x)$ tunggal. Misalkan ada dua polinomial $q'(x)$ dan $r'(x)$ yang memenuhi

$$f(x) = g(x).q'(x) + r'(x),$$

dengan $r'(x) = 0$ atau $\deg(r'(x)) < \deg(g(x))$. Didapat

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x) = g(x).q_1(x) + r_1(x)$$

dan

$$r'(x) - r(x) = q(x)[q(x) - q'(x)].$$

Untuk $g(x)$ bukan polinomial nol, maka

$$\deg(r'(x) - r(x)) = \deg(g(x)[q(x) - q'(x)]) \geq \deg(g(x)).$$

Hal ini tidak mungkin sebab derajad dari masing-masing $r'(x)$ dan $r(x)$ tidak melebihi derajad dari $g(x)$. Jadi haruslah $r'(x) - r(x)$ adalah polinomial nol. Sehingga didapat $r'(x) = r(x)$ dan $q'(x) = q(x)$. ●

Contoh 9.2.2 Cara algoritma pembagian bilangan bulat sudah banyak dilakukan dengan apa yang dinamakan pembagian panjang ("poro gapit"). Misalkan, diberikan dua polinomial $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ dan $g(x\ =)x - 1$ di $\mathbb{R}[x]$, maka $f(x)$ dibagi $g(x)$ dilakukan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\;\; 2x^2 \;\; - x + 3 \\ \cline{2-2}
x-1 & \;\; 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \\
 & \underline{-\,2x^3 + 2x^2} \\
 & \quad\quad\;\; -\,x^2 + 4x \\
 & \quad\quad\;\; \underline{\;\;x^2 \;\; - x} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\; 3x - 5 \\
 & \quad\quad\quad\quad\; \underline{-\,3x + 3} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; -\,2
\end{array}
$$

Terlihat bahwa $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$, diberikan oleh

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (2x^2 - x + 3)(x - 1) + (-2).$$

Contoh 9.2.3 Dalam $\mathbb{Z}_5[x]$, diberikan

$$f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \;\; g(x) = 2x^2 - x + 2,$$

maka dengan melakukan pembagian panjang $f(x)$ dibagi $g(x)$, didapat

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\;\; x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^2 - x + 2 & \;\; 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 & \underline{-2x^4 + x^3 - 2x^2 \quad\quad\quad\quad\quad} \\
 & \quad\quad\;\; 2x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & \quad\;\; \underline{-2x^3 + x^2 - 2x \quad\quad} \\
 & \quad\quad\quad\quad\;\; 2x^2 + x + 1 \\
 & \quad\quad\quad\quad\; \underline{-2x^2 + x - 2} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x - 1 = 2x + 4
\end{array}
$$

Terlihat hasil bagi $q(x) = x^2 + x + 1$ dan sisa pembagian $r(x) = 2x + 4$. Sehingga didapat

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 2) + 2x + 4.$$

Suatu aplikasi langsung dari algoritma pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah menghitung faktor persekutuan terbesar (fpb) daridua bilangan bulat a dan b. Dalam pembahasan berikutnyaditunjukkan bahwa hal ini dapat juga dilakukan dalam $F[x]$. Sebelumnya diberikan analogi definisi yang telah digunakan untuk $\mathbb{Z}$.

Definisi 9.2.1 Untuk sebarang $f(x)$ dan $g(x) \neq 0$ di $F[x]$, dimana F adalah suatu lapangan. Polinomial $q(x)$ dan $r(x)$ dalam algoritma pembagian masing-masing dinamakan **hasil bagi** dan **sisa** pada pembagian $f(x)$ dibagi oleh $g(x)$. Bila sisa $r(x) = 0$ atau dengan kata lain bila ada suatu $q(x)$ yang memenuhi $f(x) = q(x).g(x)$, maka $g(x)$ dinamakan suatu **pembagi** dari $f(x)$ atau $g(x)$ **membagi** $f(x)$ dan ditulis $g(x)|f(x)$. Juga, dalam hal ini $f(x)$ dinamakan **kelipatan** dari $g(x)$. Penulisan suatu polinomial menjadi suatu produk $f(x) = g(x).h(x)$ dinamakan **pemfaktoran** polinomial. Pemfaktoran yang demikian dinamakan **taktrivial** bila faktor-faktor $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya mempunyai derajad lebih besar dari nol.

Proposisi 9.2.1 Misalkan F adalah suatu lapangan, polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ di $F[x]$. Maka
(1) Bila $g(x)|f(x)$, maka $cg(x)|f(x)$ untuk sebarang elemen $c \neq 0$ di F.
(2) Bila $g(x)|f(x)$ dan $f(x)|g(x)$, maka $f(x) = cg(x)$ untuk beberapa elemen $c \neq 0$ di F.

Bukti (1) Karena F adalah lapangan dan $c \neq 0$ di F, maka c adalah unit di F. Bila $f(x) = q(x).g(x)$ (sebab $g(x)|f(x)$), maka juga $f(x) = [c^{-1}q(x)].[cg(x)]$. terlihat bahwa $cg(x)|f(x)$.
(2) Bila $f(x) = q(x).g(x)$ dan $g(x) = p(x).f(x)$, maka $f(x) = [q(x).p(x)].f(x)$. Karena $F[x]$ daerah integral, maka haruslah $q(x).p(x) = 1$. Jadi, $q(x)$ dan $p(x)$ keduanya polinomial berderajad nol. Dengan demikian $q(x) = c$ dan $p(x) = c^{-1}$ untuk beberapa $c \in F$.

Definisi 9.2.2 Bila F adalah suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ di $F[x]$ suatu **pembagi persekutuan** dari $f(x)$ dan $g(x)$ adalah sebarang polinomial $c(x) \in F[x]$ yang memenuhi $c(x)|f(x)$ dan $c(x)|g(x)$. Suatu **pembagi persekutuan terbesar** (fpb) dari $f(x)$ dan $g(x)$ adalah suatu pembagi persekutuan $d(x)$ yang memenuhi untuk sebarang pembagi persekutuan yang lain $c(x)$, maka $c(x)|d(x)$. Bila pembagi persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$ hanyalah suatu polinomial konstan, maka $f(x)$ dan $g(x)$ dinamakan **prima relatif**. Catatan bahwa dari proposisi sebelumnya, bila $d_1(x)$ dan $d_2(x)$ keduanya adalah pembagi persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$, maka $d_1(x) = cd_2(x)$ untuk beberapa $c \neq 0$ di F. Dari hal ini maka hanya terdapat satu monik pembagi persekutuan terbesar yang dinotasikan oleh fpb$(f(x), g(x))$

Contoh 9.2.4 Dalam $\mathbb{C}[x]$, diberikan polinomial

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3 \qquad \text{dan} \qquad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

Bila digunakan algoritma pembagian pada $f(x)$ dan $g(x)$ didapat

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & & & 2x - 1 \\ \cline{2-6}
x^3 + 2x + 1 & 2x^4 & - x^3 & + 4x^2 & & + 3 \\
 & - 2x^4 & & - 4x^2 & - 2x & \\ \cline{2-5}
 & & - x^3 & & - 2x & + 3 \\
 & & x^3 & & + 2x & + 1 \\ \cline{3-6}
 & & & & & 4
\end{array}$$

Terlihat bahwa

$$f(x) = (2x - 1)g(x) + 4. \tag{9.1}$$

Selanjutnya, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{C}$ yang memenuhi $g(\alpha) = 0$ didapat $f(\alpha) = 4 \neq 0$. Jadi $f(x)$ dan $g(x)$ tidak mempunyai akar-akar yang sama. Perhatikan bahwa Persamaan (9.1) berakibat bahwa $\text{fpb}(f(x), g(x)) = 1$,atau dengan kata lain $f(x)$ dan $g(x)$ adalah prima relatif. ✓

Sebagaimana dalam $\mathbb{Z}$ mengenai fpb, berikut ini dibuktikan suatu analogi teorema tentang fpb dalam $F[x]$.

Teorema 9.2.2 Misalkan F adalah suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ di $F[x]$ yang keduanya bukan polinomial nol. Maka ada suatu pembagi persekutuan terbesar $d(x)$ dari $f(x)$ dan $g(x)$ yang bisa ditulis sebagai kombinasi linier dari $f(x)$ dan $g(x)$. Yaitu, ada elemen $u(x)$ dan $v(x)$ di $F[x]$ yang memenuhi

$$d(x) = u(x).f(x) + v(x).g(x)$$

adalah pembagi persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Bukti Pembuktian dilakukan dalam tiga langkah.

(1) Tinjau himpunan

$$I = \{m(x).f(x) + n(x).g(x) \mid m(x), n(x) \in F[x]\}.$$

Catatan bahwa $f(x), g(x) \in I$, dengan demikian I mempunyai elemen yang bukan polinomial nol. Misalkan $d(x)$ adalah suatu elemen di I yang mempunyai derajad paling kecil dari semua elemen-elemen di I. Maka untuk setiap $c \in F$, $cd(x) \in I$ dan mempunyai derajad sama dengan derajad dari $d(x)$. Dengan demikian dapat ditentukan $d(x)$ adalah monik, sebab bila tidak dapat diganti oleh $a^{-1}d(x)$ dimana a adalah koefisien utama (leading) dari $d(x)$. Karena $d(x) \in I$, didapat

$$d(x) = u(x).f(x) + v(x).g(x),$$

untuk beberapa $u(x), v(x) \in F[x]$

(2) Berikutnya, ditunjukkan bahwa $d(x)$ adalah pembagi persekutuan dari $f(x)$ dan $g(x)$. Dengan menggunakan algoritma pembagian, didapat $f(x) = q(x).d(x) + r(x)$, dimana $r(x) = 0$ atau $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$. Dalam hal ini diinginkan $r(x) = 0$. Selesaikan $r(x)$, didapat

$$r(x) = f(x) - q(x).d(x) = [1 - q(x).u(x)]f(x) - [q(x)v(x)]g(x).$$

Hal ini memperlihatkan bahwa $r(x) \in I$ dan karena $d(x)$ dipilih berderajad paling kecil di I, tidaklah mungkin $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$. Jadi $r(x) = 0$, dengan demikian $d(x)|f(x)$. Dengan argumentasi yang sama, berdasarkan algoritma pembagian didapat $g(x) = h(x)d(x) + r(x)$ dimana $r(x) = 0$ atau $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$. Selesaikan $r(x)$, didapat

$$r(x) = g(x) - h(x).d(x) = [1 - h(x).v(x)]g(x) - [h(x)u(x)]f(x).$$

Hal ini memperlihatkan bahwa $r(x) \in I$ dan karena $d(x)$ dipilih berderajad paling kecil di I, tidaklah mungkin $\deg(r(x)) < \deg(d(x))$. Jadi $r(x) = 0$, dengan demikian $d(x)|g(x)$.

(3) Untuk melengkapi bukti, ditunjukkan bahwa sebarang pembagi pesekutuan $c(x)$ dari $f(x)$ dan $g(x)$ membagi $d(x)$. Tetapi, bila $f(x) = q(x).c(x)$ dan $g(x) = p(x).c(x)$, maka

$$d(x) = u(x).f(x) + v(x).g(x) = [u(x).q(x) + v(x).p(x)]c(x).$$

Terlihat bahwa $c(x)|d(x)$ sebagaimana yang dikehendaki.

Algoritma pembagian dapat digunakan untuk mendapatkan fpb di $F[x]$ sebagaimana di $\mathbb{Z}$.

Teorema 9.2.3 Misalkan F adalah suatu lapangan, $f(x)$ dan $g(x)$ di $F[x]$, bila secara berulang digunakan algoritma pembagian didapat
(1) $f(x) = q_1(x).g(x) + r_1(x)$
(2) $g(x) = q_2(x).r_1(x) + r_2(x)$
(3) $r_1(x) = q_3(x).r_2(x) + r_3(x)$
$\vdots$
maka akan sampai n berhingga didapat
(n) $r_{n-2}(x) = q_n(x).r_{n-1}(x) + r_n(x)$
(n+1) $r_{n-1}(x) = q_{n+1}(x).r_n(x) + r_{n+1}(x)$,
dimana $r_{n+1} = 0$. Maka $r(x) = r_n(x)$ adalah suatu fpb dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Bukti Barisan dari pembagian tidak akan terus berlangsung, sebab

$$\deg(g(x)) > \deg(r_1(x)). \deg(r_2(x)) > \deg(r_3(x)) > \cdots > 0,$$

jadi akan sampai pada suatu n sebagaimana telah disebutkan. Untuk n yang demikian, dari Persamaan (n+1) terlihat bahwa $r_n(x)|r_{n-1}(x)$, maka dari Persamaan (n) didapat $r_n(x)|r_{n-2}(x)$ dan seterusnya sampai ke Persamaan (2) dan (1) menunjukkan bahwa $r_n(x)|g(x)$ dan $r_n(x)|f(x)$. Lagipula, bila $c(x)$ adalah sebarang pembagi persekutuan dari $f(x)$ dan $g(x)$, maka dari Persamaan (1) didapat $c(x)|r_1(x)$ dan, juga dari Persamaan (2) didapat $c(x)|r_2(x)$ dan terus kebawah sampai ke Persamaan (n+1) didapat $c(x)|r_n(x)$. Hal ini menunjukkan bahwa $r_n(x)$ adalah suatu fpb dari $f(x)$ dan $g(x)$.

Definisi 9.2.3 Barisan dari penghitungan (1), (2), (3), . . . dalam Teorema 9.2.3 dinamakan **algoritma Eulcide**.

Contoh 9.2.5 Tinjau polinomial

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \quad \text{dan} \quad g(x) = x^2 + x + 2$$

di $\mathbb{Z}_3[x]$. Gunakan algoritma Euclide, didapat
(1) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 2) + (x + 2)$

(2) $x^2 + x + 2 = (x + 2)(x + 2) + 1$.
Jadi, fpb$(f(x), g(x)) = 1$ dan; $f(x)$ dan $g(x)$ adalah prima relatif. Juga, didapat

$$\begin{aligned}
1 &= (x^2 + x + 2) - (x + 2)(x + 2) \\
&= (x^2 + x + 2) - (x + 2)[(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 2)] \\
&= [-x - 2](x^4 + 2x^2 + 1) + [1 - (x + 2)(x^2 - x + 1)](x^2 + x + 2) \\
\text{fpb}(f(x), g(x)) &= u(x).f(x) + v(x).g(x).
\end{aligned}$$

Perhitungan yang dilakukan ini akan berguna ketika mencari invers terhadap perkalian dalam ring kuasi $F[x]$. ✓

Latihan

9.3 Aplikasi Algorithma Pembagian

Latihan

9.4 Polinomial Tereduksi

Latihan

9.5 Polinomial Kubik dan Kuartik

Latihan

9.6 Ideal di $F[x]$

Latihan

9.7 Terorema Sisa untuk $F[x]$

Latihan

Bab 10

Daerah Euclid

10.1 Algorithma Pembagian dan Daerah Euclid

Latihan

10.2 Daerah Faktorisasi Tunggal

10.3 Integers Gaussian

Bab 11

Teori Lapangan

11.1 Ruang Vektor

11.2 Perluasan Aljabar

11.3 Lapangan Splitting

11.4 Lapangan Berhingga

Bab 12

Konstruksi Geometri

12.1 Konstruksi Bilangan Real

12.2 Masalah Klasik

12.3 Konstruksi dengan Aturan Tanda dan Kompas

12.4 Revisi Kubik dan Kuartik

Bab 13

Teori Galois

13.1 Grup Galois

13.2 Teori Fundamental dari Teori Galois

13.3 Revisi Konstruksi Geometri

13.4 Perluasan Radical

Bab 14

Simetri

14.1 Transformasi Linier

14.2 Isometris

14.3 Grup Simetri

14.4 Solid Platonik

14.5 Subgrup dari Grup Orthogonal Khusus

Bab 15

Basis Gröbner

|labelBabGrobner

15.1 Order Lexicographic

15.2 Suatu Algorithma Pembagian

15.3 Lemma Dickson

15.4 Teorema Basis Hilbert

15.5 Basis Gröbner dan Algorithma Pembagian

Bab 16

Teori Koding

16.1 Kode Biner Linier

16.2 Koreksi Kesalahan dan Dekoding Koset

16.3 Matriks Generator Baku

16.4 Metoda Sindrom

16.5 Kode Siklik

Daftar Pustaka

[1] Subiono. "Aljabar I", Jurusan Matematika FMIPA-ITS, 2014.

[2] Subiono. "Aljabar II", Jurusan Matematika FMIPA-ITS, 2014.

[3] Aigli Papantonopoulou. "Algebra Pure & Applied", Prentice Hall, USA, 2002.

[4] J.B. Fraleigh. "A First Course In Abstract Algebra, Seventh Edition", 2003.

[5] D.A.R. Wallace. "Groups, Rings and Fields", Springer-Verlag London Limited, 1998.

[6] Joseph A. Gallian. "Contemporary Abstract Algebra, Sevent Edition", Brooks/Cole, USA, 2010.

[7] Joseph J. Rotman. "Advanced Modern Algebra", Prentice Hall, 2003.

[8] Jeffrey Bergen. "A Concrete Approach to Abstract Algebra", ELSEVIER, 2010.

[9] Thomas W. Judson. "Abstract Algebra Theory and Applications", http://abstract.pugetsound.edu, 2014.

[10] Robert A. Beezer. "Sage for Abstract Algebra, A Supplement to Abstract Algebra, Theory and Applications", Department of Mathematics and Computer Science, University of Puget Sound, 2014.

[11] Joseph J. Rotman. "A First Course In Abstract Algebra, Third Edition", Prentice Hall, USA, 2010.

[12] Stephan Folders. "Fundamental Structures of Algebra and Discrete Mathematics", John Wiley & Sons, Inc., 1994.

[13] Randall B. Maddox. "A Transition to ABSTRACT MATHEMATICS Learning Mathematical Thinking and Writing, Second Edition", Academic Press, 2009.

[14] Otto F.G. Schilling and W. Stephen Piper. "Basic Abstract Algebra", Ally and Bacon. Inc., 1975.

[15] J. Eldon Whitesitt. "Principles of Modern Algebra, Second Edition", Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[16] John R. Durbin. "Modern Algebra An Introduction, Sixth Edition", John Wiley & Sons, Inc., 2009.

[17] Wildah Mahmudah. "Kajian Indeks Sikel Polinomial Grup dan Aplikasi Teorema Polya pada Molekul Tetrahedron", Tugas Akhir, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, 2006.

[18] Luluk Handayani. "Kajian Teorema Burnside dan Teorema Polya serta Aplikasinya pada Enumerasi Pola Molekul Karbon (C)", Tugas Akhir, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, 2004.

Indeks