Draft Aljabar Linier Lanjut

Version 1.0.0

12 Pebruari 2016

Subiono

Subiono — Email: subiono2008@matematika.its.ac.id

Alamat: Jurusan Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Sukolilo Surabaya
Indonesia

Copyright

Kata Pengantar

Alhamdulillahirabbilalamin, segala puji hanyalah milikmu ya Allah yang telah meberikan "kebebasan bertanggung jawab" kepada manusia semasa hidupnya untuk suatu kebaikan dalam melaksanakan amanatnya di hamparan bumi yang dihuni beragam manusia. Sholawat dan Salam kepadamu ya Nabi Muhammad beserta para keluarganya dan para pengikutnya sampai nanti di hari akhir.
Draft buku ini disusun dengan maksud untuk membantu dan mempermudah mahasiswa dalam mempelajari materi kuliah Aljabar Linier Lanjut. Selain dari pada itu juga dimaksudkan untuk menambah suatu wacana bagi para peminat lainnya dari berbagai disiplin ilmu yang membutuhkannya atau kalangan industri dan perguruan tinggi.
Dalam drat buku ini diberikan beberapa konsep pengertian dari materi yang disajikan setelah itu diikuti dengan beberapa contoh untuk mempermudah pemahaman, selain itu juga diberikan beberapa contoh aplikasi bila mungkin.
Topik bahasan disajikan dengan penekanan pada "matematika" tetapi tidaklah menjadikan para pemakai lain akan mengalami kesulitan dalam mempelajari buku ini, karena peletakan penekanan aspek matematika dibuat dengan porsi yang seimbang. Sehingga para peminat matematika tetap dapat menikmati dan menggunakan ilmunya terutama dalam Aljabar Linier, begitu juga untuk para pemakai yang lainnya diharapkan mendapat tambahan wawasan untuk melihat matematika sebagai alat yang dibutuhkan terutama dalam kajian Aljabar dan Aljabar Linier untuk menyelesaikan masalah-masalah praktis yang dihadapinya.
Untuk memudahkan pembaca mengikuti alur dari setiap topik bahasan dalam buku ini, diasumsikan pembaca mempunyai bekal pengetahuan "Aljabar" dan "Aljabar Linear" yang memadai.
Penulis pada kesempatan ini menyampaikan keaktifan pembaca dalam mengkaji buku ini untuk menyampaikan kritik dan saran guna perbaikan buku ini, sehingga pada versi yang mendatang "mutu buku" yang baik bisa dicapai. Kritik dan saran ini sangat penting karena selain alasan yang telah disebutkan tadi, penulis percaya bahwa dalam sajian buku ini masih kurang dari sempurnah bahkan mungkin ada suatu kesalahan dalam sajian buku ini baik dalam bentuk redaksional, pengetikan dan materi yang menyebabkan menjadi suatu bacaan kurang begitu bagus.

Draft buku ini dapat diperoleh secara gratis oleh siapapun tanpa harus membayar kepada penulis. Hal ini berdasarkan pemikiran penulis untuk kebebasan seseorang mendapatkan suatu bacaan yang tersedia secara bebas dengan maksud "kemanfaatan" dan "kejujuran". Yang dimaksud dengan kemanfaatan adalah bergunanya bacaan ini untuk kemudahan pembaca memperoleh informasi penting yang diperlukannya dan untuk pembelajaran. Sedangkan kejujuran adalah ikatan moral dari pembaca untuk tidak memdistribusi buku ini dengan tujuaan yang tidak bermanfaat.

Penulis menulis buku ini berdasarkan pemikiran "kebebasan menulis" (tidak harus menggunakan media cetak penerbit) dengan asas "kemanfaatan" menggunakan media yang tersaji masa kini. Beberapa alat bantu untuk penulisan buku ini juga didapat secara gratis, yaitu perangkat lunak LaTeX untuk Windows yaitu MIKTeX 2.9 dan TeX*MAKER* 4.3 sebagai salah satu media LaTeX editor. Beberapa gambar yang ada dalam buku ini menggunakan perangkat lunak LaTeXDraw 3.1 yang juga didapat secara gratis. Begitu juga beberapa bahan rujukan didapat secara gratis lewat internet. Selain itu untuk menyelesaikan beberapa contoh yang dibahas digunakan alat bantu perangkat lunak SAGEMATH, perangkat lunak ini juga didapat dari internet secara gratis.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis memohon kepada Allah semoga penulisan ini bisa berlanjut untuk versi mendatang yang tentunya lebih "baik" dari Versi 1.0.0 yang tersedia saat ini dan semoga benar-benar buku yang tersaji ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 12 Pebruari 2016

Penulis

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan

Dalam bab ini, secara singkat dibahas beberapa topik yang dibutuhkan untuk menjebatani beberapa bahasan berikutnya. Bab ini adalah suatu ringkasan yang utamanya digunakan sebagai rujukan bahasan berikutnya.

1.1 Pengantar

Beberapa konsep sederhana berikut diberikan berkaitan kegunaannya yang akan banyak muncul pada pembahasan berikutnya.

Multiset

Definisi 1.1.1 *Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Suatu multiset M dengan penekanan elemen himpunan S adalah pasangan terurut*

$$M = \{(s_i, n_i) \mid s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}^+, s_i \neq s_j \text{ untuk } i \neq j\},$$

dengan $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Bilangan n_i dirujuk sebagai multiplisitas dari elemen s_i di M. Bila himpunan S berhingga, maka dikatakan multiset adalah berhingga. Ukuran dari multiset berhingga M adalah jumlah dari semua multiplisitas elemen-elemennya. □

Contoh, $M = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$ adalah suatu multiset dari himpunan $S = \{a, b, c\}$. Elemen a mempunyai mutiplisitas 2. Multiset ini bila ditulis sebagai multiplisitas elemen-elemennya adalah $M = \{a, a, b, b, b, c\}$.

Tentunya, dua multiset adalah sama bila himpunan-himpunan penekanan elemen-elemennya sama dalam kedua multisetnya.

Matriks

Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen di lapangan F dinotasikan oleh $M_{m,n}(F)$ atau $M_{m,n}$ bila lapangan tidak perluh disebutkan. Himpunan $M_{n,n}(F)$ cukup ditulis $M_n(F)$ atau M_n. Bila $A \in M_{m,n}$, maka elemen ke-(i,j) dari A dinotasikan oleh $A_{i,j}$. Matriks identitas berukuran $n \times n$ dinotasikan oleh I_n. Elemen-elemen yang berbasis pada lapangan F dinamakan skalar. Pembaca diasumsikan telah mengenal dengan baik sifat-sifat dasar matriks yang meliputi penjumlahan dan perkalian matriks.

Diagonal utama dari suatu matriks A berukuran $m \times n$ adalah barisan elemen

$$A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{k,k}\ ,$$

dengan $k = \min\{m, n\}$.

Definisi 1.1.2 *Transpose dari $A \in M_{m,n}$ adalah matriks A^t didefinisikan oleh*

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Suatu matriks A adalah simetri bila $A = A^t$ dan simetri-miring bila $A^t = -A$. □

Teorema 1 *(Sifat-sifat transpose) Misalkan $A, B \in M_{m,n}$, maka*
1) $(A^t)^t = A$
2) $(A + B)^t = A^t + B^t$
3) $(rA)^t = rA^t$, untuk semua $r \in F$
4) $(AB)^t = B^tA^t$, asalkan perkalian AB terdifinisi
5) $\det(A^t) = \det(A)$. □

Partisi dan Perkalian Matriks

Misalkan M adalah suatu matriks berukuran $m \times n$. Bila $B \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ dan $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, maka submatriks $M[B, C]$ adalah matriks diperoleh dari M melalui indeks baris di B dan indeks kolom di C. Jadi semua baris dan kolom yang lain dibuang dan $M[B, C]$ mempunyai ukuran $|A| \times |B|$.

Diberikan $M \in M_{m,n}$ dan $N \in M_{n,k}$, Misalkan
1) $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ adalah suatu partisi dari $\{1, 2, \ldots, m\}$
2) $\mathcal{Q} = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ adalah suatu partisi dari $\{1, 2, \ldots, n\}$
3) $\mathcal{R} = \{D_1, D_2, \ldots, D_r\}$ adalah suatu partisi dari $\{1, 2, \ldots, k\}$

Maka adalah suatu fakta yang berguna bahwa perkalian matriks bisa dilakukan pada level blok begitu juga elemennya. Khususnya didapat

$$MN[B_i, D_j] = \sum_{C_h \in \mathcal{Q}} M[B_i, C_k]N[C_h, D_j].$$

Bila partisi hanya memuat satu elemen blok, hal ini adalah perkalian matriks sebagaimana biasanya, yaitu

$$[MN]_{i,j} = \sum_{h=1}^{m} M_{i,h} N_{h,j}.$$

Matriks Blok

Bila $B_{i,j}$ adalah matriks dengan ukuran yang sesuai, maka matriks blok

$$M = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,n} \end{bmatrix}_{\text{blok}}$$

adalah matriks yang mempunyai submatriks kiri atas adalah $B_{1,1}$ dan seterusnya. Jadi, $B_{i,j}$ adalah submatriks dari M dan bukan elemen dari M. Suatu matriks persegi berbentuk

$$M = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_n \end{bmatrix}_{\text{blok}}$$

dengan masing-masing B_i adalah submatriks persegi dan 0 adalah submatriks nol. Matriks M yang demikian dinamakan matriks diagonal blok.

Operasi Baris Elementer

Ada tiga tipe operasi baris elementer. Yaitu, operasi mengalikan suatu baris dari suatu matriks A dengan suatu skalar taknol, pertukaran dua baris dari matriks A dan menambah satu baris yang telah dikalikan skalar pada baris yang lainnya dari matriks A.

Bila kita melakukan operasi baris elementer dari tipe k menjadi matriks identitas I_n hasilnya adalah suatu matriks yang dinamakan matriks elementer dari tipe k. Semua matriks elementer mempunyai invers.

Agar supaya melakukan suatu operasi baris elementer pada $A \in M_{m,n}$, hal ini bisa dilakukan operasi baris elementer pada matriks identitas I_m untuk memperoleh matriks elementer E kemudian mengambil hasil kali EA. Catatan bahwa perkalian dari kanan oleh E sama halnya melakukan operasi kolom.

Definisi 1.1.3 *Suatu matriks R dinamakan mempunyai bentuk Echelon Baris Tereduksi bila 1) Semua baris memuat elemen nol hanya pada bagian bawah*
2) Pada setiap baris yang tidak nol, elemen pertama sama dengan 1. *Elemen ini dinamakan elemen utama.*

3) Untuk setiap dua baris yang berurutan, elemen utama dari baris dibawahnya adalah sebelah kanan elemen utama dari baris diatasnya.
4) Setiap kolom yang memuat elemen utama, elemen-elemen yang lainnya adalah 0. □

Teorema berikut adalah fakta dasar yang berkenaan dengan bentuk echelon baris tereduksi.

Teorema 2 *Matriks $A, B \in M_{m,n}$ adalah ekuivalen baris, dinotasikan oleh $A \sim B$ bila matriks yang satu diperoleh dari yang lainnya melalui serangkaian operasi baris elementer.*

1) *Ekivalen baris adalah suatu relasi ekuivalen, yaitu*

- **a)** $A \sim A$
- **b)** $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$
- **c)** $A \sim B$ *dan* $B \sim C \Longrightarrow A \sim C$

2) *Suatu matriks A adalah ekuivalen baris pada hanya dan hanya satu matriks R yang dinamakan bentuk echelon baris tereduksi dari A, lagi pula*

$$R = E_1 E_2 \dots E_k A,$$

dengan E_i adalah matriks elementer yang mereduksi A kebentuk echelon baris tereduksi.

3) *Matriks A mempunyai invers bila dan hanya bila bentuk echelon baris tereduksinya adalah matriks identitas. Jadi, suatu matriks mempunyai invers bila dan hanya bila matriks ini adalah hasil kali dari matriks-matriks elementer.* □

Berikut ini diberikan definisi yang telah dikenal pembaca.

Definisi 1.1.4

Suatu matriks persegi adalah matriks **segitiga atas** jika semua elemeneb di bawah diagonal utama adalah 0. Demikian pula, suatu matriks persegi adalah matriks **segitiga bawah** jika semua elemen di atas diagonal utama sama dengan 0. Suatu matriks persegi adalah matriks **diagonal** semua elemen diatas dan dibawah diagonal utama sama dengan 0. □

Bab 2

Strukur Aljabar

Pada bab ini dibahas beberapa struktur aljabar yang mempunyai peranan penting untuk pengkajian aljabar linier. Kajian yang dibahas adalah Grup, Ring, Ideal, Ring Kuasi, Ideal Maksimal, Daerah Integral, Lapangan Pecahan

2.1 Grup dan Subgrup

Grup adalah suatu himpunan $G \neq \emptyset$ bersama-sama dengan suatu operasi biner $* : G \times G \to G$ yang mana untuk setiap (a, b) di $G \times G$, $*(a, b)$ biasanya dinotasikan oleh $a * b$ sedemikian hingga sifat-sifat berikut dipenuhi:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$.

2. Ada $e \in G$ sedemikian hingga $e * a = a = a * e$ untuk semua $a \in G$.

3. Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Tambahan pula, bila masih memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$, maka grup G dinamakan grup **komutatif/Abelian** . Bila operasi biner $*$ adalah $+$, maka penulisan $a * b$ ditulis sebagai $a + b$ dan dan invers dari a yaitu a^{-1} ditulis sebagai $-a$. Dalam hal ini elemen nol adalah elemen identitas. Juga untuk lebih ringkasnya penulisan $a * b$ ditulis ab.

Contoh 2.1.1 Himpunan

$$\mathcal{F} = \{f : S \to S \mid f \text{ adalah fungsi bijektif}\}$$

adalah suatu grup dengan operasi biner komposisi fungsi. Grup ini dinamakan **grup permutasi** dan tidak komutatif. $\square$

Contoh 2.1.2 Himpunan

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{M \,|\, M \text{ adalah matriks ukuran } m \times n \text{ dengan elemen} - \text{elemen di } \mathbb{R}\}$$

adalah suatu grup dengan operasi biner penjumlahan matriks. Tetapi terhadap perkalian matriks bukan grup, sebab tidak semua matriks mempunyai invers terhadap perkalian matriks.

□

Contoh 2.1.3 Himpunan

$$\mathbb{Z}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

dengan operasi biner tambah didefinisikan oleh

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

adalah suatu grup.

□

Suatu grup G adalah berhingga bila banyaknya elemen dari G adalah berhingga . Banyaknya elemen dari G dinamakan **order** dari G dan dinotasikan oleh $o(G)$ atau $|G|$. Contoh, himpunan bilangan bulat modulo n, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ dengan operasi biner $+$ adalah grup berhingga yang komutatif, tetapi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dan $\mathbb{Z}^n$ bukan grup berhingga.

Himpunan $S \subseteq G$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah **subgrup** dari grup G bila S sendiri adalah grup terhadap operasi biner di G.

Grup G dinamakan **grup siklik** bila untuk beberapa $a \in G$,

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \{a^i \,|\, i \in \mathbb{Z}\},$$

dengan $a^i a^j \stackrel{\text{def}}{=} a^{i+j}$, $\forall a^i, a^j \in G$. Dalam hal ini, grup G **dibangun** oleh elemen a dinotasikan sebagai $\langle a \rangle$ dan elemen a dinamakan **pembangun**. Jadi

$$\langle a \rangle = \{a^i \,|\, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Grup siklik berhingga dengan order n yang dibagun oleh a dengan $a^n = 1$ dapat didefinisikan sebagai

$$C_n(a) = \{1 = a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\},$$

elemen 1 adalah elemen netral dan

$$a^i a^j = a^{(i+j) \mod n}.$$

Elemen invers dari a^k adalah $a^{-k \mod n}$.

Contoh 2.1.4 Himpunan bilangan bulat modulo 8

$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

dengan operasi biner tambah, jadi $4+7 = 11 \mod 8 = 3$ dan invers dari 6 adalah $-6 = 2$, elemen netral dari $\mathbb{Z}_8$ adalah 0. Elemen-elemen pembangun dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $1, 3, 5$ dan 7. Sedangkan himpunan

$$\mathbb{U}_8 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 3, 5, 7\}$$

adalah grup komutatif terhadap operasi biner perkalian, jadi $5 \times 7 = 35 \mod 8 = 3$ dan invers dari 3 adalah $3^{-1} = 3$, elemen netral dari $\mathbb{U}_8$ adalah 1. Grup U_8 bukan grup siklik. $\square$

Contoh 2.1.5 Himpunan bilangan bulat modulo 7

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

dengan operasi biner tambah, jadi $5+6 = 11 \mod 7 = 4$ dan invers dari 6 adalah $-6 = 1$, elemen netral dari Z_7 adalah 0. Elemen-elemen pembangun dari $\mathbb{Z}_7$ adalah $1, 2, 3, 4, 5$ dan 6. Sedangkan himpunan

$$\mathbb{U}_7 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

adalah grup komutatif terhadap operasi biner perkalian, jadi $5 \times 6 = 30 \mod 7 = 2$ dan invers dari 3 adalah $3^{-1} = 5$, elemen netral dari $\mathbb{U}_7$ adalah 1. Grup U_7 adalah grup siklik dengan pembangun 3 dan 5.

$\square$

Diskusikan lebih lanjut dan beri kesimpulan dari pembahasan Contoh 2.1.4 dan 2.1.5.

2.2 Ring, Subring, Ideal dan Lapangan

Suatu himpunan $R \neq \emptyset$ bersama dengan dua operasi biner **tambah** dan **perkalian** dinamakan ring bila memenuhi

1. R bersama dengan operasi tambah adalah grup komutatif
2. Untuk semua $a, b, c \in R$,
$$(ab)c = a(bc) \quad \text{assosiatif}$$
3. Untuk semua $a, b, c \in R$,
$$(a+b)c = ac + bc \text{ dan } c(a+b) = ca + cb \quad \text{distributif.}$$

Suatu ring R adalah komutatif bila $ab = ba$ untuk semua $a, b \in R$. Bila ring R memuat elemen e yang memenuhi

$$ea = a = ae,$$

untuk semua $a \in R$, maka R dinamakan **ring satuan**. Biasanya elemen e dinotasikan oleh 1.

Suatu ring komutatif F dengan elemen satuan dinamakan **lapangan** bila setiap elemen taknol mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu bila $0 \neq a \in F$, maka ada $b \in F$ yang memenuhi $ab = 1$.

Contoh 2.2.1 Himpunan bilangan bulat modulo n

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

dengan operasi biner tambah $\oplus$ dan perkalian $\odot$, yang didefinisikan sebagai berikut

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} (a+b) \mod n \quad \text{dan} \quad a \odot b \stackrel{\text{def}}{=} ab \mod n, \quad a, b \in F.$$

elemen $1 \in \mathbb{Z}_n$ adalah elemen satuan. $\square$

Contoh 2.2.2 Himpunan bilangan bulat genap E dengan operasi biner tambah dan perkalian sebagaimana di $\mathbb{Z}$ adalah ring komutatif tetapi tampa elemen satuan. $\square$

Contoh 2.2.3 Himpunan

$$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \{M \mid M \text{ adalah matriks ukuran } n \times n \text{ dengan elemen} - \text{elemen di } \mathbb{R}\}$$

dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian matriks adalah ring tidak komutatif . Elemen satuan adalah $I_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. $\square$

Contoh 2.2.4 Diberikan lapangan $\mathbb{R}$. Himpunan

$$\mathbb{R}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{p(x) \mid p(x) \text{ adalah polinomial dengan satu peubah } x \text{ dan koefisien di } \mathbb{R}\}$$

operasi biner penjumlahan dan perkalian polinomial sebagaimana biasanya adalah ring komutatif . Elemen satuan adalah 1. Serupa dengan $\mathbb{R}[x]$, himpunan polinomial dengan n peubah yaitu $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ juga ring komutatif terhadap operasi biner perkalian polinomial sebagaimana biasanya . $\square$

Bila R dan S adalah ring, maka fungsi $f : R \to S$ adalah suatu **homomorpisma ring** bila memenuhi

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) \oplus f(b) \\ f(ab) &= f(a) \odot f(b) \\ f(1_R) &= 1_S, \end{aligned}$$

untuk semua $a, b \in R$.

Diberikan ring R dan $S \subseteq R$, maka S dinamakan **subring** dari R bila S sendiri adalah ring terhadap operasi-operasi biner yang sama di R dan juga mempunyai elemen satuan yang sama seperti di R.

Kondisi bahwa S mempunyai elemen satuan yang sama seperti di ring R dibutuhkan. Sebab bila diberikan ring $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, ring ini mempunyai elemen satuan terhadap perkalian matriks yaitu matriks identitas I_2. Tetapi himpunan bagian dari $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, yaitu

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

terhadap operasi tambah dan perkalian matriks yang sama di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, maka S adalah ring dengan elemen satuan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tetapi S bukan subring dari $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, sebab elemen satuan di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ adalah

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil pembahasan definisi subring, berikut ini diberikan teorema syarat perluh dan cukup yang berkaitan dengan pengertian subring.

Teorema 2.2.1 Diberikan ring R dan $S \subseteq R$ dengan $S \neq \emptyset$. Maka S adalah subring dari R bila dan hanya bila

1. Elemen satuan $1_R \in R$ juga merupakan elemen satuan di S.
2. Himpunan S tertutup terhadap operasi $-$, yaitu
$$a, b \in S \;\Rightarrow\; a - b \in S.$$
3. Himpunan S tertutup terhadap operasi perkalian, yaitu
$$a, b \in S \;\Rightarrow\; ab \in S.$$

Bukti
Syarat 1 jelas dibutuhkan telah dipenuhi. Syarat 2, berakibat bahwa S adalah grup terhadap operasi $+$ dan syarat 3 menunjukkan bahwa S tertutup terhadap operasi perkalian yang sama berlaku di R. Sedangkan syarat assosiatif dan distributif otomatis diwarisi dari R sebab $S \subseteq R$.

$\square$

Selain subring, ring mempunyai struktur yang penting lainnya sebagaimana diberikan pada difinisi berikut.

Diberikan ring R. Himpunan bagian $\mathcal{I} \subseteq R$ dengan $\mathcal{I} \neq \emptyset$ dinamakan **ideal** bila memenuhi

1. Himpunan $\mathcal{I}$ adalah subgrup dari R, yaitu
$$a, b \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; a - b \in \mathcal{I}.$$

2. Himpunan $\mathcal{I}$ tertutup terhadap operasi perkalian dengan semua elemen dari ring R, yaitu
$$a \in \mathcal{I}, r \in R \;\Rightarrow\; ar \in \mathcal{I} \text{ dan } ra \in \mathcal{I}.$$

Perluh diperhatikan bahwa bila $\mathcal{I}$ memuat elemen satuan, maka $\mathcal{I} = R$.

Contoh 2.2.5 Diberikan lapangan F dan $p(x)$ adalah suatu polinomial di $F[x]$. Himpunan dari semua kelipatan dari $p(x)$, yaitu

$$\langle p(x)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{q(x)p(x) \mid q(x) \in F[x]\}$$

adalah ideal di $F[x]$, dinamakan **Ideal yang dibangun** oleh $p(x)$. $\square$

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan $S \subseteq R$. Himpunan dari semua kombinasi linier berhingga dari elemen-elemen S dengan koefisien di R

$$\langle S\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{r_1s_1 + r_2s_2 + \ldots + r_ns_n \mid r_i \in R, s_i \in S, n \geq 1\}$$

adalah ideal di R, ideal ini dinamakan **Ideal yang dibangun** oleh S. Ideal $\langle S\rangle$ adalah ideal terkecil dalam makna himpunan inklusi, yaitu $\langle S\rangle$ adalah irisan dari semua ideal di R yang memuat S. Bila $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle = \{r_1s_1 + r_2s_2 + \ldots + r_ns_n \mid r_i \in R, s_i \in S\}\ .$$

Catatan bahwa difinisi yang baru saja dibahas, dibutuhkan bahwa R harus memuat elemen satuan. Hal ini untuk menjamin bahwa $S \subseteq \langle S\rangle$.

Teorema 2.2.2 Diberikan ring R.

1. Irisan dari sebarang koleksi
$$\bigcap_{k\in K} \{\mathcal{I}_k \mid\ \mathcal{I}_k \text{ adalah ideal di } R\}$$
adalah ideal di R.

2. Bila $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \ldots$ adalah barisan menaik dari dari ideal, maka $\bigcup\limits_{k\in K} \mathcal{I}_k$ adalah ideal di R.

3. Secara lebih umum, bila
$$\mathcal{C} = \{\mathcal{I}_i \,|\, i \in I\}$$
adalah **rantai** ideal di R, maka
$$\mathfrak{I} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{I}_i$$
adalah ideal di R.

Bukti

1. Misalkan $\mathfrak{K} = \bigcap\limits_{k\in K} \mathcal{I}_k$. Maka bila $a, b \in \mathfrak{I}$, didapat $a, b \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$. Jadi, $a - b \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$. Dengan demikian juga $a - b \in \mathfrak{K}$. Juga, bila $r \in R$, maka $ra \in \mathcal{I}_k$ untuk semua $k \in K$, akibatnya $ra \in \mathfrak{K}$.

2. Adalah kasus khusus dari 3.

3. Bila $a, b \in \mathfrak{I}$, maka $a \in \mathcal{I}_i$ dan $b \in \mathcal{I}_j$ untuk beberapa $i, j \in I$. Karena satu dari $\mathcal{I}_i$ dan $\mathcal{I}_j$ termuat di yang lainnya, maka dapat diasumsikan bahwa $\mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{I}_j$. Didapat $a, b \in \mathcal{I}_j$, dengan demikian $a - b \in \mathcal{I}_j \subseteq \mathfrak{I}$. Selanjutnya bila $r \in R$, maka $ra \in \mathcal{I}_j \subseteq \mathfrak{I}$. Jadi $\mathfrak{I}$ adalah ideal di R .

$\square$

Perluh diperhatikan bahwa, secara umum gabungan dari sebarang ideal belum tentu menghasilkan ideal. Tetapai apa yang baru dibuktikan pada Teorema 2.2.2, menunjukkan bahwa gabungan dari sebarang rantai dari ideal adalah ideal.

2.3 Ring kuasi dan Ideal Maksimal

Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $S \subseteq R$. Misalkan $\equiv$ adalah relasi biner pada R yang didefinisikan oleh
$$a \equiv b \iff a - b \in S.$$
Dapat ditunjukkan bahwa $\equiv$ adalah relasi ekivalen. Bila $a \equiv b$, maka dikatakan bahwa a dan b **kongruen modulo** S. Istilah " mod " digunakan sebagai ungkapan yang baku untuk menyatakan modulo dan $a \equiv b$ sering ditulis sebagai
$$a \equiv b \mod S,$$
dan secara ringkas ditulis sebagai $a \equiv b$.

Untuk melihat seperti apa klas ekivalen yang baru saja dibahas, diberikan himpunan

$$\begin{array}{rcl}[a] & = & \{r \in R \,|\, r \equiv a\} \\ & = & \{r \in R \,|\, r - a \in S\} \\ & = & \{r \in R \,|\, r = a + s, \text{ untuk beberapa } s \in S\} \\ & = & \{a + s \,|\, s \in S\} \\ & = & a + S.\end{array}$$

Himpunan

$$a + S = \{a + s \,|\, s \in S\}$$

dinamakan **koset** dari S di R. Elemen a dinamakan dinamakan **suatu representasi koset** dari $a + S$.

Jadi, klas ekivalen dari kongruen $\mod S$ adalah koset $a + S$ dari S di R. Himpunan dari semua koset dinotasikan oleh

$$R/S = \{a + S \,|\, a \in R\}.$$

Himpunan R/S dibaca "$R \mod S$". Selanjutnya dibahas struktur R/S. Bila S adalah subgrup dari grup komutatif R, maka mudah ditunjukkan bahwa R/S adalah suatu grup komutatif dengan operasi $+$ yang didefinisikan oleh

$$(a + S) + (b + S) \stackrel{\text{def}}{=} (a + b) + S.$$

Selanjutnya, agar supaya perkalian koset

$$(a + S)(b + S) \stackrel{\text{def}}{=} ab + S$$

terdifinisi dengan baik (well-defined), haruslah

$$b + S = b' + S \;\Rightarrow\; ab + S = ab' + S,$$

atau ekivalen dengan

$$b - b' \in S \;\Rightarrow\; a(b - b') \in S.$$

Tetapi, $b - b'$ mungkin sembarang elemen di S dan a mungkin sebarang elemen di R. Hal ini berakibat bahwa S haruslah suatu ideal. Sebaliknya, bila S suatu ideal, maka perkalian koset terdifinisi dengan baik. Suatu akibat dari apa yang baru dibahas didapat bahwa bila R adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan, $\mathcal{I}$ adalah suatu ideal dari R, maka $R/\mathcal{I}$ adalah suatu ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian koset didefinisikan oleh

$$\begin{array}{rcl}(a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) & \stackrel{\text{def}}{=} & (a + b) + \mathcal{I} \\ (a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) & \stackrel{\text{def}}{=} & ab + \mathcal{I}\ .\end{array}$$

Dalam hal ini $R/\mathcal{I}$ dinamakan **Ring Kuasi** dari R modulo $\mathcal{I}$.

Suatu ideal $\mathcal{I}$ di suatu ring R adalah **Ideal Maksimal** bila $\mathcal{I} \neq R$ dan $\mathfrak{I}$ adalah suatu ideal yang memenuhi $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{I} \subseteq R$, maka $\mathfrak{I} = \mathcal{I}$ atau $\mathfrak{I} = R$.

Berikut ini satu alasan penting mengapa ideal maksimal adalah penting.

Teorema 2.3.1 Diberikan ring komutatif R yang mempunyai elemen satuan. Maka ring kuasi $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan bila dan hanya bila $\mathcal{I}$ adalah ideal maksimal.

Bukti
Ideal $\mathcal{I}$ maksimal di R, maka $R/\mathcal{I}$ adalah komutatif (sebab R komutatif). Jelas bahwa $1 + \mathcal{I}$ adalah elemen satuan di $R/\mathcal{I}$. Misalkan $a + \mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$ dengan $a + \mathcal{I}$ bukan elemen nol di $R/\mathcal{I}$, maka $a \notin \mathcal{I}$. Selanjutnya didefinisikan himpunan

$$\mathfrak{I} = \{ra + b \,|\, r \in R, b \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset,$$

sebab $0\ a + 0 = 0 \in \mathfrak{I}$. Dapat ditunjukkan bahwa $\mathfrak{I}$ adalah ideal di R sebagai berikut : Diberikan $x, y \in \mathfrak{I}$, pilih $r_1, r_2 \in R$ dan $b_1, b_2 \in \mathcal{I}$ yang memenuhi

$$x = r_1 a + b_1 \ \text{ dan } \ y = r_2 a + b_2.$$

Didapat

$$x - y = (r_1 a + b_1) - (r_2 a + b_2) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\in R}\ a + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in \mathcal{I}} \in \mathfrak{I}.$$

Terlihat bahwa $(\mathfrak{I}, +)$ subgrup dari R. Juga $r\mathfrak{I} = \{rb \,|\, r \in R, b \in \mathfrak{I}\} \subset \mathfrak{I}$, jadi $\mathfrak{I}$ adalah ideal dari R. Karena ideal $\mathcal{I}$ maksimal dan $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}$, maka $\mathfrak{I} = R$. Akibatnya dapat dipilih $b \in R, m \in \mathcal{I}$ yang memenuhi $1 = ba + m$. Didapat

$$1 + \mathcal{I} = ba + \mathcal{I} = (b + \mathcal{I})(a + \mathcal{I}).$$

Juga karena R ring komutatif, didapat

$$1 + \mathcal{I} = ab + \mathcal{I} = (a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}).$$

Terlihat bahwa setiap elemen taknol $a + \mathcal{I}$ di $R/\mathcal{I}$ mempunyai invers $b + \mathcal{I}$. Jadi $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan. Sebaliknya misalkan $\mathcal{I}$ ideal di R dan $R/\mathcal{I}$ adalah lapangan, maka $0 + \mathcal{I} = \mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$ dan $1 + \mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$. Jadi $\mathcal{I} \neq \{0\} = \langle 0 \rangle$. Selanjutnya misalkan $\mathfrak{I}$ suatu ideal di R dengan $\mathcal{I} \subset \mathfrak{I}$. Pilih $a \in \mathfrak{I}$ dan $a \neq \mathcal{I}$. Didapat $a + \mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$ dan $a + \mathcal{I}$ taknol di $R/\mathcal{I}$. Karena $R/\mathcal{I}$ lapangan, maka pilih $b + \mathcal{I} \in R/\mathcal{I}$ yang memenuhi

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I} = 1 + \mathcal{I}.$$

Akibatnya $ab + m = 1$ untuk suatu $m \in \mathcal{I}$ dan $1 \in \mathfrak{I}$. Jadi $r\ 1 = r \in \mathfrak{I}$ untuk semua $r \in R$. Dengan emikian $R \subset \mathfrak{I}$, tetapi $\mathfrak{I} \subset R$. Jadi $\mathfrak{I} = R$, maka dari itu $\mathcal{I}$ adalah ideal maksimal di R .

$\square$

Hasil berikut memberikan bahwa ideal maksimal selalu ada.

Teorema 2.3.2 Sebarang ring komutatif taknol R dengan elemen satuan memuat ideal maksimal.

Bukti
Karena R bukan ring nol, maka $\{0\}$ adalah ideal sejati dari R. Jadi bila S adalah himpunan semua ideal sejati dari R, maka $S \neq \emptyset$. Selanjutnya bila

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{I}_i \,|\, i \in I\}$$

adalah suatu rantai dari ideal-sejati di R, maka $\mathfrak{J} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{I}_i$ adalah ideal di R. Lagi pula bila $\mathfrak{J} = R$ adalah ideal taksejati, maka $1 \in \mathfrak{J}$ dan juga $1 \in \mathcal{I}_i$ untuk beberapa $i \in I$. Hal ini berakibat $\mathcal{I}_i = R$ adalah ideal taksejati. Dengan demikian $\mathfrak{J}$ adalah ideal sejati dan $\mathfrak{J} \in S$. Jadi sebarang rantai di S mempunyai suatu batas atas terbatas di S dan dengan menggunakan lemma Zorn didapat bahwa S mempunyai suatu elemen maksimal. Hal ini menunjukkan bahwa R mempunyai suatu ideal maksimal.
□

Berikut ini diberikan pengertian dari Daerah Integral. Misalkan R adalah suatu ring. Suatu elemen taknol $r \in R$ dinamakan suatu **pembagi nol** bila ada suatu elemen taknol $s \in R$ yang memenuhi $rs = 0$. Suatu ring komutatif R yang memuat elemen satuan dinamakan **Daerah Integral** bila R tidak memuat pembagi nol.

Contoh 2.3.1 Bila n bukan bilangan bulat prima, maka ring $\mathbb{Z}_n$ memuat pembagi nol. Jadi $\mathbb{Z}_n$ bukan daerah integral. Hal ini bisa dilihat sebagai berikut. Karena n bukan prima, maka $n = ab$ di $\mathbb{Z}$ dengan $a, b \geq 2$. Tetapi di $\mathbb{Z}_n$, didapat

$$a \odot b = ab \mod n = 0.$$

Jadi a dan b keduanya adalah pembagi nol.
□

Contoh 2.3.2 Ring polinomial $F[x]$ adalah daerah integral, sebab bila $p(x), q(x) \in F[x]$ dan $p(x)q(x) = 0$, maka $p(x) = 0$ atau $q(x) = 0$.
□

Bila R adalah suatu ring dan $rx = ry$ dengan $r, x, y \in R$, maka secara umum tidak bisa dilakukan hukum kanselasi untuk r. Hal ini bila dilakukan didapat $x = y$. Contoh, di ring $\mathbb{Z}_4$, didapat $2 \,.\, 3 = 2 \,.1$. Bila dilakukan kanselasi terhadap 2, didapat $3 = 1$. Hal ini tentunya tidak benar. Bagaimanapun bila ring R mempunyai struktur daerah integral, maka dapat dilakukan hukum kanselasi. Pernyataan ini diberikan dalam teorema berikut dan buktinya sederhan kita tinggalkan.

Teorema 2.3.3 Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan. Maka R adalah Daerah Integral bila dan hanya bila berlaku hukum kanselasi

$$rx = ry, r \neq 0 \implies x = y.$$

□

2.4 Lapangan Pecahan dari suatu Daerah Integral

Sebarang daerah integral R bisa dilekatkan dalam suatu lapangan. **Lapangan Pecahan** dari R adalah lapangan yang dikonstruksi dari R seperti halnya mengkontruksi bilangan rasional dari bilangan bulat. Secara khusus, himpunan

$$R^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(p,q)\,|\,p,q \in R, q \neq 0\},$$

yang mana $(p,q) = (p',q')$ bila dan hanya bila $pq' = p'q$. Penjumlahan dan perkalian didefinisikan oleh

$$(p,q) + (r,s) \stackrel{\text{def}}{=} (ps + qr, qs)$$

dan

$$(p,q).(r,s) \stackrel{\text{def}}{=} (pr, qs).$$

Didalam kebiasaannya (p,q) ditulis dalam bentuk p/q. Catatan bahwa, bila R mempunyai pembagi nol, maka definisi tidak mempunyai arti. Sebab qs bisa sama dengan 0 walaupun q dan s keduanya tidak sama dengan 0. Hal ini mengisyaratkan bahwa dibutuhkan R adalah daerah integral.

Misalkan bahwa R adalah ring dengan elemen satuan dan $a \in R$. **Ideal Utama** yang dibangun oleh a adalah ideal

$$\langle a \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{ra\,|\,r \in R\}.$$

Suatu daerah integral R yang mana setiap ideal adalah ideal utama dinamakan **Daerah Ideal Utama**.

Teorema 2.4.1 Himpunan bilangan bulat membentuk suatu Daerah Ideal Utama. Faktanya, sebarang ideal $\mathcal{I}$ di $\mathbb{Z}$ dibangun oleh oleh bilangan bulat positip terkecil yang termuat di $\mathcal{I}$.

□

Contoh, $\mathcal{I} = 2\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{2n\,|\,n \in \mathbb{Z}\} = \langle 2 \rangle$ adalah ideal di $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.4.2 Ring $F[x]$ adalah derah ideal utama. Faktanya sebarang ideal $\mathcal{I}$ di $F[x]$ dibangun oleh polinomial monik tunggal berderajad terkecil yang termuat di $\mathcal{I}$. Lagi pula, untuk polinomial $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$,

$$\langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle = \langle \gcd\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\} \rangle .$$

Bukti
Misalkan $\mathcal{I}$ adalah ideal di $F[x]$ dan $m(x)$ adalah suatu polinomial monik dengan derajad terkecil di $\mathcal{I}$. Polinomial $m(x)$ tunggal di $\mathcal{I}$. Sebab bila $n(x) \in \mathcal{I}$ adalah monik dan $\deg(n(x)) = \deg(m(x))$, maka

$$b(x) = m(x) - n(x) \in \mathcal{I},$$

karena $\deg(b(x)) < \deg(m(x))$, maka haruslah $b(x) = 0$. Jadi $n(x) = m(x)$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathcal{I} = \langle m(x) \rangle$. Karena $m(x) \in \mathcal{I}$, maka $\langle m(x) \rangle \subseteq \mathcal{I}$. Selanjutnya bila $p(x) \in \mathcal{I}$, maka lakukan pembagian $p(x)$ oleh $m(x)$, didapat

$$p(x) = q(x)m(x) + r(x),$$

dengan $r(x) = 0$ atau $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(m(x))$. Tetapi $\mathcal{I}$ adalah ideal, didapat

$$r(x) = p(x) - q(x)m(x) \in \mathcal{I}$$

jadi $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(m(x))$, hal ini adalah tidak mungkin. Dengan demikian haruslah $r(x) = 0$ dan

$$p(x) = q(x)m(x) \in \langle m(x) \rangle .$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{I} \subseteq \langle m(x) \rangle$. Jadi $\mathcal{I} = \langle m(x) \rangle$. Untuk membuktikan pernyataan kedua, misalkan

$$\mathcal{I} = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle .$$

Dari pembahasan yang telah dibuktikan didapat

$$\mathcal{I} = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle = \langle m(x) \rangle ,$$

dengan $m(x)$ adalah polinomial monik tunggal yang mempunyai derajad terkecil di $\mathcal{I}$. Khususnya, karena $p_i(x) \in \langle m(x) \rangle$, didapat $m(x)|p_i(x)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan kata lain, $m(x)$ adalah pembagi persekutuan dari $p_i(x)$. Lebih lanjut, bila $q(x)|p_i(x)$ untuk semua i, maka $p_i(x) \in \langle q(x) \rangle$ untuk semua i, hal ini berakibat bahwa

$$m(x) \in \langle m(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x) \rangle \subseteq \langle q(x) \rangle ,$$

jadi $q(x)|m(x)$. Hal ini menunjukkan bahwa $m(x)$ adalah pembagi persekutuan terbesar dari $p_i(x)$.

$\square$

Contoh 2.4.1 Ring himpunanan polinomial dengan dua peubah x dan y, yaitu $F[x, y]$ bukan suatu daerah ideal utama. Untuk melihat hal ini, perhatikan bahwa $\mathcal{I}$ adalah himpunan dari semua polinomial dengan suku konstan nol adalah suatu ideal di R. Andaikan bahwa $\mathcal{I}$ adalah utama yaitu $\mathcal{I} = \langle p(x) \rangle$. Karena $x, y \in \mathcal{I}$, maka ada polinomial $a(x, y)$ dan $b(x, y)$ yang memenuhi

$$x = a(x, y)p(x, y) \;\text{ dan }\; y = b(x, y)p(x, y). \tag{2.1}$$

Tetapi $p(x, y)$ tidak bisa suatu konstan, maka didapat $\mathcal{I} = R$. Jadi $\deg(p(x, y)) > 1$ dan $a(x, y), b(x, y)$ keduanya harus konstan. Hal ini bertentangan kenyataan 2.1. Jadi $\mathcal{I}$ bukan ideal utama.

$\square$

Teorema 2.4.3 Setiap Daerah Ideal Utama R memenuhi **kondisi rantai dengan urutan menaik**, yaitu R tidak bisa mempunyai barisan ideal yang naik

$$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \cdots \tag{2.2}$$

dengan $\mathcal{I}_i \neq \mathcal{I}_{i+1}$.

Bukti
Andaikan ada barisan sebagaimana diberikan oleh 2.2 dan misalkan ideal

$$U = \bigcup \mathcal{I}_i,$$

maka haruslah $U = \langle a \rangle$ untuk beberapa $a \in U$. Jadi $a \in \mathcal{I}_k$ untuk beberapa k, akibatnya $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_j$ untuk semua $j \geq k$. Hal bertentangan dengan kenyataan $\mathcal{I}_i \neq \mathcal{I}_{i+1}$. □

Berikut ini diberikan pengertian elemen prima pada sebarang daerah integral. Untuk $r, s \in R$, dikatakan bahwa r **membagi** s ditulis sebagai $r|s$ bila ada suatu $x \in R$ yang memenuhi $s = xr$.

Misalkan R adalah suatu daerah integral

1. Suatu elemen yang mempunyai invers terhadap perkalian dinamakan **unit**. Jadi, $u \in R$ adalah unit bila $uv = 1$ untuk beberapa $v \in R$.

2. Dua elemen $a, b \in R$ dikatakan **berasosiasi** bila ada unit u yang memenuhi $a = ub$, hal ini ditulis sebagai $a \sim b$.

3. Suatu elemen bukan-unit taknol $p \in R$ adalah **prima** bila
$$p|ab \;\Rightarrow\; p|a \text{ atau } p|b.$$

4. Suatu elemen bukan-unit taknol $r \in R$ adalah **tereduksi** bila
$$r = ab \;\Rightarrow\; a \text{ atau } b \text{ adalah unit.}$$

Catatan bahwa, pengertian unit $u \in R$ bila $uv = 1$ untuk beberapa $v \in R$, berakibat bahwa v juga unit dan perkalian dari dua unit u_1u_2 juga unit. Dari pengertian dua elemen yang berasosiasi, hal ini berakibat bahwa dua elemen tsb. ekivalen. Jadi pengertian berasosiasi adalah relasi ekivalen.

Teorema 2.4.4 Diberikan ring R.

1. Suatu elemen $u \in R$ adalah unit bila dan hanya bila $\langle u \rangle = R$.

2. Dua elemen $r, s \in$ berasosiasi yaitu $r \sim s$ bila dan hanya bila $\langle r \rangle = \langle s \rangle$.

3. Elemen r membagi s bila dan hanya bila $\langle s\rangle \subseteq \langle r\rangle$.

4. Elemen r **pembagi sejati** dari s, yaitu $s = xr$, yang mana x bukan suatu unit bila dan hanya bila $\langle s\rangle \subset \langle r\rangle$.

Bukti
Dibuktikan hanya pernyataan 2, sisanya bisa dibuktikan sendiri. Misalkan sebarang $x \in \langle r\rangle$ dan bila $r \sim s$ didapat,

$$x = ar \text{ untuk suatu } a \in R \text{ dan } r = us \text{ untuk suatu unit } u \in R.$$

Jadi $x = ar = a(us) = \overbrace{(au)}^{\in R} s$, terlihat bahwa $x \in \langle s\rangle$. Jadi $\langle r\rangle \subseteq \langle s\rangle$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\langle s\rangle \subseteq \langle r\rangle$. Sebaliknya bila $\langle r\rangle = \langle s\rangle$, maka $r \in \langle s\rangle$ dan $s \in \langle r\rangle$ atau

$$r = as, \text{ untuk suatu } a \in R \text{ dan } s = br, \text{ untuk suatu } b \in R.$$

Didapat $r = as = a(br) = (ab)r$. Jadi, $ab = 1$. Hal ini berakibat a dan b adalah unit di R. Dengan demikian $r \sim s$ atau r berasosiasi dengan s.

$\square$

Pada himpunan bilangan bulat, suatu bilangan bulat adalah prima bila dan hanya bila bilangan tsb. adalah tattereduksi. Pada sebarang Daerah Integral elemen-elemen prima adalah taktereduksi. Tetapi sebaliknya belum tenetu benar. Cotoh, pada ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5} = \{a + b\sqrt{-5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\},$$

elemen 2 membagi hasil perkalian

$$\left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(1 - \sqrt{-5}\right) = 6,$$

tetapi tidak membagi $\left(1 + \sqrt{-5}\right)$ dan juga tidak membagi $\left(1 - \sqrt{-5}\right)$. Apapun itu, pada daerah ideal utama, dua konsep keprimaan dan ketaktereduksian adalah ekivalen.

Teorema 2.4.5 Misalkan R adalah Daerah Ideal Utama.

1. Suatu elemen $r \in R$ taktereduksi bila dan hanya bila $\langle r\rangle$ adalah maksimal.

2. Suatu elemen $p \in R$ adalah prima bila dan hanya bila p adalah taktereduksi.

3. Elemen $a, b \in R$ adalah **prima relatif**, yaitu tidak mempunyai faktor persekutuan bukan unit, bila dan hanya bila ada $r, s \in R$ yang memenuhi

   $$ra + sb = 1.$$

   Hal ini ditulis sebagai $(a, b) = 1$.

Bukti

1. Misalkan bahwa r taktereduksi dan $\langle r\rangle \subseteq \langle a\rangle \subseteq R$. Maka

$$r \in \langle a\rangle \text{ dan juga } r = xa, \text{ untuk beberapa } x \in R.$$

   Ketaktereduksian dari r berakibat bahwa a atau x adalah suatu unit. Bila a adalah unit, maka $\langle a\rangle = R$ dan bila x unit, maka $\langle a\rangle = \langle xa\rangle = \langle r\rangle$. Didapat $\langle r\rangle \neq R$ sebab r bukan unit. Hal ini menunjukkan bahwa $\langle r\rangle$ maksimal. Sebaliknya, andaikan bahwa r tereduksi, yaitu $r = ab$ yang mana a atau b bukan unit. Maka $\langle r\rangle \subseteq \langle a\rangle \subseteq R$. Tetapi, bila $\langle a\rangle = \langle r\rangle$, maka $r \sim a$, hal ini berakibat bahwa b adalah unit. Jadi $\langle r\rangle \neq \langle a\rangle$. Juga, bila $\langle a\rangle = R$, maka a harus suatu unit. Dengan demikian $\langle r\rangle$ bukan ideal maksimal sebagaimana yang diharapkan.

2. Misalkan bahwa p dan $p = ab$. Maka $p|a$ atau $p|b$. Dari sini didapat $p|a$, jadi $a = px = (ab)x = a(bx)$. Gunakan hukum kanselasi, didapat $1 = bx$. Terlihat bahwa b adalah unit. Jadi p adalah taktereduksi. Sebaliknya, misalkan bahwa r taktereduksi dan $r|ab$. Akan ditunjukkan bahwa $r|a$ atau $r|b$. Ideal $\langle r\rangle$ adalah maksimal, maka $\langle r, a\rangle = \langle r\rangle$ atau $\langle r, a\rangle = R$. Dari $\langle r, a\rangle = \langle r\rangle$, didapat $a \in \langle r\rangle$. Jadi $a = xr$ untuk beberapa $x \in R$, dengan demikian $r|a$. Sedangkan dari $\langle r, a\rangle = R$, didapat

$$1 = xa + yr, \text{ untuk beberapa } x, y \in R.$$

   Didapat

$$b = xab + yrb.$$

   Karena r membagi $xab + yrb$, maka $r|b$.

3. Misalkan a dan b prima relatif maka ideal $\langle a, b\rangle$ adalah ideal utama, yaitu $\langle a, b\rangle = \langle x\rangle$ untuk suatu $x \in R$. Maka $x|a$ dan $x|b$ dan haruslah x suatu unit. Hal ini berakibat bahwa $\langle a, b\rangle = R$. Jadi, ada $r, s \in R$ yang memenuhi $ra + sb = 1$. Sebaliknya bila $ra + sb = 1$ untuk beberapa $r, s \in R$, maka jelas bahwa 1 pembagi persekutuan dari a dan b.

$\square$

2.5 Daerah Faktorisasi Tunggal

Suatu Daerah Integral R dinamakan suatu **Daerah Faktorisasi Tunggal** bila mempunyai sifat-sifat faktorisasi berikut:

1. Setiap elemen bukan-unit taknol $r \in R$ bisa ditulis sebagai produk dari sebanyak berhingga elemen taktereduksi $r = p_1 \ldots p_n$.

2. Faktorisasi menjadi elemen-elemen taktereduksi adalah tunggal dengan makna bila $r = p_1 \ldots p_n$ dan $r = q_1 \ldots q_m$ dua faktorisasi dari r, maka $m = n$ dan setelah diatur pengindeksan ulang, maka $p_i \sim q_i$.

Faktorisasi tunggal secara jelas adalah suatu sifat yang diperlukan. Daerah Ideal Utama adalah daerah faktorisasi tunggal sebagaimana diberikan pada pernyataan berikut.

Teorema 2.5.1 Setiap Daerah Ideal Utama R adalah suatu Daerah faktorisasi Tunggal.

Bukti
Misalkan $r \in R$ adalah bukan-unit taknol. Bila r taktereduksi sesuatu yang jelas sebagaimana diinginkan. Bila tidak, maka $r = r_1 r_2$ dengan r_1 dan r_2 bukan-unit. Bila r_1 dan r_2 adalah taktereduksi, maka didapat sesuai dengan yang diinginkan. Bila tidak, misalkan r_2 tereduksi. Maka $r_2 = r_3 r_4$ dengan r_3 bukan-unit atau r_4 bukan-unit. Lakukan cara faktorisasi ini bila perluh menyusun ulang indeksnya sehingga didapat bentuk

$$r = r_1 r_2 = r_1(r_3 r_4) = (r_1 r_3)(r_5 r_6) = (r_1 r_3 r_5)(r_7 r_8) = \ldots$$

Masing-masing langkah adalah suatu faktorisasi r menjadi suatu perkalian dari bukan-unit. Bagaimanapun proses yang telah dilakukan berhenti sampai berhingga langkah. Bila tidak hal ini akan menghasilkan suatu barisan bukan-unit di R, yaitu $s_1, s_2, \ldots$ yang mana s_{i+1} pembagi sejati dari s_i. Tetapi ini memberikan rantai urutan menaik dari ideal

$$\langle s_1 \rangle \subset \langle s_2 \rangle \subset \langle s_2 \rangle \subset \langle s_4 \rangle \subset \ldots$$

Hal ini bertentangan dengan fakta bahwa suatu daerah ideal utama memenuhi kondisi rantai yang menaik. Jadi, disimpulkan bahwa setiap bukan-unit taknol mempunyai suatu faktorisasi elemen-elemen taktereduksi. Untuk ketunggalan, bila

$$r = p_1 \ldots p_n \text{ dan } r = q_1 \ldots q_m$$

adalah dua faktorisasi dari r, maka karena R adalah daerah integral, dapat dilakukan kanselasi faktor yang sama melalui kedua persamaan. Sehingga didapat $p_i \neq q_j$ untuk semua i, j. Bila tidak ada faktor dikedua sisi persamaan, didapat hal yang diinginkan. Bila satu sisi tidak mempunyai faktor kiri, maka 1 adalah suatu pengali dari elemen-elemen taktereduksi. Hal ini tidak mungkin, sebab elemen-elemenn taktereduksi adalah bukan-unit. Misalkan kedua sisi mempunyai faktor kiri, maka

$$p_1 \ldots p_n = q_1 \ldots q_m, \text{ dengan } p_i \neq q_j,$$

dan andaikan $n \neq m$. Didapat $q_m | p_1 \ldots p_n$, hal ini berakibat $q_m | p_i$ untuk beberapa i. Dengan melakukan pengindeksan ulang didapat $p_n = a_n q_m$. Karena p_n taktereduksi, a_n harus suatu unit. Ganti p_n dengan $a_n q_m$ dan lakukan kanselasi q_m. Didapat

$$a_n p_1 \ldots p_{n-1} = q_1 \ldots q_{m-1}.$$

Ulangi proses sampai habis q atau p nya. Bila q nya habis lebih dulu, didapat bentuk

$$u p_1 \ldots p_k = 1, \text{ dengan } u \text{ adalah unit.}$$

Hal ini tidak mungkin sebab p_i bukan-unit. Dengan alasan yang sama bila q nya habis lebih dulu didapat

$$1 = v q_1 \ldots q_r, \text{ dengan } v \text{ adalah unit.}$$

Hal ini tidak mungkin sebab q_j bukan-unit. Dari kedua proses q nya habis lebih dulu atau p nya habis lebih dulu didapat hal yang kontradiksi. Jadi haruslah $n = m$ dan $p_i \sim q_i$. $\square$

Diberikan lagi suatu konsep yang telah dibahas yaitu pengertian dari **lapangan** atau **field**.

Suatu himpunan F dengan dua operasi biner **tambah** dan **kali** adalah suatu **lapangan** bila setidaknya memuat dua elemen yang memenuhi

1. Himpunan F terhadap operasi tambah adalah grup komutatif.
2. Himpunan semua elemen taknol di F, yaitu F^* adalah grup komutatif terhadap operasi kali.
3. Untuk semua $a, b, c \in F$, berlaku

$$(a+b)c = ac + bc \text{ dan } c(a+b) = ca + cb.$$

Contoh 2.5.1 Himpunan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{C}$ adalah lapangan terhadap operasi tambah dan kali sebagaimana biasa dilakukan pada bilangan rasional, riil dan kompleks.

$\square$

Contoh 2.5.2 Ring $\mathbb{Z}_n$ adalah lapangan bila dan hanya bila n adalah bilangan prima. Sebelumnya sudah diberikan contoh bahwa $\mathbb{Z}_n$ bukan lapangan bila n bukan prima. Karena lapangan adalah daerah integral dan misalkan $n = p$ adalah prima. Didapat Z_p adalah daerah integral. Tinggal menunjukkan bahwa setiap elemen taknol mempunyai invers terhadap operasi kali. Misalkan $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$. Karena $a < p$, a dan p prima relatif, maka dapat dipilih bilangan bulat u dan v yang memenuhi

$$ua + vp = 1.$$

Jadi

$$ua \equiv (-vp + 1) \equiv 1 \mod p,$$

dengan demikian $u \odot a = 1$ di $\mathbb{Z}_p$. Terlihat bahwa u adalah invers dari a terhadap operasi kali.

$\square$

Contoh 2.5.2 menunjukkan bahwa lapangan yang dibahas adalah lapangan berhingga. Faktanya lapangan berhingga memainkan peranan yang sungguh penting dalam berbagai area abstrak dan terapan matematika.

Suatu lapangan F dinamakan **tertutup secara aljabar** bila setiap polinomial takkonstan atas F mempunyai suatu akar di F atau ekivalen setiap polinomial takkonstan dapat dibagi atas F. Contoh, lapangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah **tertutup secara aljabar** sedangkan lapangan riil $\mathbb{R}$ tidak **tertutup secara aljabar**. Tanpa dibuktikan, dapat dikatakan bahwa setiap lapangan F termuat di suatu himpunan **tertutup secara aljabar** $\overline{F}$ yang dinamakan **penutup aljabar** dari F. Contoh, lapangan kompleks adalah **penutup aljabar** dari lapangan riil, yaitu $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$.

2.6 Karakteristik dari suatu Ring

Diberikan ring R dengan elemen satuan. Bila n adalah suatu bilangan bulat positip, maka $n.r$ adalah

$$n.r \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{r + r + \cdots + r}_{n}.$$

Selanjutnya, apa akibatnya bila ada bilangan bulat positip n sehingga

$$n.1 = 0.$$

Contoh, dalam $\mathbb{Z}_n$, didapat $n.1 = n = 0$. Dilain pihak, dalam $\mathbb{Z}$, persamaan $n.1 = 0$ berakibat $n = 0$. Jadi bilangan bulat positip n tidak mungkin ada.

Catatan bahwa, dalam sebarang ring berhingga, ada bilangan bulat n yang memenuhi sebagaimana dibahas, sebab barisan takberhingga bilangan

$$1.1, 2.1, 3.1, \ldots$$

adalah tidak semuanya berbeda, jadi $i.1 = j.1$ untuk beberapa $i < j$, bilamana $(j-i).1 = 0$.

Diberikan ring R dengan elemen satuan. Bilangan bulat positip terkecil k yang memenuhi $k.1 = 0$ dinamakan **karakteristik** dari R. Bila k tidak ada, maka R mempunyai karakteristik 0. Karakteristik dari R dinotasikan oleh $\text{char}(R)$.

Bila $\text{char}(R) = k$, maka untuk setiap $r \in R$, didapat

$$k.r = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{k} = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{k} r = 0.r = 0.$$

Teorema 2.6.1 Sebarang ring berhingga mempunyai karakteristik taknol. Sebarang daerah integral berhingga mempunyai karakteristik prima.

Bukti
Telah dibahas sebelumnya bahwa suatu ring berhingga mempunyai karakteristik taknol. Misalkan bahwa F adalah daerah integral berhingga dan $\text{char}(F) = k > 0$. Andaikan k tidak prima, maka $k = pq$, dengan $p, q < k$. Jadi $pq.1 = 0$, dengan demikian $(p.1)(q.1) =$. Hal ini berakibat $p.1 = 0$ atau $q.1 = 0$. Terlihat bertentangan dengan kenyataan bahwa k adalah bilangan positip terkecil yang memenuhi $k.1 = 0$. Jadi haruslah k adalah prima. $\square$

Catatan bahwa, dalam sebarang lapangan F yang mempunyai karakteristi sama dengan 2, didapat $2a = 0$ untuk semua $a \in F$. Jadi di F,

$$a = -a, \text{ untuk semua } a \in F.$$

Sifat lapangan berkarakter 2 cukup luar biasa. Sebagaimana terjadi, terdapat banyak kegunaan dari lapangan yang mempunyai karakteristik 2. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa semua lapangan berhingga yang banyaknnya elemen adalah p^n dengan p adalah prima dan untuk setiap pangkat prima p^n ada suatu lapangan yang banyaknya elemen adalah p^n. Faktanya, sesuai dengan makna isomorpisma ada tepat one lapangan berhingga yang banyaknya elemen sama dengan p^n.

Pembahasan yang terakhir pada bagian ini berkaitan struktur aljabar yang akan mempunyai kegunaan adalah suatu kombinasi dari suatu ruang vektor dan suatu ring. (Ruang vektor belum didefinisikan secara formal, tatapi diberikan lebih dulu sebelum definisi berikut yang dibutuhkan untuk suatu kemudahan).

Suatu **aljabar** $\mathcal{A}$ atas suatu lapangan F adalah suatu himpunan takkosong $\mathcal{A}$, bersama-sama dengan tiga operasi **tambah** $(+)$, **kali** dan **perkalian skalar** yang memenuhi

1. Himpunan $\mathcal{A}$ adalah ruang vektor atas F terhadap **tambah** dan **perkalian skalar**.
2. Himpunan $\mathcal{A}$ adalah ring terhadap **tambah** dan **kali**.
3. bila $r \in F$ dan $a, b \in \mathcal{A}$, maka
$$r(ab) = (ra)b = a(rb).$$

Jadi, suatu aljabar adalah suatu ruang vektor yang mana dapat dilakukan perkalian vektor dengan skalar di ring melalui perkalian setiap komponen vektornya.

Bab 3

Ruang Vektor

Pada bab ini dibahas pengertian dari ruang vektor serta beberapa hal yang terkait.

Suatu himpunan V (elemen-elemennya dinamakan vektor) dengan dua operasi **tambah** dan **kali** dinamakan suatu. **Ruang vektor** atas lapangan F (elemen-elemennya dinamakan skalar) bila memenuhi:

1. Bila $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ dan
   - ⋄ $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
   - ⋄ $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
   - ⋄ Ada $\mathbf{0} \in V$ sehingga $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v},\ \forall \mathbf{v} \in V$
   - ⋄ Untuk setiap $\mathbf{v} \in V$ ada $-\mathbf{v} \in V$ sehingga
   $$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$
2. Bila $a, b \in F$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka $a\mathbf{v} \in V$ dan
   - ⋄ $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
   - ⋄ $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
   - ⋄ $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$ dan $1.\mathbf{v} = \mathbf{v}$
   - ⋄ $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Catatan bahwa, sifat yang pertama menyatakan bahwa V adalah grup komutatif terhadap operasi tambah.

Suatu ruang vektor atas lapangan F adakalanya dinamakan suatu **ruang-F**. Ruang vektor atas lapangan ril $\mathbb{R}$ dinamakan **Ruang Vektor Riil**, sedangkan ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$ dinamakan **Ruang Vektor Kompleks**.

Misalkan $S \subseteq V$ dengan $S \neq \emptyset$ dan V adalah suatu ruang vektor. Suatu **kombinasi linier** dari vektor-vektor di S adalah suatu ungkapan berbentuk

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n},$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ dan $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n} \in S$. Skalar a_i dinamakan **koefisien** dari kombinasi linier. Suatu kombinasi linier adalah **trivial** bila setiap koefisien a_i adalah nol. Bila tidak demikian adalah **non-trivial**.

Contoh 3.0.1

1. Misalkan F adalah lapangan, himpunan semua fungsi

$$F^F \stackrel{\text{def}}{=} \{f : F \to F\}$$

adalah ruang vektor atas F dengan operasi tambah dan kali didefinisikan oleh

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$$

dan

$$(af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} a(f(x)).$$

2. Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen di suatu lapangan F, yaitu $M_{m\times n}(F)$ adalah suatu ruang vektor atas F terhadap operasi tambah dan perkalian matriks sebagaimana biasanya.

3. Diberikan suatu lapangan F, himpunan n-pasangan terurut F^n adalah suatu ruang vektor atas F. Operasi tambah dan perkalian dengan skalar didefinisikan sebagai berikut:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

dan

$$c(a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n).$$

Ketika sesuai, elemen-elemen dari F^n juga dituliskan dalam bentuk kolom. Bila F adalah berhingga, lapangan F_q adalah lapangan dengan elemen-elemen q, maka ruang vektor F_q^m ditulis sebagai $V(m, q)$.

4. Berbagai ruang barisan adalah ruang vektor. Himpuan dari semua barisan berhingga dengan elemen-elemen di lapangan F, yaitu $\mathrm{Bar}(F)$ adalah suatu ruang vektor atas F dengan operasi tambah dan perkalian skalar diberikan oleh:

$$(s_n) + (t_n) \stackrel{\text{def}}{=} (s_n + t_n)$$

dan

$$a(s_n) \stackrel{\text{def}}{=} (as_n).$$

Dengan cara yang sama, himpunan dari semua barisan bilangan kompleks yang konvergen ke 0, yaitu c_0 adalah ruang vektor atas $\mathbb{C}$ seperti halnya himpunan dari semua barisan kompleks terbatas, yaitu l^∞. Juga bila p adalah bilangan bulat positip, maka himpunan semua barisan bilangan bilangan kompleks (s_n), yaitu l^p yang memenuhi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p < \infty$$

adalah ruang vektor atas $\mathbb{C}$. Untuk menunjukkan operasi tambah adalah operasi biner pada l^p digunakan **pertaksamaan Minkowski**

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n + t_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p\right)^{1/p} + \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p\right)^{1/p}.$$

□

3.1 Ruang bagian

Kebanyakan struktur aljabar memuat sub-struktur, begitu halnya dengan reuang vektor.

Misalkan V adalah ruang vektor atas F dan suatu himpunan bagian takkosong $S \subset V$ dinamakan **ruang bagian** bila terhadap operasi yang sama di V, himpunan S memenuhi kondisi ruang vektor. Digunakan notasi $S \leq V$ untuk menyatakan S adalah ruang bagian dari V dan $S < V$ untuk menyatakan bahwa S adalah **ruang bagian sejati** dari V. **Ruang nol** dari V adalah $\{0\}$.

Berikut ini diberikan kondisi bahwa suatu himpunan bagian dari suatu ruang vektor adalah ruang bagian.

Teorema 3.1.1 Himpunan bagian takkosong S dari suatu ruang vektor V atas F adalah ruang bagian dari V bila dan hanya bila

$$a, b \in F, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \Rightarrow a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in S.$$

□

Contoh 3.1.1 Diberikan ruang vektor $V(n, 2)$ adalah himpunan dari n-pasangan terurut dari elemen-elemen 0 dan 1. **Bobot** $W(\mathbf{v})$ dari suatu vektor $\mathbf{v} \in V(n, s)$ adalah banyaknya koordinat taknol di $\mathbf{v}$. Contoh, $W(101010) = 3$. Misalkan E_n adalah himpunan dari vektor-vektor di V dengan bobot genap. Maka E_n adalah ruang bagian dari $V(n, 2)$. Sebab hal ini bisa diselidiki sebagai berikut

$$W(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = W(\mathbf{u}) + W(\mathbf{v}) - 2W(\mathbf{u} \cap \mathbf{v}),$$

dengan $\mathbf{u} \cap \mathbf{v}$ adalah vektor-vektor di $V(n,2)$ yang mempunyai komponen ke-i adalah hasil kali dari komponen ke-i dari vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, yaitu

$$(\mathbf{u} \cap \mathbf{v})_i = u_i.v_i \ .$$

Dengan demikian terlihat bahwa bila $W(\mathbf{u})$ dan $W(\mathbf{v})$ genap, maka $W(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ juga genap. Selanjutnya, jelas bahwa perkalian atas skalar F_2 dengan vektor di $V(n,2)$ juga menghasilkan vektor di $V(n,2)$. Jadi E_n adalah ruang bagian dari $V(n,2)$. Ruang vektor E_n dinamakan **ruang-bagian berbobot genap** dari ruang $V(n,2)$. □

Contoh 3.1.2 Sebarang ruang-bagian dari ruang vektor $V(n,q)$ dinamakan ***linear code***. Dari berbagai *code*, *linear code* adalah yang paling penting. Sebab strukturnya memberikan effisiensi untuk *encoding* dan *decoding* suatu informasi.

Pembahasan berikut berkenaan dengan apa yang dinamakan **ruang-bagian *Lattice***. Diberikan ruang vektor V atas F dan himpunan dari semua ruang-bagian dari V yang dinotasikan oleh $S(V)$. Himpunan $S(V)$ adalah himpunan terurut secara parsial oleh inklusi himpunan. Ruang nol $\{0\}$ adalah elemen terkecil di $S(V)$ dan ruang V adalah elemen terbesar.

Bila $S, T \in S(V)$, maka $S \cap T$ adalah ruang-bagian terbesar termuat di S dan di T. Dalam istilah inklusi himpunan, $S \cap T$ adalah batas bawah terbesar dari S dan T:

$$S \cap T = \mathrm{glb}\{S, T\}.$$

Hal yang serupa, bila $\{S_i \,|\, i \in K\}$ sebarang koleksi dari ruang-bagian dari V, semua irisannya adalah batas bawah terbesar dari ruang-bagiannya:

$$\bigcap_{i \in K} S_i = \mathrm{glb}\{S_i \,|\, i \in K\}.$$

Dilain pihak, bila $S, T \in S(V)$ (dan F berhingga), maka $S \cup T \in S(V)$ bila dan hanya bila $S \subseteq T$ atau $T \subseteq S$.

Teorema 3.1.2 Suatu ruang vektor taktrivial V atas lapangan takberhingga F bukan gabungan dari sebanyak berhingga dari himpunan-himpunan ruan-bagian sejatinya.

Bukti

Andaikan bahwa V adalah gabungan dari sebanyak berhingga dari himpunan-himpunan ruan-bagian sejatinya, yaitu $V = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, yang mana dalam hal ini dapat diasumsikan bahwa

$$S_1 \nsubseteq S_2 \cup \cdots \cup S_n,$$

dengan S_i adalah ruang-bagian dari V. Misalkan $\mathbf{w} \in S_1 \backslash (S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ dan $\mathbf{v} \notin S_1$. Perhatikan himpunan tak berhingga berikut

$$A = \{r\mathbf{w} + \mathbf{v} \,|\, r \in F\}$$

adalah himpunan "garis" melalui $\mathbf{v}$, sejajar dengan $\mathbf{w}$. Jelas bahwa masing-masing S_i memuat setidaknya satu vektor dari himpunan A, sebab $A \subseteq V$. Selanjutnya dibahas dua keadaan elemen-elemen di A. Bila $r\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S$, dengan $r \neq 0$, maka $\mathbf{w} \in S_1$. Hal ini berakibat $\mathbf{v} \in S_1$; dan bertetangan dengan syarat himpunan A. Selanjutnya bila $r_1\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S_i$ dan $r_2\mathbf{w} + \mathbf{v} \in S_i$ untuk $i \geq 2$ dengan $r_1 \neq r_2$, didapat

$$(r_1\mathbf{w} + \mathbf{v}) - (r_2\mathbf{w} + \mathbf{v}) = (r_1 - r_2)\mathbf{w} \in S_i.$$

Karena S_i adalah ruang-bagian dari V, maka $\mathbf{w} \in S_i$, untuk $i \geq 2$. Hal ini bertentangan dengan syarat himpunan A. Jadi pengandaian $V = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ tidak benar. $\square$

Untuk menentukan ruang-bagian terkecil dari V yang memuat ruang-bagian S dan T, diperluhkan pengertian berikut. Misalkan S dan T adalah ruang-bagian dari V. **Jumlah** $S + T$ didefinisikan oleh

$$S + T \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} \in S, \mathbf{v} \in T\}.$$

Secara lebih umum, **jumlah** sebarang koleksi dari ruang-bagian, yaitu $\{S_i \,|\, i \in K\}$ adalah himpunan dari semua jumlahan berhingga vektor-vektor di himpunan gabungan $\cup S_i$:

$$\sum_{i \in K} S_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} + \cdots + \mathbf{s_n} \,\middle|\, s_j \in \bigcup_{i \in K} S_i \right\}$$

Tampa kesulitan yang berarti, dapat dibuktikan bahwa jumlah dari sebarang koleksi ruang-bagian dari V adalah ruang bagian dari V dan jumlahan tersebut adalah batas atas terkecil dengan makna inklusi himpunan:

$$S + T = \text{lub}\{S, T\}.$$

Secara lebih umum,

$$\sum_{i \in K} S_i = \text{lub}\{S_i \,|\, i \in K\}.$$

Bila suatu himpunan terurut secara parsial P mempunyai sifat setiap pasangan elemen mempunyai suatu batas atas terkecil dan suatu elemen terbesar mempunyai sifat bahwa setiap koleksi dari elemen-elemen mempunyai suatu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar, maka P dinamakan **lattice lengkap**. Batas atas terkecil dari suatu koleksi juga dinamakan ***join*** dari koleksi dan batas bawah terbesar dinamakan ***meet***.

Teorema 3.1.3 Himpunan semua ruang-bagian dari ruang vektor V, yaitu $\mathcal{S}(V)$ adalah suatu lattice lengkap terhadap inklusi himpunan dengan elemen terkecil $\{0\}$, elemen terbesar dari V, yaitu *meet* adalah

$$\text{glb}\{S_i \,|\, i \in K\} = \bigcap_{i \in K} S_i$$

sedangkan *join* adalah

$$\text{lub}\{S_i \,|\, i \in K\} = \sum_{i \in K} S_i.$$

$\square$

3.2 Jumlahan Langsung

Berikut ini dibahas mengkonstruksi ruang vektor baru dari ruang vektor yang diberikan.

Misalkan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ adalah ruang vektor atas suatu lapangan F. **Jumlahan Langsung** dari $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dinotasikan oleh

$$V = V_1 \boxplus V_2 \boxplus \cdots \boxplus V_n$$

adalah ruang vektor V yang mempunyai n-pasang terurut:

$$V = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \,|\, v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dengan operasi tambah

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

dan perkalian dengan skalar $r \in F$

$$r(v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} (rv_1, rv_2, \ldots, rv_n)$$

Contoh 3.2.1 Ruang vektor F^n adalah jumlahan langsung dari F sebanyak n, yaitu

$$F^n = \underbrace{F \boxplus F \boxplus \cdots \boxplus F}_{n}.$$

$\square$

Konstruksi tsb. dapat dibuat umum pada sebarang koleksi dari ruang vektor yaitu dari konsep n-pasang terurut $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ke suatu fungsi $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup V_i$ dengan sifat $f(i) \in V_i$

Misalkan $\mathcal{F} = \{V_i \,|\, i \in K\}$ dengan V_i adalah ruang vektor atas F. **Produk Langsung** d ari $\mathcal{F}$ adalah ruang vektor

$$\prod_{i \in K} V_i = \left\{ f : K \to \bigcup_{i \in K} V_i \;\middle|\; f(i) \in V_i \right\}.$$

Support dari suatu fungsi $f : K \to \bigcup\limits_{i \in K} V_i$ adalah himpunan

$$\text{supp}(f) = \{i \in K \mid f(i) \neq 0\}.$$

Jadi, suatu fungsi f mempunyai **support berhingga** bila $f(i) = 0$ untuk semua, tetapi sebanyak berhingga $i \in K$. **Jumlahan Langsung Eksternal** dari $\mathcal{F}$ adalah ruang vektor

$$\bigoplus_{i\in K}^{\text{ext}} V_i = \left\{ f : K \to \bigcup_{i\in K} V_i \;\middle|\; f(i) \in V_i, f \text{ mempunyai support berhingga} \right\}.$$

Suatu kasus khusus penting terjadi bila $V_i = V$ untuk semua $i \in K$. Bila V^K menyatakan himpunan semua fungsi dari K ke V dan $\left(V^K\right)_0$ menyatakan himpunan semua fungsi di V^K yang mempunyai support berhingga, maka

$$\prod_{i\in K} V = V^K \quad \text{dan} \quad \bigoplus_{i\in K}^{\text{ext}} V = \left(V^K\right)_0.$$

Catatan bahwa produk langsung dan jumlahan langsung eksternal adalah sama untuk suatu famili berhingga dari ruang-bagian.

Suatu versi internal dari konstruksi jumlahan langsung lebih sering relevan.

Suatu ruang vektor V adalah **jumlahan langsung (internal)** suatu famili

$$\mathcal{F} = \{S_i \,|\, i \in I\}$$

dari ruang-bagian V, ditulis

$$V = \bigoplus \mathcal{F} \quad \text{atau} \quad V = \bigoplus_{i\in I} S_i,$$

bila memenuhi:

1. (**Join of the family**) V adalah jumlah (join) dari famili $\mathcal{F}$:

$$V = \sum_{i\in I} S_i.$$

2. (**Independence of the family**) Untuk setiap $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j\neq i} S_i \right) = \{0\}.$$

Dalam kasus ini, masing-masing S_i dinamakan suatu **penjumlah langsung** dari V. Bila $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ adalah suatu famili berhingga, jumlahan langsung sering ditulis sebagai

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

Bila $V = S \oplus T$, maka T dinamakan suatu **komplemen** dari S di V.

Catatan bahwa, kondisi pada bagian 2. dari difinisi yang telah dibahas sebelumnya adalah lebih kuat dari pada menyatakan bahwa anggota-anggota dari $\mathcal{F}$ adalah berpasangan saling asing:

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \text{ untuk semua } i \neq j \in I.$$

Selanjutnya, bila S dan T adalah ruang bagian dari V, maka jumlahan $S+T$ selalu ada. Apapun itu, jumlahan langsung $S \oplus T$ ada berkibat bahwa $S \cap T = \{0\}$. Jadi jumlah $S+T$ selalu ada, tetapi jumlahan langsung $S \oplus T$ tidak selalu ada. Pernyataan yang dibahas ini dapat digunakan pada famili ruang bagian dari V.

Perluh diperhatikan bahwa, apa yang telah dibahas mengenai konsep pengertian jumlahan langsung internal dan eksternal adalah dua konsep yang ekivalen (isomorpik). Untuk alasan ini, maka istilah jumlahan langsung sering digunakan tampah menyebutkan kualifikasinya. Teorema berikut mudah dibuktikan.

Teorema 3.2.1 Sebarang ruang-bagian dari suatu ruang vektor mempunyai suatu komplemen, yaitu bila S adalah suatu ruang-bagian dari V, maka ada suatu ruang bagian T yang memenuhi $V = S \oplus T$.

$\square$

Perluh diperhatikan bahwa secara umum suatu ruang bagian mempunyai banyak komplemen (walaupun ruang-bagian tsb. isomorpik). Hal ini bisa diselidiki di $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.2 Misalkan $\mathcal{F} = \{S_i \,|\, i \in I\}$ adalah famili dari ruang-bagian yang berbeda di V. Maka berikut ini adalah ekivalen:

1. Untuk masing-masing $i \in I$,

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}.$$

2. Vektor nol 0 tidak dapat ditulis sebagai suatu jumlah dari vektor-vektor taknol dari ruang-bagian di $\mathcal{F}$.

3. Setiap vektor taknol $v \in V$ diungkapkan secara tunggal kecuali urutan suku-sukunya sebagai jumlahan

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

dari vektor-vektor taknol dari ruang-bagian berbeda di $\mathcal{F}$.

Jadi, suatu jumlahan

$$V = \sum_{i \in I} S_i$$

adalah jumlahan langsung bila dan hanya bila $1-3$ dipenuhi.

Bukti
Andaikan bahwa 2. tidak dipenuhi, yaitu

$$0 = s_{j_1} + s_{j_2} + \cdots + s_{j_n},$$

dengan $s_{j_i} \neq 0$ dan $s_{j_i} \in S_{j_i}$. Maka untuk $n > 1$ didapat

$$-s_{j_1} = s_{j_2} + \cdots + s_{j_n}.$$

Hal ini bertentangan dengan 1. Jadi haruslah, bila memenuhi pernyataan 1. maka pernyataan 2. dipenuhi. Selanjutnya bila 2. dipenuhi dan

$$v = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \text{ dan } v = t_1 + t_2 + \cdots + t_m.$$

Didapat

$$0 = s_1 + s_2 + \cdots + s_n - t_1 - t_2 \cdots - \cdots - t_m.$$

Dengan mengumpulkan suku-suku yang sama dari ruang bagian yang sama, dapatlah dituliskan sebagai

$$0 = (s_{i_1} - t_{i_1}) + \cdots + (s_{i_k} - t_{i_k}) + s_{i_{k+1}} + \cdots + s_{i_n} - t_{i_{k+1}} - \cdots - t_{i_m}$$

Karena pernyataan 2. dipenuhi, maka $n = m = k$ dan $_{i_p} = t_{i_p}$ untuk semua $p = 1, 2, \ldots, k$. Jadi, bila 2. dipenuhi berakibat bahwa 3. dipenuhi. Akhirnya, misalkan 3. dipenuhi. Andaikan sebarang vektor taknol v memenuhi

$$0 \neq v \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right),$$

maka $v = s_i \in S_i$ dan

$$s_i = s_{j_1} + \cdots + s_{j_n},$$

dengan $s_{j_k} \in S_{j_k}$ adalah vektor taknol. Hal ini bertentangan dengan 3. Jadi haruslah

$$\{0\} = S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right).$$

Dengan demikian bila 3. dipenuhi, maka berakibat 1. dipenuhi.

□

Contoh 3.2.2 Sebarang matriks $A \in M_{n \times n}$ dapat ditulis sebagai

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = B + C, \tag{3.1}$$

dengan A^t adalah transpose dari A. Mudah ditunjukkan bahwa B adalah matriks simetri dan C adalah matriks simetri-miring. Jadi, bentuk 3.1 adalah suatu dekomposisi dari matriks A sebagai jumlah dari suatu matriks simetri dan matriks simetri-miring.

Karena himpunan Sym (himpunan semua matriks simetri) dan SkewSym (himpunan semua matriks simetri-miring) adalah ruang-bagian dari $M_{n\times n}$, didapat

$$M_{n\times n} = \mathrm{Sym} + \mathrm{SkewSym}.$$

Lagi pula, bila $S+T = S'+T'$, dengan S, S' simetri dan T, T' simetri-miring, maka matriks

$$U = S - S' = T - T'$$

adalah matriks simetri, sekaligus simetri-miring. Jadi, asalkan $\mathrm{char}(F) \neq 2$, didapat $U = 0$. Dengan demikian $S = S'$ dan $T = T'$. Jadi

$$M_{n\times n} = \mathrm{Sym} \oplus \mathrm{SkewSym}.$$

□

3.3 Himpunan Pembentang dan Bebas Linier

Suatu himpunan vektor **membentang** suatu ruang vektor bila setiap vektor dapat dituliskan sebagai suatu kombinasi linier dari beberapa vektor di himpunan tsb. Berikut ini difinisi formalnya.

Ruang-bagian yang dibentangkan (juga dinamakan **Ruang bagian yang dibangun**) oleh $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor di S yang dinotasikan sebagai:

$$\langle S\rangle = \mathrm{span}(S) = \{r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n \,|\, r_i \in F, v_i \in S\}.$$

Bila $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu himpunan berhingga, digunakan notasi $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ atau $\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Suatu himpunan himpunan $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ dikatakan **membentang** V atau **membangun** V, bila $V = \mathrm{span}(S)$.

Jelas bahwa sebarang superset dari suatu himpunan pembentang juga suatu himpunan pembentang. Catatan bahwa, semua ruang vektor mempunyai himpunan pembentang, sebab V membangun dirinya sendiri.

Pengertian bebas linier adalah suatu konsep yang fundamental. Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F. Suatu $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ adalah **bebas linier** bila sebarang vektor berbeda $s_1, s_2, \ldots, s_n$ di S, memenuhi

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = 0 \;\Rightarrow\; a_i = 0, \text{ untuk semua} i.$$

Dengan kata lain, S bebas linier bila kombinasi linier dari vektor-vektor di S sama dengan nol, maka semua koefisiennya adalah nol. Bila S tidak bebas linier dinamakan **bergantungan linier**.

Perluh diperhatikan bahwa, suatu himpunan bebas linier tidak memuat vektor nol, sebab $1.0 = 0$ yang bertentangan dengan pengertian bebas linier.

Selanjutnya, ungkapan $0 = s_1 + (-1s_1)$ mempunyai dua intepretasi. Satu, $0 = as_1 + bs_1$, dengan $a = 1$ dan $b = -1$, tetapi hal ini tidak mencakup vektor-vektor yang berbeda. Jadi hal ini tidak relevan dengan pengertian bebas linier. Intepretasi yang lain adalah $0 = s_1 + t_1$, dengan $t_1 = -s_1 \neq s_1$ (asumsi bahwa $s_1 \neq 0$). Jadi, bila S bebas linier, maka S tidak bisa memuat s_1 dan $-s_1$ secara bersamaan.

Misalkan diberikan ruang vektor V dan $S \subset V$ dengan $S \neq \emptyset$ suatu vektor taknol $v \in V$ dikatakan **secara esensial tunggal** kombinasi linier dari vektor-vektor di S bila ada **hanya satu cara** mengungkapkan v sebagai suatu kombinasi linier

$$v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n,$$

dengan s_i adalah vektor-vektor yang berbeda di S dan koefisien a_i adalah taknol. Secara langsung, $v \neq 0$ secara esensial unggal t kombinasi linier dari vektor-vektor di S bila $v \in \langle S \rangle$ dan bilamana

$$v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n \text{ dan } v = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \cdots + b_m t_m,$$

yang mana semua s_i dan t_i berbeda, dan semua koefisiennya taknol, maka $m = n$ dan bila perluh setelah diindeks ulang didapat $a_i = b_i$ dan $s_i = t_i$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$.

Berikut ini diberikan sifat dari bebas linier.

Teorema 3.3.1 Misalkan V adalah ruang vektor dan $\{0\} \neq S \subset V$. Pernyataan berikut adalah ekivalen:

1. Himpunan S bebas linier.
2. Setiap vektor taknol $v \in \text{span}(S)$ adalah secara esensial tunggal kombinasi linier dari vektor-vektor di S.
3. Tidak ada vektor di S sebagai suatu kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya di S.

Bukti
Misalkan 1. dipenuhi, maka

$$0 \neq v = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b_1 t_1 + b_2 t_2 + \cdots + b_m t_m,$$

dengan vektor-vektor s_i adalah berbeda begitu juga t_i dan semua koefisiennya taknol. Dengan mengurangi dan mengelompokkan s_i dan t_i yang sama, didapat

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{i_1} - b_{i_1}) s_{i_1} + \cdots + (a_{i_k} - b_{i_k}) s_{i_k} \\ &\quad + a_{i_{k+1}} s_{i_{k+1}} + \cdots + a_{i_n} s_{i_n} \\ &\quad - b_{i_{k+1}} t_{i_{k+1}} - \cdots - b_{i_m} t_{i_m} \end{aligned}$$

Dengan kenyataan 1. dipenuhi, maka haruslah $n = m = k$, $a_{i_j} = b_{i_j}$ dan $s_{i_j} = t_{i_j}$ untuk semua $j = 1, 2, \ldots k$. Hal ini berakibat kondisi 2. dipenuhi. Bila 1. dipenuhi dan andaikan $s \in S$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya

$$s = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n,$$

dengan $s_i \neq s_j$, untuk $i \neq j$ dan $s \neq s_j$ untuk semua $i =, 1, 2, \ldots, n$. Didapat

$$a.s + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0, \ a = -1.$$

Karena S bebas linier, maka $a_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$ dan $a = 0$. Hal ini tidak mungkin sebab $a = -1$. Jadi haruslah $s \in S$ bukan kombinasi linier dari vektor-vektor yang lainnya di S. Misalkan 3. dipenuhi dan andaikan

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0, \ a_1 \neq 0,$$

dengan s_i adalah berbeda, maka

$$s_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n).$$

Hal ini bertentangan dengan kenyataan 3. dipenuhi. Jadi haruslah

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0,$$

dengan s_i berbeda berakibat $a_1 = 0$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Jadi S bebas linier. $\square$

Teorema berikut berkaitan dengan pengerttian himpunan pembentang dan bebas linier.

Teorema 3.3.2 Misalkan S adalah subset dari ruang vektor V atas lapangan F. Pernyataan berikut adalah ekivalen:

1. S bebas linier dan membangun V.
2. Setiap vektor taknol $v \in V$ adalah secara esensial tunggal kombinasi linier dari vektor-vektor di S.
3. S adalah suatu himpunan pembentang minimal, yaitu S membangun V tetapi sebarang himpunan bagian sejati dari S tidak bisa membangun V.
4. S adalah suatu himpunan bebas linier maksimal, yaitu S adalah bebas linier, tetapi sebarang superset sejati dari S tidak bebas linier.

Bukti
Dari hasil sebelumnya sudah ditunjukkan bahwa pernyataan 1. dan 2. adalah ekivalen. Misalkan pernyataan 1. dipenuhi. Maka S adalah suatu himpunan pembentang. Bila $S' \subset S$ juga membangun V, maka sebarang vektor di $v \in S - S'$ adalah kombinasi linier

dari vektor-vektor di S'. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa vektor-vektor di S adalah bebas linier. Jadi pernyataan 1. berakibat pernyataan 3. Sebaliknya, bila S adalah himpunan pembentang minimal dan andaikan S tidak bebas linier, maka beberapa vektor $s \in S$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor lainnya di S. Jadi $S - \{s\}$ adalah himpunan pembentang subset sejati dari S. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S adalah himpunan pembentang minimal. Jadi pernyataan 3. berkibat pernyataan 1. Lagi, misalkan pernyataan 1. dipenuhi dan andaikan S tidak maksimal. Maka ada $v \in V - S$ yang mana himpunan $S \cup \{v\}$ adalah bebas linier, tetapi v tidak di S. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S membangun V. Jadi haruslah S himpunan maksimal yang bebas linier. Dengan demikian pernyataan 1. berakibat pernyataan 4. Sebaliknya, bila S adalah suatu himpunan maksimal bebas linier dan andaikan S tidak membangun V, maka bisa didapat suatu vektor $v \in V - S$ yang bukan merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor di S. Jadi, $S \cup \{v\}$ adalah suatu suatu superset sejati dari S yang bebas linier. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa S adalah suatu himpunan maksimal bebas linier. Jadi pernyataan 4. berakibat pernyataan 1. ◻

Suatu himpunan vektor-vektor di V yang memenuhi sebarang kondisi di pernyataan Teorema 3.3.2 dinamakan suatu **basis** dari V. Berikut ini adalah kesimpulan dari beberapa sifat yang telah dibahas.

Kesimpulan 3.3.1 Suatu himpunan berhingga vektor-vektor di V, yaitu $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu basis dari V bila dan hanya bila

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle .$$

◻

Contoh 3.3.1 Vektor baku ke-i di F^n adalah vektor e_i yang semua posisi koordinatnya sama dengan nol kecuali pada posisi ke-i sama dengan satu. Vektor-vektor baku ini adalah

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Himpunan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dinamakan **basis baku** untuk F^n. ◻

Teorema 3.3.3 Diberikan V adalah ruang vektor taknol. Misalkan I adalah suatu himpunan bebas linier di V dan S adalah suatu himpunan pembentang di V yang memuat I. Maka ada suatu basis $\mathcal{B}$ untuk V yang menenuhi $I \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$. Khususnya,

1. Sebarang ruang vektor, kecuali ruang nol $\{0\}$ mempunyai suatu basis.
2. Sebarang himpunan bebas linier di V termuat di dalam suatu basis untuk V.
3. Sebarang himpunan pembentang dari V memuat suatu basis untuk V.

Bukti
Misalkan $\mathcal{A}$ adalah koleksi subset bebas linier dari V yang memuat I dan termuat di S. Koleksi ini tidak kosong, sebab $I \in \mathcal{A}$. Bila

$$\mathcal{C} = \{I_k \,|\, k \in K\}$$

adalah suatu rantai, maka gabungan

$$U = \bigcup_{k \in K} I_k$$

adalah bebas linier dan memenuhi $I \subseteq U \subseteq S$. Terlihat bahwa $U \in \mathcal{A}$. Jadi sebarang rantai di $\mathcal{A}$ mempunyai batas atas di $\mathcal{A}$, dengan menggunakan lemma Zorn $\mathcal{A}$ memuat suatu elemen maksimal $\mathcal{B}$ yang bebas linier. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathcal{B}$ adalah suatu basis untuk ruang vektor $\langle S \rangle = V$. Ambil sebarang vektor $s \in S$ dan andaikan s bukan suatu kombinasi linier dari vektor-vektor di $\mathcal{B}$. Maka himpunan $\mathcal{B} \cup \{s\} \subseteq S$ adalah bebas linier. Hal ini bertentangan dengan $\mathcal{B}$ adalah maksimal. Jadi $S \subset \mathcal{B}$ dengan demikian $V = \langle S \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$.

□

Teorema 3.3.3 dapat digunakan untuk membuktikan bahwa sebarang ruang bagian dari suatu ruang vektor mempunyai suatu komplemen.

3.4 Dimensi Ruang Vektor

Hasil berikut dengan bukti klasik yang ilegan menyatakan bahwa bila suatu ruang vektor V mempunyai suatu pembentang S yang berhingga, maka banyaknya elemen-elemen sebarang himpunan bebas linier tidak akan melampaui banyaknya elemen-elemen S.

Teorema 3.4.1 Diberikan ruang vektor V atas lapangan F. Misalkan vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linier dan vektor-vektor $s_1, s_2, \ldots, s_m$ membentang V. Maka $n \leq m$.

Bukti
Andaikan $m < n$, buat daftar susunan dua himpunan vektor-vektor sebagai berikut :

$$s_1, s_2, \ldots, s_m \,;\, v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Kemudian pindahkan v_1 sehingga didapat

$$v_1, s_1, s_2, \ldots, s_m \,;\, v_2, \ldots, v_n.$$

Karena vektor-vektor $s_1, s_2, \ldots, s_m$ membentang V, maka v_1 adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor s_i. Sehingga dapat dihapus satu dari vektor-vektor s_i dan bila perluh lakukan pengindeksan ulang supaya vektor-vektor yang tersisa tetap membentang V. Dalam hal ini s_1 dihapus, didapat

$$v_1, s_2, \ldots, s_m \,;\, v_2, v_3 \ldots, v_n.$$

Perluh diperhatikan bahwa vektor-vektor $v_2, v_3 \ldots, v_n$ tetap bebas linier. Lakukan lagi proses yang serupa sehingga didapat

$$v_1, v_2, s_2, \ldots, s_m\,;\, v_3 \ldots, v_n.$$

Seperti alasan sebelumnya, vektor s_2 dapat dihapus, didapat

$$v_1, v_2, s_3, \ldots, s_m\,;\, v_3 \ldots, v_n,$$

yang mana vektor-vektor $v_1, v_2, s_3, \ldots, s_m$ tetap membentang V dan vektor-vektor $v_3 \ldots, v_n$ juga tetap bebas linier. Sehingga bila proses yang sama dilakukan berulang didapat

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\,;\, v_{m+1} \ldots, v_n,$$

yang mana vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ tetap membentang V dan vektor-vektor $v_{m+1} \ldots$, v_n juga tetap bebas linier. Tetapi hal ini berakibat vektor-vektor $v_{m+1} \ldots, v_n$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$. Hal ini bertentangan dengan Teorema 3.3.1 bagian 3. Jadi haruslah $n \leq m$.

$\square$

Kesimpulan 3.4.1 Bila ruang vektor V atas lapangan F mempunyai suatu himpunan pembentang berhingga, maka sebarang himpunan dua basis dari V mempunyai kardinalitas yang sama.

$\square$

Berikut ini diberikan sifat yang lebih umum untuk sebarang ruang vektor.

Teorema 3.4.2 Bila V suatu ruang vektor atas lapangan F, maka sebarang dua himpunan basis mempunyai kardinalitas yang sama.

Bukti
Diasumsikan bahwa semua basis untuk V adalah himpunan takberhinnga, bila tidak hal ini sudah terlihat pada Kesimpulan 3.4.1. Misalkan $\mathcal{B} = \{b_i \,|\, i \in I\}$ adalah suatu basis untuk V dan $\mathcal{C}$ basis yang lain untuk V. Maka sebarang vektor $c \in \mathcal{C}$ bisa ditulis sebagai suatu kombinasi linier berhingga dari vektor-vektor di $\mathcal{B}$, dengan semua koefisiennya taknol, yaitu

$$c = \sum_{i \in U_c} r_i b_i.$$

Tetapi karena $\mathcal{C}$ adalah suatu basis, haruslah

$$\bigcup_{c \in \mathcal{C}} U_c = I.$$

Karena $|U_c| < \aleph_0$ untuk semua $c \in \mathcal{C}$, dengan $\aleph_0$ adalah kardinalitas dari himpunan semua bilangan natural, maka

$$|\mathcal{B} = |I| \leq \aleph_0 |\mathcal{C}| = |\mathcal{C}|.$$

Hal, ini bisa dilakukan sebaliknya, yaitu sebarang vektor di $\mathcal{B}$ bisa ditulis sebagai kombinasi linier berhingga dari vektor-vektor di $\mathcal{C}$. Sehingga didapat

$$|\mathcal{C}| = |I| \leq \aleph_0 |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}|.$$

Jadi $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

$\square$

Dari Terorema 3.4.2 dapat didefinisikan bahwa suatu ruang vektor V **berdimemsional-hingga** bila $V = \{0\}$ atau bila V mempunyai suatu basis yang berhingga. Semua ruang vektor yang tidak demikian adalah ruang vektor **berdimensional-takhingga**. **Dimensi** ruang vektor nol adalah 0 dan **dimensi** sebarang ruang vektor taknol V adalah kardinalitas dari sebarang basis untuk V. Bila suatu ruang vektor V mempunyai suatu basis dengan kardinalitas κ, maka V dikatakan **dimensional** $-\,\kappa$ dan ditulis $\dim(V) = \kappa$.

Mudah ditunjukkan bahwa bila S adalah suatu ruang bagian dari V, maka $\dim(S) \leq \dim(V)$. Lagi pula, bila $\dim(S) = \dim(V) < \infty$, maka $S = V$.

Teorema 3.4.3 Diberikan V adalah ruang vektor atas lapangan F.

1. Bila $\mathcal{B}$ adalah suatu basis untuk V dan bila $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ dan $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, maka

$$V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle .$$

2. Misalkan $V = S \oplus T$. Bila $\mathcal{B}_1$ adalah suatu basis untuk S dan $\mathcal{B}_2$ adalah suatu basis untuk T, maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Khususnya, bila T adalah sebarang komplemen dari S di V, maka

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$$

dan

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

adalah suatu basis untuk V.

$\square$

Teorema 3.4.4 Misalkan S dan T adalah ruang bagian dari V. Maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T).$$

Khususnya, bila T adalah sebarang komplemen dari S di V, maka

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(V),$$

yaitu

$$\dim(S \oplus T) = \dim(S) + \dim(T).$$

Bukti
Misalkan $\mathcal{B} = \{b_i \,|\, i \in I\}$ adalah suatu basis untuk $S \cap T$. Perluas basis ini menjadi suatu basis $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ untuk S yang mana $\mathcal{A} = \{a_j \,|\, j \in J\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Juga perluas $\mathcal{B}$ menjadi suatu basis $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ untuk T yang mana $\mathcal{C} = \{c_k \,|\, k \in K\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ adalah suatu basis untuk $S + T$. Jelas bahwa $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle = S + T$. Untuk membuktikan bahwa $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bebas linier, andaikan bahwa bahwa

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \tag{3.2}$$

$v_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ dan $\alpha_i \neq 0$ untuk semua i. Karena $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dan $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$ bebas linier maka ada v_i yang memenuhi Persamaan 3.2 di $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$. Hal ini menunjukkan ada vektor taknol $x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$. Hal ini berakibat $x \in S \cap T$ dan $x \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle$. Jadi $x = 0$, kontradiksi. Jadi haruslah $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ bebas linier dan suatu basis untuk $S + T$. Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\dim(S) + \dim(T) &= |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| \\
&= |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| \\
&= |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| + \dim(S \cap T).
\end{aligned}$$

□

Perluh diperhatikan bahwa persamaan

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$$

berlaku untuk semua ruang vektor, tetapi penulisan

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

tidak selalu benar, kecuali $S + T$ berdimensional-hingga.

3.5 Basis Terurut dan Matriks Koordinat

Pada bagian ini dibahas pengertian dari suatu basis terurut yang berkaitan dengan urutan dari anggota-anggotanya.

Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi-n atas lapangan F. Suatu **basis terurut** untuk V adalah n-pasangan terurut $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dari vektor-vektor di V yang mana himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah suatu basis untuk V.

Bila $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah suatu basis terurut untuk V, maka untuk setiap $v \in V$ ada tunggal suatu n-pasangan terurut $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ dari skalar sehingga

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n.$$

Berkaitan dengan hal yang demikian, didefinisikan **pemetaan koordinat** $\phi_{\mathcal{B}} : V \to F^n$ oleh

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

yang mana matriks kolom $[v]_{\mathcal{B}}$ disebut sebagai **matriks koordinat** dari v terhadap basis terurut $\mathcal{B}$. Jelas bahwa diketahuinya $[v]_{\mathcal{B}}$ adalah ekivalen dengan diketahuinya v asalkan basis $\mathcal{B}$ diketahui.

Lagi pula, mudah dipahami bahwa pemetaan koordinat $\phi_{\mathcal{B}}$ adalah bijektif dan mempertahankan operasi-operasi ruang vektor, yaitu

$$\phi_{\mathcal{B}}(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n) = r_1 \phi_{\mathcal{B}}(v_1) + r_2 \phi_{\mathcal{B}}(v_2) + \cdots + r_n \phi_{\mathcal{B}}(v_n)$$

atau ekivalen dengan

$$[r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n]_{\mathcal{B}} = r_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + r_2 [v_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + r_n [v_n]_{\mathcal{B}}.$$

Fungsi dari satu ruang vektor ke ruang vektor lainnya yang mempertahankan operasi-operasi ruang vektor dinamakan *transformasi linier* yang merupakan topik pada bahasan berikutnya.

3.6 Ruang Baris dan kolom dari suatu Matriks

Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ atas lapangan F. Baris dari A membangun suatu ruang bagian dari F^n yang dinamakan **ruang baris** dari A dan kolom dari A membangun suatu ruang bagian dari F^m yang dinamakan **ruang kolom** dari A. Dimensi dari ruang-ruang bagian tsb. masing-masing dinamakan **rank baris** dan **rank kolom**. Ruang baris dan rank baris dinotasikan oleh $\mathrm{rs}(A)$ dan $\mathrm{rrk}(A)$, sedangkan ruang kolom dan rank kolom dinotasikan oleh $\mathrm{rc}(A)$ dan $\mathrm{crk}(A)$.

Perluh dicatat dan berguna bahwa fakta rank baris dari suatu matriks selalu sama dengan rank kolomnya walaupun $m \neq n$.

Bab 4

Transformasi Linier

Bab 5

Teorema Isomorpisma

Bab 6

Modul

Berikut ini diberikan pengertian dari suatu modul. Namum sebelumya diberikan suatu gambaran motifasi dari pengertian modul.

Motifasi

Misalkan V adalah suatu ruang vektor atas suatu lapangan F dan $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Maka untuk sebarang polinomial $p(x) \in F[x]$ operator $p(\tau)$ adalah well-defined. Misalnya bila $p(x) = 1 + 2x + x^2$, maka

$$p(\tau) = \iota + 2\tau + \tau^3,$$

dimana ι adalah operator identitas dan τ^3 komposisi 3 kali dari τ yaitu $\tau \circ \tau \circ \tau$. Jadi, dengan menggunakan operator τ dapat didefinisikan suatu perkalian polinomial $p(x) \in F[x]$ dengan suatu vektor $\boldsymbol{v} \in V$ diberikan oleh

$$p(x)\boldsymbol{v} = p(\tau)(\boldsymbol{v}). \tag{6.1}$$

Perkalian ini memenuhi sifat-sifat biasa dari perkalian skalar dengan vektor, yaitu untuk semua $r(x), s(x) \in F[x]$ dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, maka

$$\begin{aligned} r(x)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= r(x)\boldsymbol{u} + r(x)\boldsymbol{v} \\ (r(x)+s(x))\boldsymbol{u} &= r(x)\boldsymbol{u} + s(x)\boldsymbol{u} \\ (r(x)s(x))\boldsymbol{u} &= r(x)(s(x)\boldsymbol{u}) \\ 1.\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}. \end{aligned}$$

Jadi, untuk sebarang $\tau \in \mathcal{L}(V)$ tetap, di ruang vektor V dapat dilakukan operasi penjumlahan dan perkalian dari suatu elemen di V dengan suatu polinomial di $F[x]$. Bagaimanapun hal ini, karena $F[x]$ bukan suatu lapangan dua perkalian yang diberikan tidak bisa mengubah Vsebagai suatu ruang vektor. Apapun ini, situasi yang mana himpunan skalar-skalar membentuk suatu ring bukan suatu lapangan adalah penting tidak hanya dalam konteks ini tetapi dalam berbagai hal lainnya.

Definisi 1 Suatu modul atas suatu ring komutatif R (R-modul atau modul atas R) adalah suatu grup komutatif M bersama-sama dengan suatu pemetaan dari $R \times M$ ke M diberikan sebagai $(r, m) \mapsto rm$ dan untuk semua $r, r_1, r_2 \in R$ dan semua $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi kondisi

M1 $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$

M2 $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

M3 $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$

M4 $1.m = m$.

Ring R dinamakan ring basis dari M. Untuk lebih membedakan, M yang memnuhi kondisi tersebut dinamakan juga modul-kiri-R. Definsi yang sama juga untuk modul-kanan-R yang mana elemen-elemen dari R ditulis di sebelah kanan. $\square$

Perlu diperhatikan bahwa aksiomatik dari suatu modul adalah suatu aksiomatik dari ruang vektor V atas suatu lapangan F. Ynag membedakan adalah skalarnya. Dalam modul elemen-elemen skalarnya di ring R, sedangkan dlam ruang vektor elemen-elemen skalarnya berada di lapangan F.

Contoh 6.0.1

1) Bila R adalah suatu ring, himpunan $M = R^n$ n-pasang terurut dengan komponen-komponen di R adalah R-modul, dengan penjumlahan dan perkalian dengan skalar didefinisikan oleh

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

dan

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n),$$

untuk $a_i, b_i, r \in R$. Misalnya, $\mathbb{Z}^2$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

2) Bila R adalah suatu ring, himpunan $M_{m \times n}(R)$ adalah himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ adalah suatu R-modul terhadap operasi penjumlahan biasadalam matriks dan perkalian skalar di R dengan matriks di $M_{m \times n}(R)$. Satu contoh penting adalah $R = F[x]$, maka $M_{m \times n}(F[x])$ adalah $F[x]$-modul dari semua matriks berukuran $m \times n$ yang mempunyai elemen-elemen adalah polinomial.

3) Sebarang ring komutatif R disertai elemen satuan adalah suatu modul atas R sendiri. Yaitu R adalah R-modul.

$\square$

Berikut ini diberikan sifat-sifat dasar dari modul M atas suatu ring komutatif R.

Teorema 3 Bila M adalah suatu modul atas suatu ring komutatif R, maka untuk semua $r \in R$ dan $m \in M$ didapat
(1) $0_R.m = 0_M$
(2) $r.0_M = 0_M$
(3) $(-r)m = -(rm) = r(-m)$

Bukti
(1) $m = 1.m = (1 + 0_R)m = m + 0_R.m$. Kedua ruas persamaan tambahkan dengan invers terhadap + dari m didapat $-m + m = (-m + m) + 0_R.m$. Sehingga didapat $0_M = 0_R.m$.
(2) $r.0_M = r(0_R.0_M) = (r.0_R).0_M = 0_R.0_M = 0_M$.
(3) Hitung $(-r).m + r.m = (-r + r)m = 0_R.m = 0_M$. Kedua ruas persamaan tambahkan dengan $-(r.m)$didapat $(-r).m = -(r.m)$. Dengan cara yang sama didapat $(-r).m = r.(-m)$.
$\square$

Submodul

Berbagai konsep dasar yang telah didefinisikan dalam ruang vektor juga dapat didefinisikan untuk modul walaupun mungkin sifat-sifatnya agak berbeda. Dimulai hal ini dengan pengertian submodul.

Definisi 2 Suatu submodul dari suatu M R-modul adalah himpunan bagian takkosong S dari M terhadap operasi yang sama di M dan di R yang dikenakan terbatas pada S, maka S merupakan R-modul. Notasi $S \leq M$ menyatakan bahwa S adalah submodul dari M R-modul.
$\square$

Teorema 4 Suatu hipunan bagian takkosong $S \subseteq M$ dengan M adalah R-modul adalah submodul dari M bila dan hanya bila

$$r, s \in R, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S, \quad \text{maka} \quad r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S.$$

Bukti
Misalkan S submodul dari M dan

$$r, s \in R \;\; \text{juga} \;\; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S,$$

maka

$$r\boldsymbol{u} \in S \;\; \text{dan} \;\; s\boldsymbol{v} \in S.$$

Oleh karena itu,

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$$

juga di S. Sebaliknya, misalkan

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S$$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$. Akan ditunjukkan bahwa S adalah subbmodul dari M R-modul. Sifat M1-M4. dari M R-modul otomatis menurunke S, begitu juga sifat *komutatif*, *assosiatif* di sifat M adalah grup komutatif terhadap operasi + menurun pada S. Selanjutnya, untuk $r = s = 1$ dan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$ didapat

$$1\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in S \quad \text{(tertutup)}.$$

Untuk $r = s = 0$ didapat

$$0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} = 0(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_M \in S.$$

Oleh karena itu, untuk $r = s = 1 \in R$ dan setiap $\boldsymbol{u} \in S$, didapat

$$1\,\boldsymbol{u} + 1\,\mathbf{0}_M = \boldsymbol{u} + \mathbf{0}_M = \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M + \boldsymbol{u} = 1\,\mathbf{0}_M + 1\,\boldsymbol{u} \in S.$$

Selanjutnya untuk $r = 1, s = -1 \in R$ dan setiap $\boldsymbol{u} \in S$ didapat

$$1\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = (1 + (-1))\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M$$

($\boldsymbol{u}$ punya invers yaitu $-\boldsymbol{u}$).

□

Teorema 5 Bila S dan T adalah submodul dari M R-modul, maka $S \cap T$ juga submodul dari M R-modul.

Bukti Diberikan sebarang $r, s \in R$ dan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S \cap T$, maka dengan menggunakan Teorema 4 didapat

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S \quad (\text{sebab} \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S) \tag{6.2}$$

dan

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in T \quad (\text{sebab} \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T). \tag{6.3}$$

Akibatnya, dari (6.2) dan (6.3) didapat

$$r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} \in S \cap T.$$

Dengan demikian $S \cap T$ adalah submodul dari M R-modul.

□

Latihan Buat suatu contoh untuk menunjukkan bahwa bila S dan T adalah submodul dari M R-modul, maka $S \cup T$ bukan submodul dari M R-modul.

□

Perlu diperhatikan bahwa suatu ring komutatif R dengan elemen satuan adalah suatu-modul atas dirinya sendiri. Sebagaimana terlihat nanti, modul yang demikian ini menyajikan contoh yang bagus bahwa perilakunya bukan sebagai ruang vektor.

Ketika dibahas suatu ring R sebagai R-modul dari pada sebagai suatu ring, perkalian dalam R diperlakukan sebagai perkalian skalar. Hal ini mempunyai beberapa implikasi penting. Kususnya bila S adalah suatu submodul dari R, maka S harus tertutup terhadap perkalian skalar. Hal ini berarti bahwa tertutup terhadap perkalian oleh semua elemen-elemen di ring R. Dengan kata lain S adalah ideal dari R. Sebaliknya, bila $\mathcal{I}$ adalah suatu ideal dari ring R, mka $\mathcal{I}$ juga merupakan suatu modul dari R-modul. Jadi, submodul-submodul dari R R-modul adalah ideal-ideal dari ring R.

6.1 Himpunan Pembentang

Konsep himpunan pembentang dalam ruang vektor juga terbawa dalam modul.

Definisi 3 **Submodul yang dibentangkan** (**dibangun**) oleh himpunan bagian takkosong S dari suatu modul M R-modul adalah himpunan semua **kombinasi linier** dari elemen-elemen S:

$$\langle\langle S\rangle\rangle = \{r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n \,|\, r_i \in R, \boldsymbol{v}_i \in S, n \geq 1\}.$$

Suatu himpunan bagian $S \subseteq M$ dinamakan **membentang** M atau **membangun** M bila $M = \langle\langle S\rangle\rangle$.

$\square$

Satu hal yang penting dicatat bahwa bila suatu kombinasi linier taktrivial dari elemen-elemen $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ di M R-modul adalah sama dengan nol:

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M$$

dimana tidak semua koefisien sama dengan $\mathbf{0}_R$, maka tidak bisa disimpulkan sebagai mana dalam ruang vektor. Yaitu elemen $\boldsymbol{v}_i$ adalah suatu kombinasi linier dari elemen lainnya, setelah dilakukan pembagian oleh satu koefisienyang mana hal ini mungkin tidak bisa dilakukan dalam suatu ring. Misalnya, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = M$ $\mathbb{Z}$-modul,

$$2(3,6) - 3(2,4) = (0,0),$$

maka tidak mungkin melakukan

$$(3,6) = \frac{3}{2}(2,4) \quad \text{juga} \quad (2,4) = \frac{2}{3}(3,6),$$

sebab $\frac{3}{2}, \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$. Submodul sederhana berikut memainkan suatu peranan kusus dalam teori modul.

Definisi 4 Misalkan M adalah suatu R-modul, suatu submodul yang mempunyai bentuk

$$\langle\langle \boldsymbol{v}\rangle\rangle = R\boldsymbol{v} = \{r\boldsymbol{v} \,|\, r \in R\}$$

untuk sebarang tetap $\boldsymbol{v} \in M$ dinamakan **submodul siklik** dibangun oleh $\boldsymbol{v}$.

$\square$

Definisi 5 Suatu M R-modul dikatakan **dibangun secara berhingga** $M = \langle\langle S\rangle\rangle$ dimana $S \subseteq M$ dan S himpunan berhingga. Lebih kusus bila $|S| = n$, maka dikatakan M adalah **dibangun-**n.

$\square$

6.2 Bebas Linier

Konsep bebas linier dari ruang vektor juga terbawa ke modul.

Definisi 6 Suatu himpunan bagian takkosong S dari M R-modul adalah **bebas linier** bila untuk $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in S$ yang berbeda dan $r_1, \ldots, r_n \in R$, didapat

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M \quad \text{berakibat} \quad r_i = 0_R, \text{ untuk semua } i.$$

Suatu himpunan bagian S yang tidak bebas linier dinamakan **bergantungan linier**. $\square$

Contoh 1 Diberikan $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modul. Elemen $3, 4 \in \mathbb{Z}$ adalah bergantungan linier, sebab

$$4(3) - 3(4) = 0.$$

tetapi 3 bukan kombinasi linier dari 4 begitu sebaliknya. $\square$

Persoalan Contoh 1 adalah

$$r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M,$$

berakibat bahwa

$$r_1\boldsymbol{v} = -r_2\boldsymbol{v}_2 - \cdots - r_n\boldsymbol{v}_n,$$

tetapi secara umum kedua sisi persamaan tidak bisa dibagi oleh r_1, karena mungkin r_1 tidak mempunyai invers terhadap perkalian dalam R.

6.3 Elemen-elemen Torsi

Dalam suatu ruang vektor atas suatu lapangan F, himpunan $\{\boldsymbol{v}\} \subset V$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$ adalah bebas linier atau dengan kata yang lain untuk $r \neq 0_R$ dan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$ berakibat bahwa $r\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_V$. Apapun hal ini, dalam suatu modul tidak selalu demikian.

Contoh 2 Himpunan bilangnan bulat modulo n, $\mathbb{Z}_n$ adalah $\mathbb{Z}$-modul dengan perkalian skalar didefinisikan oleh $z[a]_n$ untuk semua $z \in \mathbb{Z}$ dan semua $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$. Tetapi, karena

$$n[a]_n = [0]_n, \quad \text{untuk semua} \quad [a]_n \in \mathbb{Z}_n,$$

maka himpunan $\{[a]_n\}$ bukan bebas linier. Bahkan sungguh $\mathbb{Z}_n$ tidak mempunyai himpunan dengan satu elemen yang bebas linier. $\square$

Contoh 2 memotifasi pengertian berikut.

Definisi 7 Misalkan M adalah R-modul. Suatu elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$ yang memenuhi $r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M$ untuk beberapa elemen taknol $r \in R$ dinamakan suatu **elemen torsi** dari M. Bila semua elemen dari M adalah elemen torsi, maka M dinamakan suatu **modul torsi**. Himpunan semua elemen torsi dari M bersama-sama dengan elemen nol $\mathbf{0}_M$ dinotasikan oleh M_{tor}. Bila dalam suatu modul M atas R tidak mempunyai elemen torsi dikatakan **bebas torsi**. $\square$

Perhatikan bahwa bila M adalah suatu modul atas suatu daerah integral, maka M_{tor} adalah submodul dari M dan M/M_{tor} adalah bebas torsi. Hal ini ditunjukkan dalam teorema berikut

Teorema 6.3.1 Diberikan M adalah suatu modul atas suatu daerah intgral R. Maka M_{tor} adalah submodul dari M dan M/M_{tor} adalah bebas torsi.

Bukti Diberikan sebarang elemen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in M_{\mathrm{tor}}$ dan sebarang elemen $r_1, r_2 \in R$ dan pilih elemen tak nol $r, s \in R$ yang memenuhi $r\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}_M$ dan $s\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}_M$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned}(rs)(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2) &= (rs)(r_1\boldsymbol{v}_1) + (rs)(r_2\boldsymbol{v}_2)\\ &= (sr_1)(r\boldsymbol{v}_1) + (rr_2)(s\boldsymbol{v}_2)\\ &= (sr_1)(\mathbf{0}_M) + (rr_2)(\mathbf{0}_M)\\ &= \mathbf{0}_M.\end{aligned}$$

Hal ini berakibat bahwa $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 \in M_{\mathrm{tor}}$, jadi M_{tor} adalah submodul dari M. Selanjutnya ditunjukkan bahwa M/M_{tor} adalah bebas torsi. Diberikan sebarang $\boldsymbol{v} + M_{\mathrm{tor}}$ di M/M_{tor} dan misalkan elemen taknol $r \in R$ yang memenuhi $r(\boldsymbol{v} + M_{\mathrm{tor}}) = M_{\mathrm{tor}}$. Maka $r\boldsymbol{v} \in M_{\mathrm{tor}}$. Selanjutnya pilih elemen taknol $s \in R$ yang memenuhi $s(r\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_M$. Tetapi $s(r\boldsymbol{v}) = (rs)\boldsymbol{v}$. Karena R adalah daerah integral maka $rs \neq 0_R$, jadi $\boldsymbol{v} \in M_{\mathrm{tor}}$. Dengan demikian $\boldsymbol{v} + M_{\mathrm{tor}} = M_{\mathrm{tor}}$, jadi elemen torsi di M/M_{tor} hanyalah elemen nol M_{tor}. Akibatnya M/M_{tor} adalah bebas torsi.

$\square$

Annihilator

Pengertian yang cukup dekat dengan suatu elemen torsi adalah suatu *annihilator*.

Definisi 6.3.1 Misalkan M adalah R-modul. **Annihilator** dari suatu elemen $\boldsymbol{v} \in M$ adalah himpunan

$$\mathrm{ann}(\boldsymbol{v}) = \{r \in R \,|\, r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M\}$$

dan **annihilator** dari suatu submodul N dari modul M adalah

$$\mathrm{ann}(N) = \{r \in R \,|\, rN = \{\mathbf{0}_M\}\},$$

dimana $rN = \{r\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v} \in N\}$. Annihilator juga disebut **order ideal**.

$\square$

Teorema 6.3.2 Diberikan M adalah R-modul, maka untuk sebarang tetap $\boldsymbol{v} \in M$ himpunan

$$\mathrm{ann}(\boldsymbol{v}) = \{r \in R \,|\, r\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_M\}$$

adalah suatu ideal dari R.

Bukti Misalkan sebarang $r \in R$ dan sebarang $i \in \mathrm{ann}(\boldsymbol{v})$ didapat

$$(ri)\boldsymbol{v} = r(i\boldsymbol{v}) = r.\mathbf{0}_M = \mathbf{0}_M \;\Rightarrow\; ri \in \mathrm{ann}(\boldsymbol{v})$$

juga

$$(ir)\boldsymbol{v} = (ri)\boldsymbol{v} = r(i\boldsymbol{v}) = r.\mathbf{0}_M = \mathbf{0}_M \;\Rightarrow\; ir \in \mathrm{ann}(\boldsymbol{v}).$$

Jadi $\mathrm{ann}(\boldsymbol{v})$ adalah ideal dari R. ◻

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\mathrm{ann}(N)$ adalah idealdari R. Jelas bahwa, $\boldsymbol{v} \in M$ adalah suatu elemen torsi bila dan hanya bila $\mathrm{ann}(\boldsymbol{v}) \neq \{\mathbf{0}_M\}$. Juga, bila A dan B adalah submodul dari M, maka

$$A \leq B \Rightarrow \mathrm{ann}(A) \leq \mathrm{ann}(A)$$

Contoh 6.3.2 Diberikan $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$. Misalkan akan ditentukan $\mathrm{ann}([1]_3)$. Karena diberikan $n \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $n[1]_3 = [n]_3 = [0]_3$, maka haruslah $3|n$. Jadi $\mathrm{ann}([1]_3) = 3\mathbb{Z}$. Juga untuk $m \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $m[2]_3 = [2m]_3 = [0]_3$, maka haruslah $3|2m$ dan karena 2 adalah prima hal ini berakibat $3|m$. Jadi $\mathrm{ann}([2]_3) = 3\mathbb{Z}$. ◻

Definisi 6.3.3 . Misalkan M dan N adalah R-modul Suatu pemetaan $T : M \to N$ dinamakan suatu **homomorpisma modul** atau R-**homomorpisma** bila memenuhi

$$T(r\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2) = rT(\boldsymbol{m}_1) + T(\boldsymbol{m}_2), \quad \text{untuk semua} \quad r \in R \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M.$$

Bila T adalah pada, maka dinamakan R-**epimorpisma** dan bila T adalah satu-satu, maka dinamakan R-**monomorpisma**. Sedangkan bila T adalah bijektif, maka dinamakan R-**isomorpisma**,dalam hal ini dikatakan M dan N isomorpik ditulis $M \cong N$. ◻

Himpunan semua homomorpisma modul dari M ke N atas R dinotasikan oleh $\mathrm{hom}_R(M, N)$. Bila $T \in \mathrm{hom}_R(M, N)$, maka himpunan

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{m} \in M \,|\, T(\boldsymbol{m}) = \mathbf{0}_N\}$$

dinamakan **kernel** dari T. Sedangkan himpunan

$$\mathrm{im}(T) = \{\boldsymbol{n} \in N \,|\, \boldsymbol{n} = T(\boldsymbol{m}),\ \text{untuk semua}\ \boldsymbol{m} \in M\}$$

dinamakan **image** dari T (**peta** dari T).

Teorema 6.3.3 Bila $T \in \mathrm{hom}_R(M, N)$, maka $T(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$.

Bukti

$$T(\mathbf{0}_M) = T(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}) = T(\boldsymbol{m}) - T(\boldsymbol{m}) = \mathbf{0}_N.$$

◻

Teorema 6.3.4 Bila $T \in \hom_R(M, N)$, maka $\ker(T)$ adalah submodul dari M. Selanjutnya T adalah R-monomorpisma bila dan hanya bila $\ker(T) = \{\mathbf{0}_M\}$.

Bukti Misalkan $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \ker(T)$ dan sebarang $r \in R$, didapat

$$T(r\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2) = rT(\boldsymbol{m}_1) + T(\boldsymbol{m}_2) = r.\mathbf{0}_N + \mathbf{0}_N = \mathbf{0}_N + \mathbf{0}_N = \mathbf{0}_N.$$

Jadi $r\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 \in \ker(T)$, dengan demikian $\ker(T)$ adalah submodul dari M. Berikutnya, misalkan bahwa T adalah R-monomorpisma dan $\boldsymbol{m}$ sebarang elemen di $\ker(T)$, didapat $T(\boldsymbol{m}) = \mathbf{0}_N$. Berdasarkan Teorema 6.3.3 didapat $T(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$ dan karena T adalah satu-satu, maka haruslah $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}_M$. Jadi $\ker(T) = \{\mathbf{0}_M\}$. Sebaliknya, misalkan $\ker(T) = \{\mathbf{0}_M\}$. Diberikan $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M$ yang memenuhi $T(\boldsymbol{m}_1) = T(\boldsymbol{m}_2)$. Sehingga didapat

$$\mathbf{0}_N = T(\boldsymbol{m}_1) - T(\boldsymbol{m}_2) = T(\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2).$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 \in \ker(T)$, tetapi karena $\ker(T) = \{\mathbf{0}_M\}$, maka $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}_M$. Jadi $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2$. Dengan demikian bila $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M$ dan $T(\boldsymbol{m}_1) = T(\boldsymbol{m}_2)$ berakibat bahwa $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2$. Hal ini menunjukkan bahwa T adalah satu-satu. Jadi T adalah R-monomorpisma. $\square$

Latihan Tunjukkan bahwa bila $T \in \hom_R(M, N)$, maka $\mathrm{im}(T)$ adalah submodul dari N.

$\square$

Modul Kuasi

Misalkan R adalah suatu ring komutatif dan mempunyai elemen satuan serta M adalah R-modul. Bila N adalah suatu submodul dari M dan suatu relasi $\sim$ di M didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$, maka $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ bila dan hanya bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$. Relasi $\sim$ memenuhi

1. **Refleksif** : Untuk setiap $\boldsymbol{u} \in M$ belaku $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}$, sebab $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_M \in N$.
2. **Simetri** : Bila $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$, maka $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{u}$. Sebab bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$, maka $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \in N$.
3. **Transitif** : Bila $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w}$, maka $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{w}$. Sebab bila $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in N$ dan $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in N$, didapat
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \in N.$$

Jadi relasi $\sim$ pada M adalah relasi ekivalen. Klas ekivalen dari suatu elemen $\boldsymbol{u}$ adalah himpunan koset

$$\boldsymbol{u} + N = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{n} \in N\}.$$

Notasi M/N menyatakan himpunan semua klas ekivalen pada M relatif terhadap N adalah

$$M/N = \{\boldsymbol{u} + N \,|\, \boldsymbol{u} \in M\}.$$

Teorema 6.3.5 Misalkan M adalah R-modul dan N adalah submodul dari M. Maka untuk setiap $\boldsymbol{u}+N, \boldsymbol{v}+N$ di M/N berlaku salah satu dari $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)=\varnothing$ atau $\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N$.

Bukti Untuk $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)=\varnothing$ tidak adalagi yang perlu dibuktikan. Selanjutnya bila $(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)\neq\varnothing$, harus dibuktikan bahwa $\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N$. Diberikan $\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{u}+N)\cap(\boldsymbol{v}+N)$, pilih $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}_1 \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_2.$$

Sehingga didapat

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2\in N \tag{6.4}$$

Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{u}+N$, pilih $\boldsymbol{n}_3\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}_3.$$

Sehingga dengan menggunakan (6.4) didapat

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_1))+\boldsymbol{n}_3=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{n}_2-\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)\in\boldsymbol{v}+N.$$

Jadi

$$\boldsymbol{u}+N\subseteq\boldsymbol{v}+N. \tag{6.5}$$

Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{v}+N$, pilih $\boldsymbol{n}_4\in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{n}_4.$$

Sehingga, lagi dengan menggunakan (6.4) didapat

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2))+\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_4)\in\boldsymbol{u}+N.$$

Jadi

$$\boldsymbol{v}+N\subseteq\boldsymbol{u}+N. \tag{6.6}$$

Dari (6.5) dan (6.6) didapat

$$\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{v}+N.$$

$\blacksquare$

Teorema 6.3.5 menjelaskan bahwa koset dalam M mempartisi menjadi klas-klas ekivalen yang saling asing diantara koset yang satu dengan lainnya.

Selanjutnya dalam M/N didefinisikan operasi $+$ dan perkalian $\times$ dengan elemen di R sebagai berikut

$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)\stackrel{\text{def}}{=}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N,\ \forall\boldsymbol{u}+N,\boldsymbol{v}+N\in M/N$$

dan
$$r(\boldsymbol{u}+N) \stackrel{\text{def}}{=} (r\boldsymbol{u})+N,\ \forall r \in R \ \text{ dan } \ \forall \boldsymbol{u}+N \in M/N.$$

Operasi yang telah didefinisikan tidak tergantung pada pemilihan dari koset yang ditentukan. Hal ini bisa ditunjukkan sebagai berikut: Misalkan $\boldsymbol{u}+N=\boldsymbol{u}_1+N$ dan $\boldsymbol{v}+N=\boldsymbol{v}_1+N$. Dapat dipilih $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2 \in N$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1 \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{n}_2.$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1)+(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{n}_2)\\ &= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2)\end{aligned}$$

dan
$$r\boldsymbol{u}=r(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{n}_1)=r\boldsymbol{u}_1+r\boldsymbol{n}_1.$$

Karena $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2 \in N$ dan $r\boldsymbol{n}_1 \in N$ didapat

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1)+N \quad \text{dan} \quad (r\boldsymbol{u})+N=(r\boldsymbol{u}_1)+N.$$

Teorema 6.3.6 Himpunan M/N dengan operasi $+$ dan perkalian $\times$ dengan skalar di R sebagaimana telah didefinisikan adalah R-modul. Selanjutnya pemetaan $\pi : M \to M/N$ yang didefinisikan oleh $\pi(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}+N$ untuk semua $\boldsymbol{u}\in M$ adalah R-epimorpisma.

Bukti Untuk setiap $\boldsymbol{u}+N, \boldsymbol{v}+N$ dan $\boldsymbol{w}+N$ di M/N maka

1. Tertutup terhadap operasi $+$:
$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N \in M/N.$$

2. Komutatif terhadap operasi $+$:
$$(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+N=(\boldsymbol{v}+N)+(\boldsymbol{u}+N).$$

3. Assosiatif terhadap operasi $+$:
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{u}+N)+(\boldsymbol{v}+N)]+(\boldsymbol{w}+N) &= [(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+N]+(\boldsymbol{w}+N)\\ &= ((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w})+N\\ &= (\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}))+N\\ &= (\boldsymbol{u}+N)+[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+N]\end{aligned}$$

4. Ada nol di M/N yaitu $N = \mathbf{0}_M + N$ yang memenuhi
$$(\mathbf{0}_M + N) + (\boldsymbol{u} + N) = (\mathbf{0}_M + \boldsymbol{u}) + N = \boldsymbol{u} + N$$
dan
$$(\boldsymbol{u} + N) + (\mathbf{0}_M + N) = (\boldsymbol{u} + \mathbf{0}_M) + N = \boldsymbol{u} + N.$$

5. Untuk setiap $\boldsymbol{u} + N$ di M/N ada $-\boldsymbol{u} + N$ di M/N yang memenuhi
$$(-\boldsymbol{u} + N) + (\boldsymbol{u} + N) = (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) + N = \mathbf{0}_M + N = N$$
dan
$$(\boldsymbol{u} + N) + (-\boldsymbol{u} + N) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) + N = \mathbf{0}_M + N = N.$$

Jadi terhadap operasi + M/N adalah grup komutatif. Selanjutnya terhadap operasi perkalian dengan skalar $a, b \in R$ berlaku:

1.
$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{u} + N) + (\boldsymbol{v} + N)) &= a((\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + N) \\ &= (a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + N) + (a\boldsymbol{v} + N) \end{aligned}$$

2.
$$(a + b)(\boldsymbol{u} + N) = (a + b)\boldsymbol{u} + N = (a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}) + N = (a\boldsymbol{u} + N) + (b\boldsymbol{u} + N).$$

3. $(ab)(\boldsymbol{u} + N) = (ab)\boldsymbol{u} + N = a(b\boldsymbol{u}) + N = a(b\boldsymbol{u} + N) = a(b(\boldsymbol{u} + N))$.

4. $1_R(\boldsymbol{u} + N) = (1_R\boldsymbol{u}) + N = \boldsymbol{u} + N$.

Jadi terhadap operasi + dan operasi perkalian dengan skalar M/N adalah R-modul. Berikutnya, misalkan sebarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ dan sebarang $a, b \in R$, didapat
$$\begin{aligned} \pi(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) &= (a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) + N \\ &= (a\boldsymbol{u} + N) + (b\boldsymbol{v} + N) \\ &= a(\boldsymbol{u} + N) + b(\boldsymbol{v} + N) \\ &= a\pi(\boldsymbol{u}) + b\pi(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

Jadi π adalah R-homomorpisma. Selanjutnya, diberikan sebarang $\boldsymbol{u} + N$ di M/N selalu dapat dipilih $\boldsymbol{u}$ di M yang memenuhi $\pi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + N$. Jadi pemetaan π adalah pada dengan demikian π adalah R-epimorpisma.

□

Pemetaan $\pi : M \to M/N$ dalam Teorema 6.3.6 dinamakan **pemetaan natural**. Sedangkan modul M/N atas R dinamakan **modul kuasi**.

Berikut ini diberikan peranan pemetaan natural π dalam pemfaktoran homomorpisma modul.

Teorema 6.3.7 Diberikan M dan N adalah R-modul dan $f : M \to N$ adalah suatu R-homomorpisma. Maka ada dengan tunggal pemetaan $g : M/\ker(f) \to N$ R-homomorpisma yang bersifat satu-satu dan memenuhi $g \circ \pi = f$ dimana $\pi : M \to M/\ker(f)$ adalah pemetaan natural.

Bukti Pernyataan dalam teorema dapat diungkapkan dalam diagram komutatif yang diberikan oleh gambar berikut.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker(f) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$, maka $f(\boldsymbol{m}) \in N$ dan didefinisikan pemetaan

$$g : M/\ker(f) \to N$$

oleh $g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m}),\ \forall\, \boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$. Pemetaan g adalah well-defined, sebab bila $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f) = \boldsymbol{m}_2 + \ker(f)$, maka $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 \in \ker(f)$. Sehingga didapat

$$f(\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2) = \mathbf{0}_N \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{m}_1) - f(\boldsymbol{m}_2) = \mathbf{0}_N \quad \text{atau} \quad f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2).$$

Hal ini berakibat bahwa

$$g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2) = g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)).$$

Selanjutnyadiberikan sebarang $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f), \boldsymbol{m}_2 + \ker(f) \in M/\ker(f)$ dan skalar $r_1, r_2 \in R$ didapat

$$\begin{aligned} g(r_1[\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)] + r_2[\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)]) &= g([r_1\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)] + [r_2\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)]) \\ &= g((r_1\boldsymbol{m}_1 + r_2\boldsymbol{m}_2) + \ker(f)) \\ &= f(r_1\boldsymbol{m}_1 + r_2\boldsymbol{m}_2) \\ &= r_1 f(\boldsymbol{m}_1) + r_2 f(\boldsymbol{m}_2) \\ &= r_1 g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) + r_2 g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f)). \end{aligned}$$

Jadi pemetaan $g : M/ker(f) \to N$ adalah R-homomorpisma. Selanjutnya ditunjukkan bahwa g adalahsatu-satu. Bila $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f), \boldsymbol{m}_2 + \ker(f) \in M/\ker(f)$ yang memenuhi $g(\boldsymbol{m}_1 + \ker(f)) = g(\boldsymbol{m}_2 + \ker(f))$, maka didapat

$$f(\boldsymbol{m}_1) = f(\boldsymbol{m}_2) \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{m}_1) - f(\boldsymbol{m}_2) = \mathbf{0}_N \quad \text{atau} \quad f(\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2) = \mathbf{0}_N.$$

Jadi, $\boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_2 \in \ker(f)$, akibatnya $\boldsymbol{m}_1 + \ker(f) = \boldsymbol{m}_2 + \ker(f)$. Dengan demikian g adlah pemetaan satu-satu. Berikutnya, diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$ didapat

$$(g \circ \pi)(\boldsymbol{m}) = g(\pi(\boldsymbol{m})) = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) = f(\boldsymbol{m}),$$

hal ini menunjukkan bahwa eksistensi g memenuhi $g \circ \pi = f$. Tinggal menunjukkan bahwa eksistensi g adalah tunggal. Misalkan g_1 adalah R-homomorpisma $g_1 : M/\ker(f) \to N$ yang memenuhi $g_1 \circ \pi = f$. Maka $g \circ \pi = g_1 \circ \pi$, sehingga untuk semua $\boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$ didapat

$$\begin{array}{rcl} g(\boldsymbol{m} + \ker(f)) & = & g(\pi(\boldsymbol{m})) \\ & = & (g \circ \pi)(\boldsymbol{m}) \\ & = & (g_1 \circ \pi)(\boldsymbol{m}) \\ & = & g_1(\pi(\boldsymbol{m})) \\ & = & g_1(\boldsymbol{m} + \ker(f)). \end{array}$$

Jadi $g = g_1$, dengan demikian eksistensi g adalah tunggal. □

Sebagai akibat dari Teorema 6.3.6 dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 6.3.8 Diberikan M dan N adalah R-modul dan pemetaan $f : M \to N$ adalah R-epimorpisma. Maka $M/\ker(f) \cong N$.

Bukti Berdasarkan Teorema 6.3.6, maka dapat dipilih R-monomorpisma $g : M \ker(T) \to N$ yang memenuhi $g \circ \pi = f$ dimana π adalah pemetaan homomorpisma natural $\pi : M \to M/\ker(f)$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa g adalah pemetaan pada. Diberikan sebarang $\boldsymbol{n} \in N$, pilih $\boldsymbol{m} \in M$ yang memenuhi $\boldsymbol{n} = f(\boldsymbol{m})$ (sebab diketahui bahwa f adalah R-epimorpisma). Sehingga didapat

$$\boldsymbol{n} = f(\boldsymbol{m}) = g \circ \pi(\boldsymbol{m}) = g(\pi(\boldsymbol{m})) = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)).$$

Dengan demikian diberikan sebarang $\boldsymbol{n}$ di N dapat dipilih $\boldsymbol{m} + \ker(f) \in M/\ker(f)$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{n} = g(\boldsymbol{m} + \ker(f)),$$

jadi g adalah pemetaan pada. Karena g adalah R-homomorpisma satu-satu dan pada, maka g adalah R-isomorpisma. Jadi $M/\ker(f) \cong N$. □

Bab 7

Modul atas Daerah Ideal Utama

Dalam Bab 6 telah dibahas modul atas suatu lapangan, homomorpisma modul dan modul kuasi. Dalam bab ini dibahas pengertian modul atas Daerah Ideal Utama. Namum sebelumnya dibahas pengertian modul bebas dan modul Noetherian.

7.1 Modul Bebas dan Modul Notherian

Untuk membahas bagian ini perlu diingatkan lagi bahwa, Suatu ruang vektor V atas suatu lapangan F, maka sebarang vektor taknol $\boldsymbol{v}_1$ di V adalah bebas linier dan pembentangnya adalah ruang bagian $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$. Ruang bagian tersebut dapat diperluas dengan memilih $\boldsymbol{v}_2 \notin \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ sehingga didapat

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}\} \rangle$$

Dalam hal yang demikian vektor $\boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{v}_2$ adalah bebas linier. Bila V berdimensi berhingga, misalnya n, maka proses perluasan dapat dilakukan dengan cara yang sama dan akan berhenti pada langkah yang berhingga, sehingga didapat

$$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}\} \rangle \cdots \subset \langle \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \cdots \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n\} \rangle = V$$

Dalam hal ini $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \cdots \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n$ adalah bebas linier dan merupakan suatu basis dari F. Dalam pembahasan bagian ini diberikan pengertian suatu basis dari suatu modul atas suatu ring R.

Definisi 7.1.1 Misalkan M adalah R-modul dan $S \subset M$ dengan $S \neq \varnothing$. Elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dikatakan **kombinasi linier** dari S bila untuk semua elemen $\boldsymbol{s} \in S$ ada $\alpha_{\boldsymbol{s}} \in R$ yang hampir semua $\alpha_{\boldsymbol{s}} = 0_R$ dan memenuhi

$$\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \alpha_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{s}$$

Kombinasi linier ini dikatakan **tunggal** bila untuk kombinasi linier $\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \beta_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{s}$ yang lain selalu berlaku $\alpha_{\boldsymbol{s}} = \beta_{\boldsymbol{s}}$ untuk semua $\boldsymbol{s} \in S$. $\square$

Perlu diperhatikan bahwa dalam Definisi 7.1.1 yang dimaksud hampir semua $a_{\boldsymbol{s}} = 0_R$ adalah elemen-elemen $a_{\boldsymbol{s}}$ yang tidak sama dengan 0_R banyaknya berhingga.

Definisi 7.1.2 Misalkan M adalah R-modul dan B suatu himpunan bagian takkosong dari M. Maka B dikatakan bebas linier bila elemen nol $\mathbf{0}_M$ di M adalah kombinasi linier secara tunggal dari elemen-elemen B. Yaitu, kombinasi linier

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \mathbf{0}_M$$

hanya dipenuhi bila $\alpha_{\boldsymbol{b}} = 0_R$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$.

□

Definisi 7.1.3 Misalkan M adalah R-modul dan N submodul dari M himpunan bagian takkosong X dari M dikatakan **membangun** N dinotasikan oleh $\langle\langle X \rangle\rangle$ bila semua elemen dari N adalah kombinasi linier dari elemen-elemen X, yaitu

$$N = \langle\langle X \rangle\rangle = \left\{ \sum_{\boldsymbol{x}\in X} \alpha_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x} \;\middle|\; \alpha_{\boldsymbol{x}} \in R,\ \text{untuk hampir semua } \alpha_{\boldsymbol{x}} = 0_R \right\}.$$

Bila X membangun M, maka $M = \langle\langle X \rangle\rangle$.

□

Berikut ini diberikan pengertian dari suatu basis untuk suatu M R-modul.

Definisi 7.1.4 Himpunan bagian takkosong $B \subset M$ dengan M adalah R-modul dikatakan suatu **basis** dari M bila B bebas linier dan $M = \langle\langle B \rangle\rangle$.

□

Teorema 7.1.1 Misalkan B adalah suatu basis untuk M R-modul. Maka penulisan kombinasi linier sebarang elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dari elemen-elemen B adalah tunggal.

Bukti misalkan kombinasi linier $\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{m} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \beta_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b}$, maka didapat

$$\mathbf{0}_M = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \alpha_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} - \sum_{\boldsymbol{b}\in B} \beta_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} (\alpha_{\boldsymbol{b}} - \beta_{\boldsymbol{b}}) \boldsymbol{b}.$$

Karena B adalah bebas linier, maka $\alpha_{\boldsymbol{b}} - \beta_{\boldsymbol{b}} = 0_R$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$. Jadi $\alpha_{\boldsymbol{b}} = \beta_{\boldsymbol{b}}$ untuk semua $\boldsymbol{b} \in B$. Dengan demikian penulisan kombinasi linier sebrang elemen $\boldsymbol{m} \in M$ dari elemen-elemen di B adalah tunggal.

□

Definisi 8 Suatu M R-modul dikatakan **modul bebas** bila M mempunyai suatu basis untuk M.

□

Contoh 7.1.5 Dalam modul $M = \mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, maka sebarang elemen $m \in M$ merupakan kombinasi liner dari $1 \in M$. Sebab $m = m.1$ untuk semua $m \in M$. Jadi $M = \langle\langle\{1\}\rangle\rangle$ dan $\{1\} \subset M$ adalah bebas linier sebab bila $n.1 = 0$, maka $n = 0$. Jadi $\{1\}$ adalah suatu basis untuk M, dengan demikian M $\mathbb{Z}$ modul adalah modul bebas. Basis yang lain untuk M adalah $\{-1\}$. Begitu juga dalam modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}_n$, maka sebarang elemen $[m]_n \in M$ adalah kombinasi linier dari $[1]_n$, sebab $[m]_n = [m.1]_n = [m]_n\,[1]_n$. Jadi $M = \mathbb{Z}_n = \langle\langle\{[1]_n\}\rangle\rangle$. Himpunan $\{[1]_n\} \subset M$ adalah bebas linier, sebab bila

$$[k]_n\,[1]_n = [k.1]_n = [k]_n = [0]_n,$$

maka $k = 3p, \forall p \in \mathbb{Z}$. Jadi $[k]_n = [0]_n$. Dengan demikian $\{[1]_n\}$ adalah suatu basis dari $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}_n$. Secara umum, diberikan sebarang ring komutatif R yang mempunyai elemen satuan 1_R, maka modul $M = R$ atas R sendiri adalah modul bebas dengan $\{1_R\}$ adalah suatu basis untuk $M = R$. Dengan demikian modul $M = R$ atas R adalah modul bebas.

$\square$

Contoh 7.1.6 Diberikan modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$. Maka $\{[1]_n\}$ membangun $M = \mathbb{Z}_n$. Sebab, untuk sebarang elemen $[m]_n \in M$, didapat

$$[m]_n = m\,[1]_n = \begin{cases} \underbrace{[1]_n + [1]_n + \cdots + [1]_n}_{|m|}, & m > 0 \\ \\ \underbrace{-[1]_n - [1]_n - \cdots - [1]_n}_{|m|}, & m < 0. \end{cases}$$

Tetapi $\{[1]_n\}$ tidak bebas linier, sebab

$$n\,[1]_n = \underbrace{[1]_n + [1]_n + \cdots + [1]_n}_{n} = [n]_n = [0]_n,\ n > 0.$$

Dengan demikian $\{[1]_n\}$ bukan suatu basis untuk $\mathbb{Z}_n$. Bahkan untuk sebarang elemen $[m]_n \in \mathbb{Z}_n$ didapat

$$n\,[m]_n = \underbrace{[m]_n + [m]_n + \cdots + [m]_n}_{n} = [nm]_n = [0]_n,\ n > 0.$$

terlihat bahwa semua elemen $[m]_n \in \mathbb{Z}_n$ tidak bebas linier. Jadi modul $M = \mathbb{Z}_n$ atas $\mathbb{Z}$ adalah tidak bebas.

$\square$

Untuk pembahsan berikutnya dikenalkan suatu notasi $\underline{n}$ untuk $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ adalah himpunan

$$\underline{n} = \{1, 2, 3\ldots, n\}.$$

Contoh 7.1.7 Misalkan ring komutatif R disertai elemen satuan 1_R, dan

$$M = R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in R,\, i \in \underline{n}\}.$$

Dalam M didefinisikan operasi tambah $+$ oleh:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

untuk setiap $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in M$. Sedangkan perkalian elemen skalar $\in R$ dengan elemen $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ didefinisikan oleh

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n).$$

Maka M adalah modul atas R. Selanjutnya untuk $1 \leq j \leq n$ didefinisikan himpunan

$$B = \{\boldsymbol{e}_j = (\delta_{i,j})_{i\in\underline{n}} \in M \,|\, \delta_{i,j} = 1_R,\ i = j,\ \text{dan}\ \delta_{i,j} = 0_R,\ i \neq j\}.$$

Didapat B adalah bebas linier sebab bila

$$r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_M$$

atau

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (0_R, 0_R, \ldots, 0_R),$$

didapat $r_1 = r_2 = \cdots = 0_R$. Selanjutnya diberikan sebarang elemen $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M$ didapat

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n \in \langle\langle B\rangle\rangle.$$

Jadi $\langle\langle B\rangle\rangle = R^n$ dan karena B bebas linier, maka B adalah suatu basis dari modul $M = R^n$ atas R. Dengan demikian modul M atas R adalah bebas. Basis $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ dinamakan **basis baku** dari R^n modul atas R.

□

7.2 Hasil Tambah Langsung

Dalam bagian ini dibahas pengertian hasil tambah langsung. Namum sebelumnya diberikan teorema berikut.

Teorema 7.2.1 Misalkan M_i untuk $i \in \underline{n}$ adalah submodul dari M R-modul, dan

$$S = \sum_{i\in\underline{n}} M_i = \left\{ \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i \,\middle|\, \boldsymbol{m}_i \in M_i \right\}.$$

Maka S adalah submodul dari M.

Bukti Misalkan sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ dan sebarang $a, b \in R$, maka

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}'_i.$$

Sehingga didapat

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = a\sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i + b\sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}'_i = \sum_{i\in\underline{n}} a\boldsymbol{m}_i + \sum_{i\in\underline{n}} b\boldsymbol{m}'_i = \sum_{i\in\underline{n}} (\overbrace{a\boldsymbol{m}_i + b\boldsymbol{m}'_i}^{\in M_i}) \in S.$$

Jadi S adalah submodul dari M.

$\square$

Berikut ini diberikan pernyataan-pernyataan yang ekivalen tentang penulisan elemen-elemen di $\sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$ adalah tunggal.

Teorema 7.2.2 Misalkan M adalah R-modul dan $M_i,\ i \in \underline{n}$ adalah submodul dari M. Maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

1. Penulisan setiap elemen di $\sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$ adalah tunggal.
2. $\sum\limits_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ dipenuhi hanya oleh $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$.
3. $M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\boldsymbol{0}_M\}$ untuk semua $j \in \underline{n}$.

Bukti

(1. $\Rightarrow$ 2.) Asumsikan 1. dipenuhi, dan misalkan $\sum\limits_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$, juga $\sum\limits_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{0}_M = \boldsymbol{0}_M$ ini berarti $\boldsymbol{0}_M \in \sum\limits_{i\in\underline{n}} M_i$. Karena Asumsi 1. dipenuhi, maka haruslah $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Selanjutnya diberikan sebarang $j \in \underline{n}$ misalkan elemen $\boldsymbol{m} \in M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i$, maka didapat

$$\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{m}_j = \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} \boldsymbol{m}_i$$

atau

$$\boldsymbol{0}_M = \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} \boldsymbol{m}_i + \boldsymbol{m}_j = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i.$$

Menurut 2., maka $\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $i \in \underline{n}$. Jadi $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_j = \boldsymbol{0}_M$. Dengan demikian $M_j \bigcap \sum\limits_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\boldsymbol{0}_M\}$ untuk semua $j \in \underline{n}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in \sum_{i\in\underline{n}} M_i$, dan misalkan

$$\boldsymbol{m} = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}'_i.$$

Didapat

$$\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}'_j = \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} (\boldsymbol{m}'_i - \boldsymbol{m}_i) \in M_j \bigcap \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\boldsymbol{0}_M\}.$$

Sehingga berlaku $\boldsymbol{m}_j - \boldsymbol{m}'_j = \boldsymbol{0}_M$ untuk semua $j \in \underline{n}$, atau $\boldsymbol{m}_j = \boldsymbol{m}'_j$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Hal ini berarti penulisan sebarang elemen $\boldsymbol{m} = \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i$ di $\sum_{i\in\underline{n}} M_i$ adalah tunggal.

$\square$

Definisi 9 Submodul $\sum_{i\in\underline{n}} M_i$ dari M R-modul yang memenuhi Teorema 7.2.2 dinamakan **hasil tambah langsung** dan dinotasikan oleh $\bigoplus_{i\in\underline{n}} M_i$. Jadi

$$\bigoplus_{i\in\underline{n}} M_i = \left\{ \sum_{i\in\underline{n}} \boldsymbol{m}_i \;\middle|\; \boldsymbol{m}_i \in M_i,\ M_j \bigcap \sum_{\substack{i\in\underline{n}\\ i\neq j}} M_i = \{\boldsymbol{0}_M\} \right\}.$$

Selanjutnya bila $M = \bigoplus_{i\in\underline{n}} M_i$, maka dikatakan bahwa M adalah **hasil tambah langsung** dari $\{M_i \,|\, i \in \underline{n}\}$.

$\square$

Teorema berikut membahas tentang modul bebas.

Teorema 7.2.3 Misalkan M adalah R-modul dan $M = M_1 \oplus M_2$. Misalkan $S_1 = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_m\}$ adalah suatu basis untuk M_1 dan $S_2 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis untuk M_2. Maka $T = S_1 \cup S_2$ adalah suatu basis dari M. Khususnya, bila M_1 dan M_2 adalah bebas, maka M adalah bebas dan banyaknya elemen basis untuk M adalah $m + n$.

Bukti Pertama ditunjukkan bahwa T adalah bebas linier. Misalkan bahwa

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}_M,\ a_i, b_j \in R.$$

Tulis $\boldsymbol{m}_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i \in M_1$ dan $\boldsymbol{m}_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{v}_j \in M_2$, didapat

$$\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{0}_M.$$

Karena $M = M_1 \oplus M_2$, maka penulisan $\mathbf{0}_M = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ adalah tunggal akibatnya $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}_M$. Sehingga didapat

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}_M,$$

karena S_1 adalah basis untuk M_1, maka $a_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{m}$. Juga, didapat

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_M,$$

karena S_2 adalah basis untuk M_2, maka $b_j = 0_R$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Jadi, bila

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_M,\ a_i, b_j \in R,$$

maka $a_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{m}$ dan $b_j = 0_R$ untuk semua $j \in \underline{n}$. Dengan demikian T adalah bebas linier. Selanjutnya ditunjukkan bahwa T membangun M. Karena $M = M_1 \oplus M_2$, maka diberikan sebarang $\boldsymbol{m} \in M$ didapat

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_1 \in M_1,\ \boldsymbol{m}_2 \in M_2.$$

Tetapi S_1 adalah suatu basis dari M_1, maka

$$\boldsymbol{m}_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{u}_i, \quad \text{untuk beberapa } \ \alpha_i \in R.$$

Begitu juga, S_2 adalah suatu basis untuk M_2, maka

$$\boldsymbol{m}_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{v}_j, \quad \text{untuk beberapa } \ \beta_j \in R.$$

Sehingga didapat

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j \in \langle\langle S_1 \cup S_2 \rangle\rangle.$$

Dengan demikian $M = \langle\langle T \rangle\rangle$. Bukti untuk pernyataan berikutnya dalam teorema mengikuti definisi dari R-modul bebas dan jelas bahwa $|T| = m + n$. $\square$

Berikut ini diberikan kesimpulan dari hasil tambah langsung dari modul bebas.

Kesimpulan 7.2.1 Misalkan M adalah R-modul. Bila $M = \bigoplus_{i \in \underline{n}} M_i$ dengan masing-masing M_i adalah R-submodul bebas untuk $i \in \underline{n}$, maka M adalah modul bebas.

Bukti Mengikuti pembuktian dalam Teorema 7.2.3. $\square$

Definisi 7.2.1 Misalkan M adalah R-modul bebas. Banyaknya elemen dari sebarang basis untuk M dinamakan **rank** dan dinotasikan oleh $\text{rk}_R(M)$.

$\square$

Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah suatu lapangan pecahan dari R. Elemen-elemen di R mempunyai bentuk $a = \frac{a}{1} \in F$. Jadi $R \subset F$. Sehingga didapat

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in R\} \subset F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i \in F\}.$$

Telah diketahui bahwa R^n adalah R-modul dan misalkan $V \subset R^n$ adalah R-submodul dari R^n. Didefinisikan himpunan

$$FV \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \boldsymbol{v} \,|\, \alpha \in F, \boldsymbol{v} \in V\}. \tag{7.1}$$

Teorema 7.2.4 Himpunan FV yang diberikan dalam (7.1) adalah ruang bagian dari F^n.

Bukti Cukup dibuktikan bahwa bila $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in FV$ dan $\lambda \in F$, maka $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in FV$ dan $\lambda \boldsymbol{u}_1 \in FV$. Misalkan $\boldsymbol{u}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1$ dan $\boldsymbol{u}_2 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_2$ dengan $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$. Tulis $\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1}$ dan $\alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}$ dimana $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ dan $b_1 \neq 0_R, b_2 \neq 0_R$. Sehingga didapat

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 = \frac{a_1}{b_1} \boldsymbol{v}_1 + \frac{a_2}{b_2} \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{b_1 b_2}(a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + b_1 a_2 \boldsymbol{v}_2).$$

Karena V R-submodul dari R^n, maka $a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + b_1 a_2 \boldsymbol{v}_2 \in V$ dan karena $\frac{1}{b_1 b_2} \in F$, maka

$$\frac{1}{b_1 b_2}(a_1 b_2 \boldsymbol{v}_1 + b_1 a_2 \boldsymbol{v}_2) \in FV.$$

Jadi $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 \in FV$. Selanjutnya, juga didapat

$$\lambda \boldsymbol{u}_1 = \lambda(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1) = (\lambda \alpha_1) \boldsymbol{v}_1 \in FV.$$

Dengan demikian FV adalah ruang bagian dari F^n.

$\square$

Definisi 7.2.2 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah suatu lapangan pecahan dari R. Bila $V \subset R^n$ adalah R-submodul, maka rank $\text{rk}_R(V)$ didefinisikan oleh dimensi $\dim_F(FM)$. Jadi $\text{rk}_R(V) = \dim_F(FM)$.

$\square$

Teorema 7.2.5 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan F adalah lapangan pecahan dari R. Bila $V \subset R^n$ adalah R-submodul, maka

1. $0 \leq \text{rk}_R(V) \leq n$.

2. $\mathrm{rk}_R(R^n) = n$.
3. Misalkan M_1, M_2 adalah R-submodul dari R^n dan $M = M_1 \oplus M_2$, maka
$$FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}, FM_1 + FM_2 = F(M_1 + M_2)$$
dan
$$\mathrm{rk}_R(M) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2).$$
4. Misalkan $\boldsymbol{v} \in M$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_{R^n}$. Maka $\{\boldsymbol{v}\}$ adalah suatu basis dari $R\boldsymbol{v}$ dan $\mathrm{rk}_R(R\boldsymbol{v}) = 1$.
5. Misalkan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah basis dari suatu submodul dari $M \subseteq R^n$. Maka $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ adalah basis dari FM, yaitu $\mathrm{rk}_R(M) = r$.

Bukti Untuk 1. dan 2. : Karena $V \subset R^n$, maka menurut definisi didapat $FV \subset FR^n = F^n$. Dengan demikian F^n adalah ruang vektor atas F berdimensi $\dim_F(F^n) = n$ dan menurut Teorema 7.2.4 FV adalah subruang dari F^n. Sehingga didapat
$$0 \leq \mathrm{rk}_R(V) = \dim_F(FV) \leq \dim_F(F^n) = n.$$
Untuk 3. Pertama ditunjukkan bahwa $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$. Untuk hal ini misalkan $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 \in FM_1$ dan $\alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FM_1$ dengan
$$\alpha_1 = \frac{a_1}{b_1},\ \alpha_2 = \frac{a_2}{b_2}, \tag{7.2}$$
untuk $\boldsymbol{v}_1 \in M_1, \boldsymbol{v}_2 \in M_2$ dan $a_1, a_2 \in R$, b_1, b_2 elemen-elemen taknol di R. Bila
$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FM_1 \cap FM_2,$$
maka
$$\frac{a_1}{b_1}\boldsymbol{v}_1 = \frac{a_2}{b_2}\boldsymbol{v}_2,$$
sehingga didapat
$$\frac{a_1b_2}{b_1b_2}\boldsymbol{v}_1 = \frac{a_2b_1}{b_1b_2}\boldsymbol{v}_2.$$
Karena $b_1b_2 \neq 0_R$, maka
$$(a_1b_2)\boldsymbol{v}_1 = (a_1b_2)\boldsymbol{v}_2 \in M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_{R^n}\} \quad (\text{sebab } M = M_1 \oplus M_2).$$
Karena $b_2 \neq 0_R$ dan $\mathbf{0}_{R^n} = \mathbf{0}_{F^n}$, maka
$$a_1\boldsymbol{v}_1 = (b_2^{-1}a_1b_2)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}_{F^n}.$$
Jadi $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$. Berikutnya ditunjukkan bahwa
$$FM_1 + FM_2 = F(M_1 + M_2).$$

Misalkan, sebarang elemen-elemen $\boldsymbol{v}_1 \in M_1$ dan $\boldsymbol{v}_2 \in M_2$. Bila $\alpha \in F$, maka

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2 \in (FM_1 + FM_2).$$

Jadi

$$F(M_1 + M_2) \subset FM_1 + FM_2. \tag{7.3}$$

Sebaliknya, misalkan $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 \in FM_1$ dan $\alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in FM_2$ dengan α_1 dan α_2 sebagai mana diberikan dalam (7.2). Didapat

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{b_1b_2}(a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + a_2b_1\boldsymbol{v}_2).$$

Karena $\frac{1}{b_1b_2} \in F$ dan $a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + a_2b_1\boldsymbol{v}_2 \in M_1 + M_2$, maka

$$\frac{1}{b_1b_2}(a_1b_2\boldsymbol{v}_1 + a_2b_1\boldsymbol{v}_2) \in F(M_1 + M_2).$$

Jadi $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in F(M_1 + M_2)$. Dengan demikian

$$FM_1 + FM_2 \subset F(M_1 + M_2). \tag{7.4}$$

Akibatnya, dari (7.3) dan (7.4) didapat

$$F(M_1 + M_2) = FM_1 + FM_2.$$

Dari pembahasan bukti 1. sampai 3. dan definisi rank, didapat

$$\mathrm{rk}_R(M) = \mathrm{rk}_R(M_1 + M_2) = \dim_F(F(M_1 + M_2)) = \dim_F(FM_1 + FM_2). \tag{7.5}$$

Tetapi dari pengetahuan aljabar linier diketahui bahwa bila V_1 dan V_2 adalah ruang bagian dari ruang vektor F^n atas lapangan F, maka

$$\dim_F(V_1 + V_2) = \dim_F(V_1) + \dim_F(V_2) - \dim_F(V_1 \cap V_2). \tag{7.6}$$

Sehingga bila dalam Persamaan 7.6 $V_1 = FM_1$ dan $V_2 = FM_2$ dan karena $FM_1 \cap FM_2 = \{\mathbf{0}_{F^n}\}$, maka Persamaan 7.5 menjadi

$$\mathrm{rk}_R(M) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2). \tag{7.7}$$

Selanjutnya dibuktikan pernyataan 4. Jelas dari definisi $R.\boldsymbol{v} = \{r\boldsymbol{v} \,|\, r \in R\}$ vektor $\{\boldsymbol{v}\}$ membangun $R.\boldsymbol{v}$. Misalkan vektor taknol $\boldsymbol{v} \in R^n$, maka dengan menggunakan basis baku di R^n didapat

$$\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{e}_1 + r_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{e}_n,$$

untuk beberapa elemen taknol $r_i \in R$. Bila $a\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_{R^n}$ untuk $a \in R$, didapat

$$(ar_1)\boldsymbol{e}_1 + (ar_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (ar_n)\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}_{R^n}$$

dan karena $\{\boldsymbol{e}_i \,|\, i \in \underline{n}\}$ adalah basis untuk R^n, maka $\boldsymbol{e}_i,$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah bebas linier. Dengan demikian $ar_i = 0_R$ untuk semua $i \in \underline{n}$ dan karena $r_i \neq 0_R$ untuk beberapa $i \in \underline{n}$, maka $a = 0_R$ (sebab R adalah daerah integral). Jadi $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_M$ di R^n adalah bebas linier di $R.\boldsymbol{v}$ dan karena $R.\boldsymbol{v} = \langle\langle \boldsymbol{v} \rangle\rangle$, maka $\boldsymbol{v}$ adalah suatu basis untuk $R.\boldsymbol{v}$. Terakhir dibuktikan pernyataan 5. dengan menggunakan induksi pada r. Dalam hal $r = 0$ adalah trivial dan $r = 1$ sudah dibuktikan dalam 4. Misalkan

$$M_1 = \bigoplus_{i=1}^{r-1} R\boldsymbol{v}_i,$$

maka $S_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}\}$ adalah suatu basis untuk M_1. Dengan menggunakan induksi, S_1 adalah basis dari $FM_1 = \sum\limits_{i=1}^{r-1} F.\boldsymbol{v}_i$ dan $\mathrm{rk}_R(M_1) = r - 1$. Selanjutnya pilih elemen taknol $\boldsymbol{v}_r \in R^n$ yang memenuhi $M_2 = R.\boldsymbol{v}_r$ dan $M = M_1 \oplus M_2$. Maka $\{\boldsymbol{v}_r\}$ adalah suatu basis untuk M_2 dan $\mathrm{rk}_R(M_2) = 1$. Dengan menggunakan Teorema 7.2.3, maka

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r$$

adalah basis untuk $M = M_1 \oplus M_2$. Karena $M_1 \cap M_2 = \{\boldsymbol{0}_{R^n}\}$ dan dengan menggunakan hasil 3., maka $FM_1 \cap FM_2 = \{\boldsymbol{0}_{F^n}\}$ dan dengan menggunakan induksi didapat

$$FM = F(M_1 + M_2) = FM_1 + FM_2 = \sum_{i=1}^{r} F.\boldsymbol{v}_i,$$

dan dengan menggunakan definisi rank, maka $\mathrm{rk}_R(M) = \dim_F(FM) = r$. $\square$

Teorema berikut penting tentang M R-modul bebas yang dibangun secara berhingga isomorpik dengan R^n R modul bebas.

Teorema 7.2.6 Misalkan R adalah suatu daerah integral. Bila M adalah R-modul bebas dibangun secara berhingga, maka M dan R^n adalah isomorpik.

Bukti Misalkan $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu basis untuk M dan misalkan pemetaan $\phi : M \to R^n$ didefinisikan oleh $\phi(\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ untuk semua $\boldsymbol{v} = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$ di M. Ditunjukkan bahwa ϕ adalah R-isomorpisma. Ditunjukkan dulu ϕ adalah R-homomorpisma. Diberikan sebarang elemen di M, yaitu

$$\boldsymbol{m}_1 = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{v}_i$$

dan

$$\boldsymbol{m}_2 = s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + s_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} s_i\boldsymbol{v}_i$$

dan sebarang elemen $a, b \in R$, didapat

$$\begin{aligned}
\phi(a\boldsymbol{m}_1 + b\boldsymbol{m}_2) &= \phi(a\sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{v}_i + b\sum_{i=1}^{n} s_i\boldsymbol{v}_i) \\
&= \phi(\sum_{i=1}^{n} ar_i\boldsymbol{v}_i + b\sum_{i=1}^{n} bs_i\boldsymbol{v}_i) \\
&= \phi(\sum_{i=1}^{n}(ar_i + bs_i)\boldsymbol{v}_i) \\
&= (ar_1 + bs_1, ar_2 + bs_2, \ldots, ar_n + bs_n) \\
&= (ar_1, ar_2, \ldots, ar_n) + (bs_1, bs_2, \ldots, bs_n) \\
&= a(r_1, r_2, \ldots, r_n) + b(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\
&= a\phi(\boldsymbol{m}_1) + b\boldsymbol{m}_2.
\end{aligned}$$

Jadi ϕ adalah R-homomorpisma. Berikutnya ditunjukkan bahwa ϕ adalah satu-satu. Misalkan bahwa $\phi(\boldsymbol{m}) = \mathbf{0}_{R^n}$. Karena B adalah suatu basis, dapat dipilih dengan tunggal skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang memenuhi

$$\boldsymbol{m} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Jadi,

$$\phi(\boldsymbol{m}) = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0_R, 0_R, \ldots, 0_R)$$

hal berakibat bahwa $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Dengan demikian $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_M\}$, jadi ϕ adalah satu-satu. Selanjutnya diberikan sebarang elemen

$$\boldsymbol{y} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

di R^n. Pilih elemen $\boldsymbol{m} \in M$ diberikan oleh $\boldsymbol{m} = r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{m}) &= \phi(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= (r_1, r_2, \ldots, r_n) \\
&= \boldsymbol{y},
\end{aligned}$$

jadi ϕ adalah pada. Dengan demikian ϕ adalah suatu R-isomorpisma dan $M \cong R^n$. $\square$

Teorema berikut menjelaskan bahwa peranan basis dalam suatu monomorpisma modul tetap dipertahankan dalam imagenya.

Teorema 7.2.7 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan masing-masing M dan N adalah R-modul bebas yang dibangun secara berhingga. Bila

$$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

adalah suatu basis untuk M dan $\phi : M \to N$ adalah suatu R-monomorpisma, maka

$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah suatu basis untuk $\phi(M) \subset N$.

Bukti Ditunjukkan dulu

$$\phi(M) = \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Untuk menunjukkan bahwa dua himpunan sama adalah masing-masing merupakan himpunan bagian dari yang lainnya. Pertama, Bila $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$, maka dapat dipilih suatu elemen $\boldsymbol{v} \in M$ yang memenuhi $\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Selanjutnya, karena B adalah suatu basis dari M, maka juga dapat dipilih $c_1, c_2, \ldots, c_n$ di R yang memenuhi

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}.$$

Sehingga didapat

$$\phi(\boldsymbol{v}) = \phi(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}).$$

Karena ϕ adalah R-homomorpisma, didapat

$$\boldsymbol{w} = \phi(\boldsymbol{v}) = c_1\phi(\boldsymbol{v_1}) + c_2\phi(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + c_n\phi(\boldsymbol{v_n}).$$

Terlihat bahwa sebarang $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$ merupakan kombinasi linier dari elemen-elemen

$$\phi(\boldsymbol{v_1}), \phi(\boldsymbol{v_2}), \ldots, \phi(\boldsymbol{v_n}).$$

Jadi

$$\boldsymbol{w} \in \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Dengan demikian

$$\phi(M) \subseteq \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Sebaliknya, misalkan bahwa sebarang elemen

$$\boldsymbol{w} \in \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle.$$

Maka dapat dipilih elemen-elemen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ di R yang memenuhi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= k_1\phi(\boldsymbol{v_1}) + k_2\phi(\boldsymbol{v_2}) + \cdots + k_n\phi(\boldsymbol{v_n}) \\
&= \phi(k_1\boldsymbol{v_1}) + \phi(k_2\boldsymbol{v_2}) + \cdots + \phi(k_n\boldsymbol{v_n}) \\
&= \phi(k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}).
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{w}$ adalah image dari kombinasi linier

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_1\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$$

yang merupakan suatu elemen dari M. Jadi $\boldsymbol{w} \in \phi(M)$, dengan demikian

$$\langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle \subseteq \phi(M).$$

Akibatnya $\phi(M) = \langle\langle\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}\rangle\rangle$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa

$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah bebas linier di $\phi(M) \subset N$. Tinjau persamaan

$$c_1\phi(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n\phi(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_N,\ c_i \in R \quad \text{untuk} \quad i \in \underline{n}$$

atau ekivalen dengan

$$\phi(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_N.$$

Karena ϕ adalah satu-satu, maka $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_M\}$, jadi

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_M.$$

Karena $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah basis untuk M, maka B besas linier, jadi $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0_R$. Dengan demikian

$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_n)\}$$

adalah suatu basis untuk $\phi(M)$.

□

Berikut ini diberikan definisi rank sebarang submodul bebas dari M R-modul bebas yang dibangun secara berhingga melalui suatu isomorpisma modul.

Definisi 7.2.3 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan M adalah modul bebas atas R yang dibangun secara berhingga. Diberikan suatu pemetaan

$$\phi : M \to R^n,$$

adalah R-isomorpisma. Misalkan $M_1 \subset M$ adalah R-submodul. Maka rank $\mathrm{rk}_R(M_1)$ didefinisikan sebagai rank $\mathrm{rk}_R(\phi(M_1))$, jadi $\mathrm{rk}_R(M_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{rk}_R(\phi(M_1))$.

□

Teorema berikut dari Teorema 7.2.5 tetapi M adalah sebarang R-modul bebas yang dibangun secara berhingga.

Teorema 7.2.8 Misalkan R adalah suatu daerah integral dan M adalah R-modul bebas yang dibangun secara berhingga dan $\phi : M \to R^n$ adalah R-isomorpisma. Maka

1. Misalkan $M_1, M_2 \subset M$ adalah R-submodul. Bila $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, maka

$$\mathrm{rk}_R(M_1 + M_2) = \mathrm{rk}_R(M_1) + \mathrm{rk}_R(M_2).$$

2. Misalkan $M_1 \subset M$ adalah suatu R-submodul dengan basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$. Maka $\text{rk}_R(M_1) = r$.

3. Bila $M_1 \subset M$ adalah suatu R-submodul, maka
$$0 \leq \text{rk}_R(M_1) \leq n.$$

4. Bila sebarang elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$, maka $\text{rk}_R(R.\boldsymbol{v}) = 1$.

Bukti Untuk 1. Bila $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, misalkan $\phi(M_1) = N_1$ dan $\phi(M_2) = N_2$. Ditunjukkan bahwa $N_1 \cap N_2 = \{\mathbf{0}_{R^n}\}$. Misalkan sebarang elemen $\boldsymbol{y} \in N_1 \cap N_2$, maka pilih $\boldsymbol{x}_1 \in M_1$ dan $\boldsymbol{x}_2 \in M_2$ yang memenuhi
$$\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_1) \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_2).$$
Tetapi karena ϕ adalah R-isomorpisma, maka ϕ satu-satu. Jadi $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Ini berarti $\boldsymbol{x}_1 \in M_2$ dan karena $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}_M\}$, maka $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}_M$. Akibatnya
$$\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}_1) = \phi(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_{R^n}.$$
Sehingga didapat
$$N_1 \cap N_2 = \phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \{\mathbf{0}_{R^n}\}.$$
Sehingga dengan menggunakan Teorema 7.2.5 bagian 3. didapat
$$\begin{aligned} \text{rk}_R(\phi(M_1 + M_2)) &= \text{rk}_R(\phi(M_1) + \phi(M_2)) \quad (\text{sebab } \phi \ R\text{-isomorpisma}) \\ &= \text{rk}_R(\phi(M_1)) + \text{rk}_R(\phi(M_2)). \end{aligned}$$
Dengan demikian, menurut Definisi 7.2.3 didapat
$$\text{rk}_R(M_1 + M_2) = \text{rk}_R(M_1) + \text{rk}_R(M_2).$$
Untuk 2., dari Teorema 7.2.7 himpunan
$$\{\phi(\boldsymbol{v}_1), \phi(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \phi(\boldsymbol{v}_r)\}$$
adalah suatu basis untuk $\phi(M_1)$. Sehingga menurut Teorema 7.2.5 bagian 5. didapat $\text{rk}_R(M_1) = r$. Untuk 3., Teorema 7.2.5 bagian 1. didapat bila $M_1 \subset M$ adalah R-submodul, maka $0 \leq \text{rk}_R(M_1) \leq n$. Sedangkan untuk 4. gunakan Teorema 7.2.5 bagian 4 didapat bila elemen taknol $\boldsymbol{v} \in M$, maka $\text{rk}_R(R.\boldsymbol{v}) = 1$.

∎

Modul Noetherian

Diberikan $M = \mathbb{Z}$ modul atas $\mathbb{Z}$. Sebagaimana telah diketahui modul ini adalah modul bebas, sebab

$$\langle\langle 1\rangle\rangle = \{n.1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

dan $m.1 = 0$ berakibat $m = 0$. Terlihat bahwa 1 adalah suatu basis dari M dan elemen pembangun dari M berhingga yaitu satu. Disamping itu submodul-submodul dari M berbentuk:

$S_1 = 1\mathbb{Z} = \{1.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} = \langle\langle 1\rangle\rangle$
$S_2 = 2\mathbb{Z} = \{2.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 2\rangle\rangle$
$S_3 = 3\mathbb{Z} = \{3.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 3\rangle\rangle$
$S_4 = 4\mathbb{Z} = \{4.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 4\rangle\rangle$
$S_5 = 5\mathbb{Z} = \{5.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 5\rangle\rangle$
$S_6 = 6\mathbb{Z} = \{6.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 6\rangle\rangle$
$S_7 = 7\mathbb{Z} = \{7.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 7\rangle\rangle$
$S_8 = 8\mathbb{Z} = \{8.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 8\rangle\rangle$
$S_9 = 9\mathbb{Z} = \{3.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 9\rangle\rangle$
$S_{10} = 10\mathbb{Z} = \{10.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle 10\rangle\rangle$

Secara umum untuk $k \in \mathbb{Z}$ dan $k \geq 1$ didapat submodul dari M adalah

$$S_k = k\mathbb{Z} = \{k.n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \langle\langle k\rangle\rangle.$$

Terlihat bahwa untuk semua $k \in \mathbb{Z}$ dengan $k \geq 1$, semua submodul dari M yaitu S_k dibangun secara berhingga oleh satu elemen pembangun. Selain itu selalu ada **barisan rantai menaik** submodul-submodul dari M, misalnya

$$\{0\} \subset \cdots \subset \langle\langle 2^4\rangle\rangle \subset \langle\langle 2^3\rangle\rangle \subset \langle\langle 2^2\rangle\rangle \subset \langle\langle 2\rangle\rangle$$

berakhir dengan submodul tetap yaitu $\langle\langle 2\rangle\rangle$. Dengan cara yang sama untuk submodul-submodul berikut

$$\{0\} \subset \cdots \subset \langle\langle 3^4\rangle\rangle \subset \langle\langle 3^3\rangle\rangle \subset \langle\langle 3^2\rangle\rangle \subset \langle\langle 3\rangle\rangle$$

berakhir dengan submodul tetap yaitu $\langle\langle 3\rangle\rangle$.

Suatu modul M atas suatu ring R yang memenuhi kondisi **barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan submodul tetap** dinamakan modul ***Noetherian***.

Dari apa yang dibahas, terlihat bahwa ada keterkaitan antara modul Noetherian M atas R yang memenuhi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan suatu submodul tetap dengan submodul-submodul tersebut dibangun secara berhingga. Juga, misalkan $M = \mathbb{Z}^2$ $\mathbb{Z}$-modul. Disini

$$M = \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan $R = \mathbb{Z}$. Maka

$$S_1 = \left\langle \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\rangle = \left\{ m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\langle \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\{ m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ adalah suatu basis untuk S_1 $\mathbb{Z}$-submodul dan $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ adalah suatu basis untuk S_2 $\mathbb{Z}$-submodul dan $S_1 \subset S_2$. Modul $M = \mathbb{Z}^2$ $\mathbb{Z}$-modul dan submodul-submodulnya dibangun secara berhingga dan memenuhi setiap barisan rantai menaik submodul-submodul dari $\mathbb{Z}^2$ berakhir pada submodul yang tetap.

Teorema 7.2.9 Diberikan M R-modul adalah modul Noetherian bila dan hanya bila setiap submodul dari M dibangun secara berhingga.

Bukti ($\Leftarrow$) Misalkan semua submodul dari M dibangun secara berhingga dan M memuat suatu barisan takhingga submodul-submodul dari M yang menaik, yaitu

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4 \subset \cdots , \tag{7.8}$$

maka $S = \bigcup_j S_j$ adalah submodul dari M yang dibangun secara berhingga, dengan demikian didapat

$$S = \langle\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle\rangle \; .$$

Terlihat bahwa $\boldsymbol{v}_i \in S$ untuk $i \in \underline{n}$, sehingga dapat dipilih indeks $k_i \in \underline{n}$ yang memenuhi $\boldsymbol{v}_i \in S_{k_i}$. Jadi bila

$$k = \max\{k_1, k_2, \kappa_3, \ldots, k_n\}$$

didapat

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset S_k \, .$$

Dengan demikian

$$S = \langle\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}\rangle\rangle \subset S_k \subset S_{k+1} \subset S_{k+2} \subset \cdots \subset S.$$

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi (7.8) adalah barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan submodul tetap S. Sebaliknya ($\Rightarrow$), misalkan bahwa M

memenuhi kondisi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan suatu submodul tetap S. Pilih $\boldsymbol{u}_1 \in S$ dan misalkan

$$S_1 = \langle\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S_1 = S$, maka terlihat bahwa S dibangun secara berhingga, yaitu oleh satu elemen $\boldsymbol{u}_1$. Bila $S_1 \neq S$, pilih $\boldsymbol{u}_2 \in S - S_1$ dan misalkan

$$S_2 = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S_2 = S$, proses pemilihan elemen di S dihentikan, sebab S dibangun secara berhingga oleh dua elemen $\boldsymbol{u}_1$ dan $\boldsymbol{u}_2$. Bila tidak, maka pilih elemen $\boldsymbol{u}_3 \in S - S_2$ dan misalkan

$$S_3 = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \rangle\rangle \subset S.$$

Bila $S = S_3$, maka S dibangun secara berhingga oleh tiga elemen $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ dan $\boldsymbol{u}_3$. Bila $S \neq S_3$ proses pemilihan elemen di S dilanjutkan sebagaimana proses sebelumnya, sehingga didapat barisan rantai menaik submodul-submodul dari M, yaitu

$$\langle\langle \boldsymbol{u}_1 \rangle\rangle \subset \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} \rangle\rangle \subset \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\} \rangle\rangle \subset \cdots \subset S \tag{7.9}$$

Bila taksatupun submodul-submodul dalam barisan (7.9) tidak sama dengan S, maka didapat suatu barisan takhingga rantai menaik submodul-submodul dari M yang masing-masing submodul termuat dalam submodul berikutnya. Hal ini bertentangan dengan kenyataan kondisi barisan rantai menaik submodul-submodul dari M yang berakhir dengan submodul tetap, dalam hal ini adalah S. Jadi haruslah

$$S = \langle\langle \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_m\} \rangle\rangle,$$

untuk beberapa bilangan bulat positip m. Dengan demikian submodul S dibangun secara berhingga sebanyak m elemen.

$\square$

Bab 8

Struktur Operator Linier

Bibliografi

[1] Steven Roman. "Advanced Linear Algebra, Third Edition", Springer, USA, (2008).

[2] Sean Sather-Wagstaff. "Rings, Modules, and Linear Algebra", Department of Mathematics, NDSU Dept # 2750, PO Box 6050, Fargo, ND 58108-6050 USA. URL: http://www.ndsu.edu/pubweb/ ssatherw/

[3] William A. Adkins and Steven H. Weintraub. "Algebra An Approach via Module Theory", Springer-Verlag, USA, (1999)